Ausarbeitung zum Seminar: Algebraische Kombinatorik:
Spezies - Zugehörige Reihen und Äquivalenzen

Ben Becker

Mai 2019

Diese Ausarbeitung zum Seminar: Algebraische Kombinatorik wird sich mit den Kapiteln 3.1 und 3.2 des Skriptes zur Vorlesung Algebraische Kombinatorik von Wilhelm Plesken aus dem Sommersemester 2014 befassen. Hauptbestandteil des Kapitels 3.1 ist die Definition der Spezies, um die sich das gesamte dritte Kapitel dreht. In Kapitel 3.2 geht es um die Äquivalenzrelationen Isomoprhie und Kontakt der Ordnung auf der Menge der Spezies.

1 Spezies und die zugehörigen Reihen

In diesem Abschnitt soll der Begriff der Spezies eingeführt werden. Dazu ist es notwendig zunächst Kategorien und Funktoren zu definieren. Eine Kategorie ist eine Klasse von Objekten und für jedes Paar von Objekten wird eine Menge von Morphismen definiert, so dass die Komposition definiert ist, für diese das Assoziativgesetz gilt und eine Identitätsabbildung auf jedem Objekt existiert. Für eine formale Definition siehe *Plesken, S.55 Definition 3.1.* Der Grund für die Einführung des Kategorie Begriffs ist, dass sie Funktoren abstrakt definierbar machen. Ein Funktor ist eine Abbildung zwischen zwei Kategorien L und K, welche jedem Objekt aus L ein Objekt aus K zuordnet und jeden Morphismus zwischen zwei Objekten in L auf einen Morphismus zwischen den Bildern der jeweiligen Objekte schickt. Auch hier wird auf die formale Definition aus *Plesken, S.57 Definition 3.3* verwiesen.

Übung 1.1 Definiere mindestens 3 Funktoren von $\mathcal{E}_{\mathrm{G}}$ nach $\mathcal{E}$, wo G eine endliche Gruppe ist. Dabei ist $\mathcal{E}_{\mathrm{G}}$ die Kategorie endlicher G-Mengen mit der Morphismenmenge eines Paares (X,Y) aus $\mathcal{E}_{\mathrm{G}}$ der G-äquivarianten Abbildungen von X nach Y und $\mathcal{E}$ ist die Kategorie der endlichen Mengen mit den Abbildungen als Morphismen für je zwei Objekte aus $\mathcal{E}$.

Es seien dazu X,Y zwei beliebige endliche G-Mengen und f: X $\rightarrow$ Y eine beliebige G-äquivariante Abbildung, also ein Morphismus von X nach Y.

(i) Sei F: $\mathcal{E}_{\mathrm{G}} \rightarrow \mathcal{E}$ definiert durch

1.) $F(M) = M \; \forall \; M \in \mathcal{E}_{\mathrm{G}}$
2.) $F(f) : X \rightarrow Y, \; x \mapsto f(x)$

F(M) = M ist als endliche G-Menge sicherlich endlich und die Abbildung mor(X,Y) $\rightarrow$ mor(F(X),F(Y)), f $\mapsto$ F(f) ist mit der Komposition verträglich, da dies bereits für G-äquivariante Abbildungen gilt. Also ist F als Funktor von $\mathcal{E}_{\mathrm{G}}$ nach $\mathcal{E}$ wohldefiniert.

(ii) Sei F: $\mathcal{E}_{\mathrm{G}} \rightarrow \mathcal{E}$ definiert durch

1.) $F(M) = {}_{\mathrm{G}}\backslash M = \{Gm \mid m \in M\}$
2.) $F(f) : {}_{\mathrm{G}}\backslash X \rightarrow {}_{\mathrm{G}}\backslash Y,\ Gm \mapsto f(Gm) = Gf(m)$

${}_{\mathrm{G}}\backslash$M ist für jede endliche G-Menge M endlich, da ${}_{\mathrm{G}}\backslash$M aufgrund der Definition höchstens |M| - viele Elemente enthalten kann. Es bleibt also die Verträglichkeit der Komposition von mor(X,Y)$\rightarrow$ mor(F(X),F(Y)), f $\mapsto$ F(f) zu zeigen:
a) Es gilt $(F(id_{\mathrm{M}}))(Gm) = G(id_{\mathrm{M}}(m)) = Gm = id_{\mathrm{F(M)}}(Gm)$ für alle m aus einer endlichen G-Menge M. Somit ist die Bedingung $F(id_{\mathrm{M}}) = id_{\mathrm{F(M)}}$ erfüllt.
b)Sei nun zusätzlich Z $\in \mathcal{E}_{\mathrm{G}}$ und g $\in$ mor(Y,Z), also eine G-äquivariante Abbildung von Y nach Z. Nun gilt

$$\begin{aligned}(F(g \circ f))(Gx) &= g(f(Gx)) = (F(g))(f(Gx)) \\ &= (F(f) \circ F(g))(Gx) \qquad\qquad \forall\, x \in X\end{aligned}$$

Somit ist $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ und F ist ein wohldefinierter Funktor.

(iii) Sei F: $\mathcal{E}_{\mathrm{G}} \rightarrow \mathcal{E}$ definiert durch

1.) $F(M) = U_{\mathrm{M}} := \{Stab_{\mathrm{G}}(m) \mid m \in M\}\ \forall\ M \in \mathcal{E}_{\mathrm{G}}$
2.) $F(f) : U_{\mathrm{X}} \rightarrow U_{\mathrm{Y}},\ Stab_{\mathrm{G}}(x) \mapsto Stab_{\mathrm{G}}(f(x))$

Für jede endliche G-Menge M ist U_{M} endlich, da U_{M} aufgrund der Definiton höchstens |M| - viele Elemente enthalten kann. Wie in (ii) bleibt nur die Verträglichkeit der Komposition von mor(X,Y) $\rightarrow$ mor(F(X),F(Y)), f $\mapsto$ F(f) zu zeigen:
a) Fur jedes m aus einer endlichen G-Menge M ist $(F(id_{\mathrm{M}}))(Stab_{\mathrm{G}}(m)) = Stab_{\mathrm{G}}(id_{\mathrm{M}}(m)) = Stab_{\mathrm{G}}(m) = id_{\mathrm{F(M)}}(Stab_{\mathrm{G}}(m))$. Demnach ist die Bedingung $F(id_{\mathrm{M}}) = id_{\mathrm{F(M)}}$ gezeigt.
b) Sei nun Z eine weitere endliche G-Menge und g eine weitere G-äquivariante Abbildung von Y nach Z. Dann gilt

$$\begin{aligned}F(g \circ f))(Stab_{\mathrm{G}}(x)) &= Stab_{\mathrm{G}}((g \circ f)(x)) = Stab_{\mathrm{G}}(g(f(x))) \\ &= (F(g))(Stab_{\mathrm{G}}(f(x))) \\ &= (F(g) \circ F(f))(Stab_{\mathrm{G}}(x)) \qquad\qquad \forall\, x \in X\end{aligned}$$

Hiermit ist $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ gezeigt und F ist als Funktor wohldefiniert.

Der Grund für die Einführung des Funktorenbegriffs ist die daraus resultierende abstrakte Definition der Spezies. Spezies sind Funktoren von $\mathcal{B}$, der Kategorie endlicher Mengen mit den bijektiven Abbildungen als Morphismen, nach $\mathcal{E}$, der Kategorie endlicher Mengen mit allen Abbildungen als Morphismen. Ein Beispiel einer Spezies ist der Funktor binärer Baum $\boxed{\mathrm{bB}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$, um den es auch in der nächsten Übung gehen soll. Er ist auf endlichen Mengen wie folgt definiert:

$\boxed{\text{bB}}(\emptyset) = \{\emptyset\}$und für eine nichtleere Menge M sei

$\boxed{\text{bB}}(M) := \{(l, x, r) \mid x \in U, S \subseteq M \setminus \{x\}, l \in \boxed{\text{bB}}(S), r \in \boxed{\text{bB}}(M \setminus (\{x\} \cup S)\}$

Dabei ist so ein 3-Tupel (l,x,r) $\in \boxed{\text{bB}}$(M) folgendermaßen zu interpretieren: Das x in dem Tupel gibt die Wurzel des binären Baums (l,x,r) an, l ist der an der linken Seite anhängende Teilbaum, r der Teilbaum auf der rechten Seite, wie in Abbildung 1:

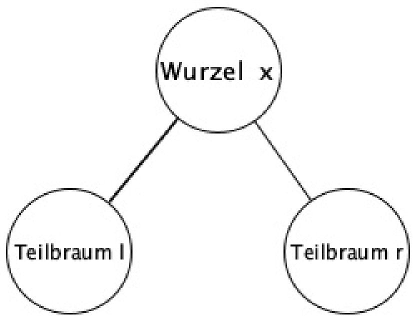

Abbildung 1: Aufbau des Baumes (l,x,r)

Übung 1.2 Man vervollständige die Definiton von $\boxed{\text{bB}}$, indem man die Anwendung auf Morphismen angibt. Man schreibe ein Programm, welches diesen Funktor darstellt. Wie viele binäre Bäume gibt es auf 4 Punkten? Wie viele Isomorphietypen?

Seien zunächst X und Y zwei endliche Mengen und $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, also ein Morphismus von X nach Y in $\mathcal{B}$. An dieser Stelle sei angemerkt, dass $|X| = |Y|$ gelten muss, da ansonsten kein solches f existiert. Dann wird der Funktor $\boxed{\text{bB}}$ auf f wie folgt angewendet:

$\boxed{\text{bB}}(f) = id_{\{\emptyset\}}$ falls X = $\emptyset$ = Y und

$\boxed{\text{bB}}(f) : \boxed{\text{bB}}(X) \to \boxed{\text{bB}}(Y),\ (l, x, r) \mapsto ((\boxed{\text{bB}}(f|_S))(l), f(x), (\boxed{\text{bB}}(f|_U))(r))$

Dabei ist S die Teilmenge von $X \setminus \{x\}$ aus der Definition des binären Baums (vgl. *Plesken S.58 Bsp.3.26*) und $U := X \setminus (\{x\} \cup S)$. Es wird nun die Verträglichkeit der Komposition nachgerechnet:
a) Es sei M eine endliche Menge mit $|M| =: n \in \mathbb{N}_0$. Der Beweis zu $\boxed{\text{bB}}(id_M) = id_{\boxed{\text{bB}}(M)}$ erfolgt induktiv:
Sei dazu zunächst n = 0, M ist also die leere Menge. Aus der Definition des Funktors binärer Baum folgt sofort $\boxed{\text{bB}}(id_M) = id_{\boxed{\text{bB}}(M)}$. Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung für jedes $m \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ gezeigt (IV). Nun gilt für einen

beliebigen Baum $(l,x,r) \in \boxed{\text{bB}}(M)$, mit $l \in \boxed{\text{bB}}(S)$, $S \subseteq M \setminus \{x\}$, und $r \in \boxed{\text{bB}}(U)$, $U := M \setminus (\{x\} \cup S)$, da $|S|, |U| < n$:

$$\begin{aligned}(\boxed{\text{bB}}(id_M))(l,x,r) &= ((\boxed{\text{bB}}(id_M|_S))(l), id_M(x), (\boxed{\text{bB}}(id_M|_U))(r)) \\ &= ((\boxed{\text{bB}}(id_S))(l), x, (\boxed{\text{bB}}(id_U))(r)) \\ &\overset{(IV)}{=} (id_{\boxed{\text{bB}}(S)}(l), x, id_{\boxed{\text{bB}}(U)}(r)) \\ &= (l,x,r)\end{aligned}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion ist somit die Behauptung $\boxed{\text{bB}}(id_M) = id_{\boxed{\text{bB}}(M)}$ für jede endliche Menge M gezeigt.
b) Es seien nun X,Y,Z endliche Mengen mit $|X| = |Y| = |Z| =: n \in \mathbb{N}_0$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit. Weiter seien $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ bijektive Abbildungen. Auch hier wird $\boxed{\text{bB}}(g \circ f) = \boxed{\text{bB}}(g) \circ \boxed{\text{bB}}(f)$ durch Induktion nachgewiesen. Ist $n = 0$, so gilt $X = Y = Z = \emptyset$. Nach Definition gilt, da $g \circ f : \emptyset \to \emptyset$ bijektiv ist, $\boxed{\text{bB}}(g \circ f) = id_{\{\emptyset\}} = id_{\{\emptyset\}} \circ id_{\{\emptyset\}} = \boxed{\text{bB}}(g) \circ \boxed{\text{bB}}(f)$. Sei nun $n \geq 1$ und die Behauptung für jedes $m \in \{0,1,...,n-1\}$ gezeigt (IV). Dann gilt für einen beliebigen binären Baum $(l,x,r) \in \boxed{\text{bB}}(M)$, mit $l \in \boxed{\text{bB}}(S)$, $S \subseteq M \setminus \{x\}$, und $r \in \boxed{\text{bB}}(U)$, $U := M \setminus (\{x\} \cup S)$, da $|S|, |U| < n$:

$$\begin{aligned}&(\boxed{\text{bB}}(g \circ f))(l,x,r) \\ &= ((\boxed{\text{bB}}((g \circ f)|_S))(l), (g \circ f)(x), (\boxed{\text{bB}}((g \circ f)|_U)(r)) \\ &\overset{(IV)}{=} ((\boxed{\text{bB}}(g|_{f(S)}) \circ \boxed{\text{bB}}(f|_S))(l), (g \circ f)(x), (\boxed{\text{bB}}(g|_{f(U)} \circ \boxed{\text{bB}}(f|_U))(r)) \\ &= ((\boxed{\text{bB}}(g|_{f(S)}))((\boxed{\text{bB}}(f|_S))(l)), g(f(x)), (\boxed{\text{bB}}(g|_{f(U)}))((\boxed{\text{bB}}(f|_U))(r))) \\ &= (\boxed{\text{bB}}(g))((\boxed{\text{bB}}(f|_S))(l), f(x), (\boxed{\text{bB}}(f|_U))(r)) \\ &= (\boxed{\text{bB}}(g) \circ \boxed{\text{bB}}(f))(l,x,r)\end{aligned}$$

Somit sind die Anforderungen der Anwendung auf Morphismen erfüllt und $\boxed{\text{bB}}$ eine Spezies. Die Implementierung der Spezies erfolgt mit Maple und ist in einerm externen Maple Dokument zu finden.
Als nächstes sollen die Anzahl und die Anzahl der Isomorphietypen binärer Bäume auf 4 Punkten bestimmt werden. Als Isomorphietypen der binären Bäume auf n Punkten werden dabei die Bahnen der Operation der S_n auf $\boxed{\text{bB}}$ bezeichnet, wobei die S_n durch anwenden auf die Knoten eines Baumes operiert. Nach dieser Definition ist sofort klar, dass jede Bahn genau n! Bäume enthält. Es macht also Sinn, zuerst die Anzahl der Isomorphietypen zu bestimmen. Dazu wird zunächst folgende Behauptung gezeigt:
Die Anzahl der Isomorphietypen binärer Bäume auf n Punkten A_n lässt sich bestimmen durch die Form:

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{n-(k+1)} \tag{1}$$

Beweis: Sei $(l,x,r) \in \boxed{\text{bB}}(\underline{n})$. Ohne Einschränkung lässt sich $x = n$ annehmen. Es existiert also $S \subseteq \underline{n} \setminus \{n\} = \underline{n-1}$, so dass $l \in \boxed{\text{bB}}(S)$ gilt. Es sei nun

$|S| = k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ fest. Dann gilt
$|U| = n - (1 + |S|) = n - (k+1)$. Da man nun für den Teilbaum $l \in \boxed{\text{bB}}(S)$ A_k-viele und für $r \in \boxed{\text{bB}}(U)$ $A_{n-(k+1)}$-viele verschieden Möglichkeiten hat, ergeben sich $A_k A_{n-(k+1)}$-viele mögliche Isomorphietypen binärer Bäume auf n Punkten für $|S| = k$. Nun muss nur noch über alle $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ aufsummiert werden. Daraus ergibt sich die Formel (1). □

Mit dieser Formel lässt sich nun die Anzahl der Isomorphietypen binärer Bäume auf 4 Punkten A_4 einfach berechnen:
Das $A_0 = 1 = A_1$ gilt ist klar. Damit folgt:

$$A_2 \overset{(1)}{=} A_0A_1 + A_1A_0 = 1 + 1 = 2$$
$$A_3 \overset{(1)}{=} A_0A_2 + A_1A_1 + A_2A_0 = 2 + 1 + 2 = 5$$
$$A_4 \overset{(1)}{=} A_0A_3 + A_1A_2 + A_2A_1 + A_3A_0 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$

Da jeweils 4! binäre Bäume aus $\boxed{\text{bB}}(\underline{4})$ denselben Isomorphietyp haben, existieren $4! \cdot A_4 = 24 \cdot 14 = 336$ binäre Bäume auf 4 Punkten.

Nachdem nun Spezies eingeführt sind, lassen sich die erzeugende Funktion $F(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ und die typ-erzeugende Funktion $\tilde{F}(x) \in \mathbb{Q}[[x]]$ einer Spezies F definieren. $F(x)$ zählt die nummerierten F-Strukturen und $\tilde{F}(x)$ zählt die Isomorphietypen von F, also die Bahnen von F($\underline{n}$) unter der Operation der symmetrischen Gruppe S_n für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Für eine genauere Definition, siehe *Plesken, S.59 Definition 3.8.*

Übung 1.3 Man definiere die Spezies Graph, $\boxed{\text{sG}}$, also schlichter Graph im Sinne von Teilmenge von Pot$_2$(M) und bestimme die ergende Funktion $\boxed{\text{sG}}(x)$ sowie die ersten fünf Entwicklungsglieder der typenerzeugenden Funktion $\widetilde{\boxed{\text{sG}}}(x)$.

Die Spezies $\boxed{\text{sG}} : \mathcal{B} \to \mathcal{E}$ ist wie folgt definiert:
$\boxed{\text{sG}}(M) = Pot(Pot_2(M))\ \forall\ M \in \mathcal{B}$. Sind X und Y zwei endliche Mengen und $f : X \to Y$ eine bijektive Abbildung, so gilt

$$\boxed{\text{sG}}(f) : Pot(Pot_2(X)) \to Pot(Pot_2(Y)),\ S \mapsto f(S)$$

Da Potenzmengen endlicher Mengen endlich sind und die Komposition sicherlich mit der Anwendung bijektiver Abblidungen auf endlichen Mengen verträglich ist, ist $\boxed{\text{sG}}$ eine Spezies.
Im Allgemeinen gilt $|Pot(M)| = 2^{|M|}$ sowie $|Pot_2(M)| = \binom{|M|}{2}$ (*vgl. Plesken S.17 Beispiel 1.12*). Daraus folgt $|Pot(Pot_2(\underline{n}))| = 2^{\binom{n}{2}}\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ und somit gilt $\boxed{\text{sG}}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{\binom{n}{2}} \dfrac{x^n}{n!}$.

Um die ersten fünf Entwicklungsglieder von $\widetilde{\boxed{\text{sG}}}(x)$ zu bestimmen wird die Anzahl der Bahnen der Operation der S_n auf $\boxed{\text{sG}}(\underline{n}) = Pot(Pot_2(\underline{n}))$ für $n \in \{0, 1, ..., 4\}$ untersucht.
Für $n \in \{0, 1\}$ gilt $Pot(Pot_2(\underline{n})) = Pot(\emptyset) = \{\emptyset\}$ und somit folgt sofort $|Pot(Pot_2(\underline{n}))/S_n| = 1$. Ist $n = 2$ so gilt $Pot(Pot_2(\underline{2})) = \underline{2}$, also gilt auch

hier $|\,\boxed{\text{sG}}(\underline{2})/S_2| = 1$. Um die Anzahl der Isomorphietypen für $n \in \{3,4\}$ zu bestimmen wird wie in im Skript *Plesken, S.23/25 Beispiel 2.2 und 2.5* vorgegangen. $\{0,1\}^{Pot_2(\underline{n})}$ wird mit $Pot(Pot_2(\underline{n}))$ als G-Menge identifiziert und mit Burnsideschem Lemma(*Plesken S.24 Satz 2.3*) gilt $|Pot(Pot_2(\underline{n}))/S_n| = |\{0,1\}^{Pot_2(\underline{n})}/S_n| = \frac{1}{|S_n|}\sum_{\pi\in S_n} |Fix(\pi)|$. Nun bestimmt die Zykelstruktur von $\pi \in S_n$ auf $\underline{n}$ die Fixpunktanzahlen auf $\{0,1\}^{Pot_2(\underline{n})}$ zu $2^{a(\pi)}$, wo $a(\pi)$ die Anzahl der Bahnen von $\langle\pi\rangle$ auf $Pot_2(\underline{n})$ ist. Es wird nun zu jedem Zykeltyp auf $\underline{n}$ der zugehörige Zykeltyp auf $\binom{n}{2}$ und die Klassenlänge bestimmt.
Für $n = 3$ ergibt sich

Zykeltyp auf $\underline{3}$	1^3	$2 \cdot 1$	3
Zykeltyp auf $\binom{3}{2}$	1^3	$2 \cdot 1$	3
Klassenlänge	1	$\binom{3}{2} = 3$	$2 \cdot \binom{3}{3} = 2$

Somit ist die Anzahl der Bahnen von S_3 auf $Pot(Pot_2(\underline{3}))$, also der unnumerierten Graphen auf 3 Punkten, gegeben durch

$$|Pot(Pot_2(\underline{3}))/S_3| = \frac{1}{|S_3|}(1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2) = \frac{8+12+4}{6} = 4$$

Für $n = 4$ gilt

Zykeltyp auf $\underline{4}$	1^4	$2 \cdot 1^2$	2^2	$3 \cdot 1$	4
Zykeltyp auf $\binom{4}{2}$	1^6	$2^2 \cdot 1^2$	$2^2 \cdot 1^2$	3^2	$4 \cdot 2$
Klassenlänge	1	$\binom{4}{2} = 6$	3	$2 \cdot \binom{4}{3} = 8$	$3! = 6$

Die Anzahl der unnumerierten Graphne auf 4 Punkten ist demnach

$$|Pot(Pot_2(\underline{4}))/S_4|$$
$$= \frac{1}{|S_4|}(1 \cdot 2^6 + 6 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^4 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2^2) = \frac{64+96+48+32+24}{24} = 11$$

Somit sind die ersten 5 Entwicklungsglieder der typenerzeugenden Funktion $\widetilde{\boxed{\text{sG}}}(x)$ bestimmt.

2 Äquivalenzen

In diesem Abschnitt werden die Äquivalenzrelationen Isomorphie und Kontakt der Ordnung auf der Menge der Spezies definiert und der Begriff des Grenzwertes einer Folge von Spezies eingeführt. Es sei an dieser Stelle auf die Definitionen aus dem Skript *Plesken S.65-67 Definition 3.17, 3.19 und 3.22 verwiesen.* Zum besseren Verständnis des Kontakes der Ordnung und des Grenzwerts dient die letzte Übungsaufgabe.

Übung 2.1 Beweis des *Beispiels 3.23*: Sei F eine Spezies. Dann gilt

$$F = \lim_{n \to \infty} F_{\leq n}$$

Beweis: Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\forall\, n \geq N$ und eine beliebige endliche Menge M:

$$(F_{\leq n})_{\leq N}(M) = \begin{cases} F_{\leq n}(M) \; falls \; |M| \leq N \\ \emptyset \qquad\qquad falls \; |M| > N \end{cases}$$

Da n kleiner oder gleich N ist, gilt nach Definition des Kontakts der Ordnung:

$$\begin{aligned} & F_{\leq n}(M) = F(M) \; f\ddot{u}r \; alle \; M \; mit \; |M| \leq N \; und \; n \geq N \\ \Rightarrow\; & (F_{\leq n})_{\leq N}(M) = \begin{cases} F(M) \; falls \; |M| \leq N \\ \emptyset \qquad\; falls \; |M| > N \end{cases} \qquad \forall\, n \geq N \\ & = F_{\leq N}(M) \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} & \forall\, N \in \mathbb{N} : F_{\leq n} =_N F \; \forall\, n \geq N \\ \Leftrightarrow\; & F = \lim_{n \to \infty} F_{\leq n} \end{aligned}$$

$\square$