Lineare Algebra II (Lehramt) – Übungsblatt 1
Besprechung: Fri, 13.01.2017

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit der Eigenschaft
$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} = 1 \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq n.$$
Zeigen Sie, dass $x(t+1) = Ax(t)$ ein Gleichgewicht $x_0 \neq 0$ besitzt.

2. Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ dazugehörige Eigenvektoren, also $Av_i = \lambda_i v_i$ und $v_i \neq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

   (a) Zeigen Sie: Die Lösungen von $x(t+1) = Ax(t)$ sind die Folgen der Form
$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} k_i \lambda_i^t v_i$$
mit $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{K}$.

   (b) Es gelte $|\lambda_i| < 1$ für alle $1 \leq i \leq n$. Was folgt daraus für $\lim_{t\to\infty} A^t x_0$, wobei $x_0 \in \mathbb{K}^n$?

3. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass die durch $x_i(t) = \lambda_i^t$ für $1 \leq i \leq n$ gegebenen Folgen $\mathbb{K}$-linear unabhängig sind.

4. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von den Parametern $a, b \in \mathbb{R}$ alle Gleichgewichte von $x(t+1) = Ax(t)$, wobei
$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Für welche Werte von a, b ist A diagonalisierbar?