Ausarbeitung zum Seminar Algebraische Kombinatorik - Punktieren von Spezies und Cartesische Produkte

Braun Tobias,
Matrikelnummer: 378336
SS 2019

16. Juni 2019

0 Einleitung

Die bisherigen Ausarbeitungen im Rahmen dieses Seminars haben sich vor allem mit der Einführung des Begriffs der Kategorien und der Spezies beschäftigt, mit den Verknüpfungen von Spezies, der damit verbundenen algebraischen Struktur auf der Menge der Spezies. Zudem wurden einige Möglichkeiten zur Konstruktion weiterer Spezies vorgestellt, abseits von den "üblichen" Verknüpfungen wie Addition und Multiplikation.
Thematisch wird der Inhalt dieser Ausarbeitung an derartige Konstruktionen anknüpfen, indem wir punktierte Spezies und cartesische Produkte von Spezies und die dazugehörigen erzeugenden Reihen vorstellen und die offengebliebenen Übungsaufgaben zu diesem Thema im Skript abarbeiten. In diesem Sinne wollen wir uns auf die wesentlichen Definitionen und Sätze aus dem vorliegenden Skript beschränken, die wie zur Bearbeitung von diesen benötigen.

1 Komposition von Spezies

Wie der Titel dieses Kapitels bereits nahelegt, wollen wir uns zu Beginn dieser Ausarbeitung kurz mit der Komposition von Spezies beschäftigen, denn wir werden später einige Aussagen über die Spezies $\boxed{sG}$ benötigen, welche sich als Komposition bereits bekannter Spezies konstruieren lässt.
Dazu nutzen wir die folgende

1.1 Definition.

Seien F, G Spezies, dann ist die **Komposition der Spezies** *F, G auf einer endlichen Menge M gegeben durch*

$$F \square G\,(M) := F\left(G\,(M)\right).$$

Entsprechend definiert man für M, $N \in \mathcal{B}$ und jede Bijektion $f : M \to N$

$$F \square G\,(f) : F\left(G\,(M)\right) \to F\left(G\,(N)\right),\; a \mapsto F\left(G\,(f)\right)(a).$$

Dass es sich bei $F \square G$ wiederum um eine Spezies handelt ergibt sich unter Verwendung der obigen Definition aus den Funktoreigenschaften von F und G und der offensichtlichen Tatsache, dass $\mathcal{B}$ in $\mathcal{E}$ enthalten ist.

Der Vollständigkeit halber geben wir in der folgenden Bemerkung die erzeugenden Reihen an, obwohl wir nur mit der erzeugenden Funktion arbeiten wollen.

1.2 Bemerkung.

Seien F, G Spezies von Strukturen und $g_n := |G\,(\underline{n})\,|$. Dann gilt für die erzeugenden Reihen der funktoriellen Komposition $F \square G$:

1) $(F \square G)\,(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |F\left(\underline{g_n}\right)| \dfrac{x^n}{n!}$

2) $\left(\widetilde{F \square G}\right)(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |F\left(\underline{g_n}\right) \backslash G\,(S_n)\,| x^n$

3) $Z_{F \square G}\,(x_1, x_2, \ldots) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} \sum\limits_{\substack{\sigma = G(\pi),\\ \pi \in S_n}} |\mathrm{Fix}\left(F\,(\sigma)\right)| \prod\limits_{i \in \underline{n}} (x_i)^{a_i(\pi)}.$

<u>*Beweis:*</u>
Die dritte Identität ist eine triviale Umformulierung der Definition der Zykelindexreihe für $F \square G$. Die beiden anderen Identitäten ergeben sich aus (3.16) im Skript.

q.e.d.

Wir kommen nun zum bereits angekündigten

1.3 Beispiel.

Wir wollen die Anzahl einfacher Graphen auf n Punkten bestimmen, sprich $\boxed{sG}(x)$.
Zur Erinnerung: Für eine endliche Menge M ist $\boxed{sG}(M) := \{X \subset \mathrm{Pot}_2(M)\}$.
Man erkennt nun relativ leicht, dass mit dieser Definition schon $\boxed{sG}(M) = \mathrm{Pot}\left(\mathrm{Pot}_2(M)\right)$ gilt, was nach (1.1) bereits mit $\boxed{sG} = \boxed{Pm} \square \boxed{Pm^2}$ gleichbedeutend ist. Die erzeugenden Funktionen von $\boxed{Pm}$ und $\boxed{Pm^2}$ kennen wir bereits:
Es gilt $\boxed{Pm}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$ und $\boxed{Pm^2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \frac{x^n}{n!}$.
Aus (1.2) erhält man somit $\boxed{sG}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left|\boxed{Pm}\left(\underline{\tbinom{n}{2}}\right)\right| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\binom{n}{2}} \frac{x^n}{n!}$.
Folglich gibt es also genau $2^{\binom{n}{2}}$ einfache Graphen auf n Punkten. Dies lässt sich natürlich auch einfacher über die Definition der obigen Spezies nachweisen.

2 Punktierte Spezies

In diesem Abschnitt wollen wir das punktieren von Spezies behandeln. Die zugehörige Definition ist die folgende:

2.1 Definition.

Sei F eine Spezies von Strukturen. Dann heißt die Spezies $F^\bullet$ die Spezies der **punktierten F-Strukturen** *und ist auf endlichen Mengen M definiert durch*

$$F^\bullet(M) := F(M) \times M.$$

Für jeden Morphismus $f\colon M \to N$ definiert man entsprechend

$$F^\bullet(f) : F(M) \times M \to F(N) \times N,\ (x, m) \mapsto \left(F(f)(x), f(m)\right).$$

Allgemein setzt man für $n \in \mathbb{N}_0$

$$F^{\bullet n} := \begin{cases} F^{\bullet(n-1)} & n \in \mathbb{N} \\ F & n = 0 \end{cases}$$

und spricht von der **Spezies der n-fach punktierten F-Strukturen**.

Die folgende Bemerkung ist das Resultat einer Übungsaufgabe des zugrunde liegenden Skriptes:

2.2 Bemerkung

Sei F eine Spezies von Strukturen, dann gilt:

1) $F^\bullet = \boxed{eM_1} \cdot F'$

2) $F^{\bullet n} = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \cdot \boxed{eM_1}^k \cdot F^{(k)}$, wobei $S(n,k) := \left|\{X \subset \mathrm{Pot}(\underline{n}) \mid X \in \mathrm{Par}(\underline{n}), |X| = k\}\right|$ die *Stirling'schen Zahlen 2. Ordnung* bezeichnen.

Beweis: Offensichtlich folgt 1) aus 2).
Sei $M \in \mathcal{B}$. Es bezeichne $M^n = \underbrace{M \times \ldots \times M}_{n-\text{mal}}$.

Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei $\widetilde{M^k} := \{(m_1, \ldots, m_k) \in M^k \mid m_i \neq m_j, \text{ falls } i \neq j\}$ und weiter

$$g \colon M^n \to \biguplus_{k=0}^{n} \widetilde{M^k},\ (m_1, \ldots, m_n) \mapsto (\widetilde{m_1}, \ldots, \widetilde{m_k}),$$

falls $\big|\{m_1, \ldots, m_n\}\big| = k$, wobei $\widetilde{m_i}$ der i-te "neue" Eintrag in $(m_1, \ldots, m_n)$ ist. Offensichtlich ist g damit surjektiv. Dann ist für jedes $\widetilde{m} \in \widetilde{M^k}$ die Abbildung

$$\begin{gathered} f_{\widetilde{m}} : \{(T_1, \ldots, T_k \mid \biguplus_{i=1}^{k} T_i = \underline{n},\ \min(T_1) < \ldots < \min(T_k)\} \to \\ g^{-1}(\widetilde{m}),\ (T_1, \ldots, T_k) \mapsto m,\ (m)_i = \widetilde{m_j}, \text{falls } i \in T_j, \end{gathered}$$

wohldefiniert und bijektiv. Die Wohldefiniertheit ergibt sich hierbei aus der Ordnung auf $Y_k := \{(T_1, \ldots, T_k \mid \biguplus_{i=1}^{k} T_i = \underline{n},\ \min(T_1) < \ldots < \min(T_k)\}$, die Bijektivität aus der Tatsache, dass wir dem i-tem Eintrag aus $m \in g^{-1}(\widetilde{m})$ die Menge aller Indices and denen dieser in m auftritt, zuordnen.
Da wir nur eine spezielle Ordnung auf den Elementen der Partionen von $\underline{n}$ mit genau k Blöcken gewählt haben, gilt $|Y_k| = S(n, k)$. Dies liefert uns die Gleichheit

$$\begin{aligned} |M^n| &= \sum_{k=0}^{n} \big|\{m \in M^n \mid m \text{ hat genau } k \text{ verschiedene Einträge}\}\big| \\ &= \sum_{k=0}^{n} \big| \biguplus_{m \in \widetilde{M^k}} g^{-1}(m) \big| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m \in \widetilde{M^k}} S(n, k). \end{aligned}$$

Damit folgt für jedes $M \in \mathcal{B}$

$$\begin{aligned} F^{\bullet n} &= M^n \times F(M) \\ &= \biguplus_{(m_1, \ldots, m_n) \in M^n} \{m_1\} \times \ldots \times \{m_n\} \times F((M - \{m_1, \ldots, m_n\}) \uplus \{m_1, \ldots, m_n\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \biguplus_{j=1}^{S(n,k)} \{j\} \times \biguplus_{m \in \widetilde{M^k}} \{m_1\} \times \ldots \times \{m_k\} \times F^{(k)}(M - \{m_1, \ldots, m_k\}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n, k) \cdot \biguplus_{\substack{\pi \in \mathrm{Par}(M), \\ |\pi| = k+1}} \boxed{eM_1}(\pi_1) \times \ldots \times \boxed{eM_1}(\pi_k) \times F^{(k)}(\pi_{k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} S(n, k) \cdot \boxed{eM_1}^k \cdot F^{(k)}(M), \end{aligned}$$

also die Behauptung.

q.e.d.

Wir wollen nun das Beispiel (3.60) aus dem Skript abschließen, indem wir die Zykelindexreihen der Spezies $\boxed{Wi} := \boxed{aB^{\bullet\bullet}}$, also Wirbeltiere mit jener von $\boxed{eF_+}$ vergleichen. Letztere ist uns bereits bekannt:

$$Z_{\boxed{eF_+}}(x_1,x_2,\ldots) = Z_{\boxed{eF}}(x_1,x_2,\ldots) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - Z_{\boxed{wB}}(x_i,x_{2i},\ldots)}.$$

Um die andere Zykelindexreihe zu erhalten, verwenden wir die Identität

$$\boxed{Wi} = \boxed{tO_+}\left(\boxed{wB}\right).$$

Also gilt nach 3.43 im Skript für die Reihe die wir bestimmen wollen

$$Z_{\boxed{Wi}}(x_1,x_2,\ldots) = Z_{\boxed{tO_+}}\left(Z_{\boxed{wB}}(x_1,x_2,\ldots), Z_{\boxed{wB}}(x_2,x_4,\ldots),\ldots\right).$$

Somit erhalten wir wegen $Z_{\boxed{tO_+}}(x_1,x_2,\ldots) = Z_{\boxed{tO}}(x_1,x_2,\ldots)$ unter Verwendung der bekannten Identität für die Zykelindexreihe von $\boxed{tO}$ schließlich

$$Z_{\boxed{Wi}}(x_1,x_2,\ldots) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(Z_{\boxed{wB}}(x_1,x_2,\ldots)\right)^k = \frac{1}{1 - Z_{\boxed{wB}}(x_1,x_2,\ldots)}.$$

An diesem Ergebnis sieht man den deutlichen Unterschied zwischen Isomorphie und Gleichmächtigkeit von Spezies, aber dennoch auch den Wert von Letzterer; wir konnten die Bestimmung von $\boxed{aB}(x)$ auf das Punktieren von Spezies und dem Verwenden bereits bekannter Identitäten für andere Spezies, konkret $\boxed{eF_+} = \boxed{S_+}\left(\boxed{wB}\right)$ zurückführen, was offensichtlich einfacher ist, als die direkte Bestimmung von $\boxed{aB}(x)$.

Im Folgenden wollen wir als Anwendung des obigen Satzes die Identität (3.62) 3.) aus dem Skript verifizieren:

2.3 Korrolar.

Für die durchschnittliche Anzahl an Zusammenhangskomponenten $\kappa_n\left(\boxed{sG}\right)$ eines schlichten Graphen gilt:

$$\kappa_n\left(\boxed{sG}\right) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{\binom{n-i}{2}} |\boxed{zG}(\underline{i})|$$

<u>*Beweis:*</u>
Zunächst gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ nach (1.3): $|\boxed{sG}(\underline{n})| = 2^{-\binom{n}{2}}$.
Wir bestimmen nun $|\boxed{zG}\cdot\boxed{sG}(\underline{n})|$. Unter Verwendung bekannter Aussagen über die Mächtigkeit disjunkter Vereinigungen und cartesischer Produkte von endlichen Mengen erhält man

$|\boxed{zG}\cdot\boxed{sG}(\underline{n})| = |\biguplus_{X\subset\underline{n}} \boxed{zG}(X) \times \boxed{sG}(\underline{n} - X)|$

$= \sum_{X\subset\underline{n}} |\boxed{zG}(X)| \cdot |\boxed{sG}(\underline{n} - X)| = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |\boxed{zG}(\underline{i})| \cdot |\boxed{sG}(\underline{n-i})|$, wobei die letzte Gleichheit aus Satz(3.7) im Skript folgt. Offenbar gilt $\boxed{zG}(\emptyset) = \emptyset$, sodass sich $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |\boxed{zG}(\underline{i})| \cdot |\boxed{sG}(\underline{n-i})| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} |\boxed{zG}(\underline{i})| \cdot |\boxed{sG}(\underline{n-i})|$ ergibt. Eine erneute Anwendung von (1.3) ergibt also insgesamt

$|\boxed{zG}\cdot\boxed{sG}(\underline{n})| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} 2^{\binom{n-i}{2}} |\boxed{zG}(\underline{i})|.$

3 Cartesische Produkte von Spezies

Nun kommen wir zu Cartesischen Produkten von Spezies. Wie zuvor betrachten wir zunächst die Konstruktion für die erzeugende Funktion und geben anschließend die Definition für Spezies an:

3.1 Definition.

i) *Für erzeugende Funktionen vom exponentiellen Typ ist das* Hadamard-*Produkt definiert durch*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} g_n \frac{x^n}{n!} := \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n \frac{x^n}{n!}$$

ii) *Entsprechend definiert man für Spezies* F, G und jede Menge $M \in \mathcal{B}$ *das* **Cartesische Produkt** *der Spezies* F *und* G als

$$(F \times G)(M) := F(M) \times G(M).$$

Auf der Ebene der Morphismen hat man für jede Bijektion f *zwischen endlichen Mengen* M, N

$$\begin{aligned}(F \times G)(f) \colon F(M) \times G(M) &\to F(N) \times G(N), \\ (a,b) &\mapsto \big(F(f)(a), G(f)(b)\big).\end{aligned}$$

Dass $F \times G$ nach obiger Definition wieder eine Spezies ist, ergibt sich sofort aus der Tatsache, dass F und G selbst Spezies sind, die eben komponentenweise auf Mengen und Morphismen angewandt werden.

Zur Beschreibung der erzeugenden Reihen benötigen wir noch die folgende

3.2 Definition.

Es sei $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \ldots)$ *und* $\mathbf{n} := (n_1, n_2, \ldots) \vdash \sum n_i$ *eine Partition.*
Seien zudem $f(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}$ *und* $g(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}$, *sowie* $\mathrm{aut}(\mathbf{n}) := \prod_i i^{n_i} n_i!$ *die Ordnung des Zentralisators einer Permutation vom Zykeltyp* $\mathbf{n}$. *Wir definieren*

$$f(\mathbf{x}) \times g(\mathbf{x}) := \sum_{\mathbf{n}} f_{\mathbf{n}} g_{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}.$$

Für den Beweis des nächsten Satzes benötigen wir noch das folgende

3.3 Lemma.

Sei G *eine endliche Gruppe und* M *eine endliche* G*-Menge. Sind* $g, h \in G$ *konjugiert, so gilt* $|\mathrm{Fix}(g)| = |\mathrm{Fix}(h)|$.

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert ein $l \in G$ mit $h = lgl^{-1}$. Dann ist die Abbildung $\alpha_l\colon \mathrm{Fix}\,(g) \to \mathrm{Fix}\,(h)$, $m \mapsto lm$ eine Bijektion mit Umkehrabbildung $\alpha_{l^{-1}}$, wobei lm im Sinne der Operation zu verstehen ist.
Wir zeigen noch die Wohldefiniertheit. Sei dazu $m \in \mathrm{Fix}\,(g)$, dann gilt $h \cdot \alpha_l\,(m) = hlm = \left(lgl^{-1}\right) lm = lgm = lm$, also $lm \in \mathrm{Fix}\,(h)$.

q.e.d.

Nun können wir die erzeugenden Reihen für cartesische Produkte von Spezies angeben:

3.4 Satz.

Seien F, G Spezies von Strukturen. Dann gilt für die erzeugenden Reihen des cartesischen Produktes $F \times G$:

1) $(F \times G)\,(x) = F\,(x) \times G\,(x)$

2) $\left(\widetilde{F \times G}\right)(x) = Z_{F \times G}\left(x, x^2, x^3, \ldots\right)$

3) $Z_{F \times G}\,(\boldsymbol{x}) = Z_F\,(\boldsymbol{x}) \times Z_G\,(\boldsymbol{x})$

Beweis:

1) Die Verwendung des Hadamard-Produktes zusammen mit bekannten Aussagen über die Mächtigkeit von cartesischen Produkten endlicher Mengen liefern uns

$$(F \times G)\,(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\,(F \times G)\,(\underline{n})\,| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} |F\,(\underline{n}) \times G\,(\underline{n})\,| \frac{x^n}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} |F\,(\underline{n})\,| \cdot |G\,(\underline{n})\,| \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} |F\,(\underline{n})\,| \frac{x^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} |G\,(\underline{n})\,| \frac{x^n}{n!}$$
$$= F\,(x) \times G\,(x).$$

2) Das ist die Aussage von Satz (3.16) aus dem Skript, allerdings schadet es nicht das Argument hier anzuführen. Aus der Definition erhalten wir zunächst

$$\left(\widetilde{F \times G}\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\,(F \times G)\,(\underline{n})\,\backslash S_n|\, x^n.$$

Anwenden des Lemmas von Burnside liefert nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\,(F \times G)\,(\underline{n})\,\backslash S_n|\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} |\mathrm{Fix}\left((F \times G)\,(\pi)\right)|\, x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} |\mathrm{Fix}\left((F \times G)\,(\pi)\right)|\, x^{\sum_{i \in \underline{n}} i a_i(\pi)}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} |\mathrm{Fix}\left((F \times G)\,(\pi)\right)| \prod_{i \in \underline{n}} \left(x^i\right)^{a_i(\pi)}$$

$= Z_{F\times G}\left(x, x^2, x^3, \ldots\right)$.

Hierbei haben wir für eine Permutation $\pi \in S_n$ die Identität $\sum_{i\in \underline{n}} ia_i(\pi) = n$ verwendet, wobei $a_i(\pi)$ die Anzahl der i-Zykel von π angibt.

3) Wir vereinbaren zunächst einige Abkürzungen:

   (i) Für eine Permutation $\pi \in S_n$ sei $\mathbf{n}_\pi$ der Zykeltyp von π

   (ii) Für eine Partition $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots)$ sei $\delta(\mathbf{n}) := \sum_i in_i = \sum_i ia_i(\pi)$, wobei die letzte Gleichheit für $\pi \in S_{\delta(\mathbf{n})}$ mit $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{n}$ gilt.

   Die Idee des Beweises besteht nun darin, die Summationsreihenfolge der Permutationen nicht durch die entsprechende symmetrische Gruppe, sondern durch die möglichen Partitionen, d.h. die Zykeltypen der jeweiligen Permutationen zu ordnen (man vergleiche hierzu (3.14) im Skript). Dies ist erlaubt, da für $\pi \in S_n$ stets $\delta(\mathbf{n}_\pi) = n$ gilt, also man eindeutig die zugehörige symmetrische Gruppe rekonstruieren kann, sodass sich folgende Rechnung ergibt:

$$Z_{F\times G}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\pi\in S_n} \left|\mathrm{Fix}\left((F\times G)(\pi)\right)\right| \prod_{i\in\underline{n}} (x_i)^{a_i(\pi)}$$

$$= \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{\delta(\mathbf{n})!} \sum_{\substack{\pi\in S_{\delta(\mathbf{n})},\\ \mathbf{n}_\pi = \mathbf{n}}} \left|\mathrm{Fix}\left((F\times G)(\pi)\right)\right| \mathbf{x}^{\mathbf{n}}$$

$$\overset{(3.3)}{=} \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{\delta(\mathbf{n})!} \left|{}^{S_{\delta(\mathbf{n})}}\pi\right| \cdot \left|\mathrm{Fix}\left((F\times G)(\pi)\right)\right| \mathbf{x}^{\mathbf{n}},$$ wobei ${}^{S_{\delta(\mathbf{n})}}\pi$ die Konjugiertenklasse von $\pi \in S_{\delta(\mathbf{n})}$ bezeichne, für ein festes π mit $\mathbf{n}_\pi = \mathbf{n}$.

   Nach der Bahnformel gilt nun:

$$\left|{}^{S_{\delta(\mathbf{n})}}\pi\right| = \frac{\left|S_{\delta(\mathbf{n})}\right|}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})} = \frac{\delta(\mathbf{n})!}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}.$$

   Setzt man diesen Ausdruck in die obige Rechnung ein, so ergibt sich

$$\sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{\delta(\mathbf{n})!} \left|{}^{S_{\delta(\mathbf{n})}}\pi\right| \cdot \left|\mathrm{Fix}\left((F\times G)(\pi)\right)\right| \mathbf{x}^{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}} \left|\mathrm{Fix}\left((F\times G)(\pi)\right)\right| \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}$$

$$\overset{(3.1)\ \mathrm{ii)}}{=} \sum_{\mathbf{n}} \left|\mathrm{Fix}\left(F(\pi)\right)\right| \cdot \left|\mathrm{Fix}\left(G(\pi)\right)\right| \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}$$

$$\overset{(3.2)}{=} \sum_{\mathbf{n}} \left|\mathrm{Fix}\left(F(\pi)\right)\right| \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})} \times \sum_{\mathbf{n}} \left|\mathrm{Fix}\left(G(\pi)\right)\right| \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})} = Z_F(\mathbf{x}) \times Z_G(\mathbf{x}),$$

   also die Behauptung. Hierbei wendet man im letzten Schritt die bisherige Argumentation für die Zykelindexreihe von $F \times G$ jeweils rückwärts auf jene von F und G an.

q.e.d.

Als abschließende Folgerung ergibt sich somit aus dem obigen Satz das

3.5 Korollar

Die Menge aller Isomorphieklassen von Spezies $\{\mathcal{SP},+,\times\}$ *bildet einen kommutativen Halbring mit Einselement* $\boxed{eM}$. *Insbesondere ist die Abbildung*

$$\phi\colon \{\mathcal{SP},+,\times\} \to \mathbb{Q}[[x_1,x_2,\ldots]],\ F \mapsto Z_F(x_1,x_2,\ldots)$$

ein Halbringhomomorphismus.

Beweis: Das Distributivgesetz für $\{\mathcal{SP},+,\times\}$ ergibt sich sofort aus jenem für disjunkte Mengen. Der Rest ist klar.

q.e.d.