Lineare Algebra II (Lehramt) – Übungsblatt 3
Besprechung: Fri, 27.01.2017

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1. Gegeben sei die Fibonacci-Gleichung

$$y(t+2) = y(t+1) + y(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}_0.$$

Für $y(0) = y(1) = 1$ ergibt sich die berühmte Fibonacci-Folge

$$y = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots).$$

Setzen Sie $x(t) := \begin{bmatrix} y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix}$ und bestimmen Sie A mit $x(t+1) = Ax(t)$. Geben Sie eine Lösungsformel für $y(t)$ in Abhängigkeit von $y(0)$ und $y(1)$ an. Für welche Wahl von $y(0), y(1)$ gilt $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$?

2. Sind die folgenden Matrizen reduzibel? Wenn ja, geben Sie eine Permutationsmatrix P mit $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ an.

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nichtnegative Matrix, seien $t \in \mathbb{N}$ und $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Zeigen Sie, dass $(A^t)_{ij} > 0$ genau dann gilt, wenn Indizes $k_1, \ldots, k_{t-1} \in \{1, \ldots, n\}$ existieren mit $A_{ik_1} A_{k_1k_2} \cdots A_{k_{t-1}j} > 0$.

Erläutern Sie den Bezug zum graphentheoretischen Test auf Reduzibilität!

4. (a) Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ist genau dann irreduzibel, wenn ihre Transponierte A^T es ist.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nichtnegativ. Zeigen Sie, dass A genau dann irreduzibel ist, wenn $(I + A)^{n-1}$ eine positive Matrix ist. Folgern Sie: Ist $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine nichtnegative und irreduzible Matrix, so ist $A + B$ ebenfalls irreduzibel.