Vektorwertige Funktionen

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $f : G \to \mathbb{R}^m$,

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

(30.37) Definition Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}^m$.
(a) Grenzwerte, Stetigkeit, partielle Ableitung, ... werden komponentenweise erklärt, z.B.

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} (f_1)_{x_i}(\underline{x}) \\ \vdots \\ (f_m)_{x_i}(\underline{x}) \end{pmatrix}.$$

(b) f heißt in $\underline{x}_0 \in G$ *differenzierbar* oder *linear approximierbar*, falls es eine Umgebung U von $\underline{x}_0$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so daß

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + A(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|) \text{ für alle } x \in U.$$

Man beachte, daß f in $\underline{x}_0$ differenzierbar ist, genau dann wenn alle Komponenten f_i von f in $\underline{x}_0$ differenzierbar sind. Die i-te Zeile der obigen Matrix A ist dann genau $(\nabla f_i(\underline{x}_0))^{tr}$.
(c) Die *Jacobi Matrix* von f in $\underline{x}_0 \in G$ ist $J_f(\underline{x}_0) = f'(\underline{x}_0) =$

$$\begin{pmatrix} \nabla f_1(\underline{x}_0)^{tr} \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x}_0)^{tr} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}_0) \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}_0) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\underline{x}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

(30.38) Satz Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{R}^m$ und U eine Umgebung von $\underline{x}_0 \in G$.
(a) Ist f in U stetig partiell differenzierbar, so ist f in $\underline{x}_0$ linear approximierbar mit

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|) \text{ für alle } x \in U.$$

(b) Ist f in U linear approximierbar so gibt es $C \in \mathbb{R}$ mit $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| \leq C|\underline{x} - \underline{x}_0|$ für alle $\underline{x} \in U$.

(30.39) Satz Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f, g : G \to \mathbb{R}^m$, $\alpha : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $\underline{x} \in G$, $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt
(a) $(af + bg)'(\underline{x}) = af'(\underline{x}) + bg'(\underline{x})$.
(b) $(\alpha f)'(\underline{x}) = \alpha(\underline{x}) f'(\underline{x}) + f(\underline{x})(\nabla \alpha(\underline{x}))^{tr}$
(c) $(f \cdot g)'(\underline{x}) = g(\underline{x})^{tr} f'(\underline{x}) + f(\underline{x})^{tr} g'(\underline{x})$.

(30.40) Satz (Kettenregel) Seien $G \subset \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ Gebiete, $f : G \to D$ differenzierbar in $\underline{x}_0 \in G$, $g : D \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in $f(\underline{x}_0) = \underline{y}_0$.
Dann ist $g \circ f : G \to \mathbb{R}^k$ in $\underline{x}_0$ differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(\underline{x}_0) = g'(f(\underline{x}_0))f'(\underline{x}_0).$$

<u>Beweis:</u>

$$g(f(\underline{x})) = g(f(\underline{x}_0)) + g'(f(\underline{x}_0))(f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)) + o(|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)|) =$$

$$g(f(\underline{x}_0)) + g'(f(\underline{x}_0))(f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)) + o(|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)|) =$$

$$g(f(\underline{x}_0)) + g'(f(\underline{x}_0))f'(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) + o(|\underline{x} - \underline{x}_0|)$$

wobei im letzten Schritt (30.38)(b) angewandt wurde.

Beispiel Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die lineare Abbildung mit $f(\underline{x}) = A\underline{x}$. Dann ist f differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^n$ mit $f'(\underline{x}) = A$. Ist $B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ und $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k, \underline{x} \mapsto B\underline{x}$, so gilt $(g \circ f)' = AB$.

(30.41) Satz über implizite Funktionen Seien $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^k$, $\underline{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0, U_1 := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^k \mid |\underline{x} - \underline{x}_0| < \epsilon_1\}, U_2 := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^m \mid |\underline{y} - \underline{y}_0| < \epsilon_2\}, F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar in $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ mit $F(\underline{x}_0, \underline{y}_0) = \underline{0}$ und

$$J_F(\underline{x}_0, \underline{y}_0) =: \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0), \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \right)$$

so daß $\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ invertierbar ist.
Dann kann man $F(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$ lokal bei $(\underline{x}_0, \underline{y}_0)$ nach $\underline{y}$ auflösen, d.h. es gibt Umgebungen $V_1 \subseteq U_1$ von $\underline{x}_0$ und $V_2 \subseteq U_2$ von $\underline{y}_0$, so daß für alle $\underline{x} \in V_1$ genau ein $\underline{y} \in V_2$ existiert mit $F(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{0}$. Die durch $f(\underline{x}) = \underline{y}$ definierte Funktion $f : V_1 \to V_2$ ist in V_1 stetig differenzierbar mit

$$f'(\underline{x}_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(\underline{x}_0, \underline{y}_0).$$

Die Gleichung für die Jacobimatrix von f ergibt sich durch Differenzieren der Gleichung $F(\underline{x}, f(\underline{x})) = \underline{0}$ mit der Kettenregel:

$$\underline{0} = J_F(\underline{x}, f(\underline{x})) \begin{pmatrix} I_k \\ J_f(\underline{x}) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, f(\underline{x}))I_k + \frac{\partial F}{\partial \underline{y}}(\underline{x}, f(\underline{x})))f'(\underline{x})$$