Lineare Algebra II (Lehramt) – Übungsblatt 2
Besprechung: Fri, 20.01.2017

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Bestimmen Sie die Jordan-Form der Matrix aus Aufgabe 4 von Blatt 1 in Abhängigkeit von a, b.

2. Sei $N \in \mathbb{K}^{n\times n}$ die Matrix mit den Einträgen

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i+1=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für die Einträge von N^k gilt:

$$(N^k)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i+k=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie das charakteristische und das Minimalpolynom von N sowie seine Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheit.

(b) Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ und $J = \lambda I_n + N$ ein Jordan-Block der Größe n. Bestimmen Sie das charakteristische und das Minimalpolynom von J sowie seine Eigenwerte und deren algebraische und geometrische Vielfachheit.

3. Betrachten Sie $x(t+1) = Ax(t)$, $x(0) = x_0$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\lim_{t\to\infty} x(t)$ in Abhängigkeit von $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

4. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Es gelte $|\lambda| \leq 1$ für alle Eigenwerte λ von A. Zudem gelte für jeden Eigenwert λ mit $|\lambda| = 1$, dass seine algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen.

(a) Zeigen Sie, dass A zu einer Matrix der Form

$$\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

ähnlich ist, wobei D eine Diagonalmatrix ist mit $|D_{ii}| = 1$ für alle i, und B eine Matrix ist, deren Eigenwerte alle betragsmäßig kleiner als 1 sind.

(b) Sei $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{C}^n$ (siehe Skript S. 16). Zeigen Sie, dass die durch $y(t) = \|A^t x_0\|$ definierte Folge für alle $x_0 \in \mathbb{C}^n$ beschränkt ist.

Hinweis: Sei $|\lambda| < 1$ und $p : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion. Dann ist die durch $z(t) = |p(t)\lambda^t|$ definierte Folge beschränkt.