Der Halbring der Isomorphieklassen von Spezies

Theresa Hausen

Seminar zur Algebraischen Kombinatorik

4. Juni 2019

In der folgenden Ausarbeitung wird gezeigt, dass die bereits definierten Spezies einen Halbring bilden. Dabei sind die Elemente jenes Halbrings Isomorphieklassen von Spezies. Aus diesem Grund wird hier mit den Vertretern dieser Isomorphieklassen gerechnet.

§1 Addition von Spezies

Die Addition von Spezies wurde bereits in Definition 3.24 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 67) definiert.

(1.1) Satz
Die Summe zweier Spezies ist wohldefiniert und eindeutig bis auf Isomorphie. ◇

Beweis
Seien F und G Spezies mit $a \in F(X) \uplus G(X)$, wobei X, Y und $Z \in \mathcal{B}$ und
$f \in \mathrm{mor}(X, Y)$ sowie $g \in \mathrm{mor}(Y, Z)$:
$F + G$ ist genau dann eine Spezies, wenn $F + G$ ein Funktor von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ ist.

1) Die erste Eigenschaft eines Funktors von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{E}$ wird erfüllt, weil F und G jeweils Spezies sind. Also folgt:

$$\begin{aligned}(F+G)(id_X)(a) &= F(id_X)(a) \uplus G(id_X)(a) = id_{F(X)}(a) \uplus id_{G(X)}(a) \\ &= id_{F(X)+G(X)}(a)\end{aligned}$$

2) Da F und G Spezies sind und durch die Anwendung des Distributivgesetzes ergibt sich folgende Gleichungskette, welche die zweite Voraussetzung erfüllt.

$$\begin{aligned}(F+G)(g \circ f)(a) &= F(g \circ f)(a) \uplus G(g \circ f)(a) \\ &= (F(g) \circ F(f))(a) \uplus (G(g) \circ G(f))(a) \\ &= ((F(g) \uplus G(g)) \circ (F(f) \uplus G(f)))(a) \\ &= ((F+G)(g) \circ (F+G)(f))(a)\end{aligned}$$

3) Für ein beliebiges X $\in \mathcal{B}$ gilt per Definition der Addition von Spezies, dass $(F+G)(X) = F(X) \uplus G(X)$. Da F und G Spezies sind, liegt eine disjunkte Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{E}$ vor, die wiederum in $\mathcal{E}$ liegt. Also ist die Summe zweier Spezies wohldefiniert.

4) Man gehe nun davon aus, dass sowohl F isomorph zu $\tilde{F}$ und G zu $\tilde{G}$, wobei $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ auch Spezies sind. Gelte nun das kommutierende Diagramm, welches im Skript zur Algebraischen Kombinatorik (Plesken, SS 2014, Seite 65 Definition 3.17) zu finden ist, für die Spezies $F+G$ und $\tilde{F}+\tilde{G}$, so sei die Eindeutigkeit der Summe zweier Spezies bis auf Isomorphie bewiesen.

   Definiere dazu die zwei Isomorphismen:
   $\alpha_X : (F+G)(X) \to (\tilde{F}+\tilde{G})(X), a \mapsto \tilde{a}$ und $\alpha_Y : (F+G)(Y) \to (\tilde{F}+\tilde{G})(Y), b \mapsto \tilde{b}$

$$\begin{aligned}
(\tilde{F}+\tilde{G})(f)\circ\alpha_X(a) &= ((\tilde{F}+\tilde{G})(f)(\alpha_X(a))) \\
&= (\tilde{F}+\tilde{G})(f)(\tilde{a}) \\
&= \begin{cases} \tilde{F}(f)(\tilde{a}) \text{ , } \tilde{a} \in \tilde{F}(X) \\ \tilde{G}(f)(\tilde{a}) \text{ , } \tilde{a} \in \tilde{G}(X) \end{cases} \\
&\cong \begin{cases} \widetilde{F(f)(a)} \text{ , } a \in F(X) \\ \widetilde{G(f)(a)} \text{ , } a \in G(X) \end{cases} \\
&= \alpha_Y\left(\begin{cases} F(f)(a) \text{ , } a \in F(X) \\ G(f)(a) \text{ , } a \in G(X) \end{cases} \right) \\
&= \alpha_Y((F+G)(f)(a)) \\
&= \alpha_Y \circ (F+G)(f)(a)
\end{aligned}$$

   Damit gilt das kommutierende Diagramm auch für eine Summe von Spezies und die letzte Eigenschaft ist gezeigt. □

Die Abbildung
$$\mathrm{mor}(X,Y) \to \mathrm{mor}((F+G)(X),(F+G)(Y)) : f \mapsto (F+G)(f)$$
ist somit wohldefiniert und $F+G$ wiederum eine Spezies.

Zunächst soll am Beispiel der bekannten Spezies der einelementigen Menge die soeben erlernte Aufteilung einer Spezies in zwei betrachtet werden. Dabei wird eine Menge $M \in \mathcal{B}$ auf die Menge, die nur M enthält, abgebildet.

(1.2) Beispiel
Für die Zerlegung der Spezies der einelementigen Menge $\boxed{\text{eM}}$ sind folgende Identitäten von Nutzen

i) Die Exponentialfunktion mit der Übereinstimmung

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \frac{1}{2}\exp(x) + \frac{1}{2}\exp(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)) + \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \\ &= \cosh(x) + \sinh(x)\end{aligned}$$

ist die erzeugende Funktion von $\boxed{\text{eM}}$, da diese aus jeder Menge $\underline{n}$ die einelementige Menge $\{\underline{n}\}$ bildet, also $|\boxed{\text{eM}}(\underline{n})| = 1$, für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei sich somit genau die Exponentialreihe für die erzeugende Funktion ergibt. Damit ist auch klar, dass cosh(x) die erzeugende Funktion von $\boxed{\text{eM}_g}$ und $\sinh(x)$ von $\boxed{\text{eM}_u}$ ist.

ii) Es existiert nur eine Bahn der Operation der S_n auf $\boxed{\text{eM}}(\underline{n})$, weil die symmetrische Gruppe transitiv auf der Menge $\{\underline{n}\}$, für alle n $\in \mathbb{N}$, operiert. Damit folgt, dass die typ-erzeugende Funktion der einelementigen Spezies die Geometrische Reihe ist. Es gilt $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty} x^{2i} + \sum\limits_{i=0}^{\infty} x^{2i+1} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x}{1-x^2}$, wobei der erste Summand die typ-erzeugende Funktion von $\boxed{\text{eM}_g}$ und der Zweite von $\boxed{\text{eM}_u}$ ist.

iii) Folgende Funktion bildet die Zykelindexreihe der Spezies der einelementigen Menge. Auch hier erfolgt die Aufspaltung in die Summe der jeweiligen Zykelindexreihe der Spezies $\boxed{\text{eM}_g}$ und $\boxed{\text{eM}_u}$.

$$\begin{aligned}\exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + ...) &= \exp(\frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{4} + \frac{x_6}{6} + ...) + \exp(x_1 + \frac{x_3}{3} + \frac{x_5}{5} + ...) \\ &= \exp(\frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{4} + ...)(\cosh(x_1 + \frac{x_3}{3} + ...) \\ &\quad + \sinh(x_1 + \frac{x_3}{3} + ...)) \\ &= \exp(\frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{4} + ...)\ \cosh(x_1 + \frac{x_3}{3} + ...) \\ &\quad + \exp(\frac{x_2}{2} + \frac{x_4}{4} + ...)\ \sinh(x_1 + \frac{x_3}{3} + ...)\end{aligned}$$ ◇

(1.3) Bemerkung
Für zwei Spezies wurde die Zerlegung der Summe der beiden Spezies der erzeugenden Funktionen bereits gezeigt.
Man nimmt an, dass für die Summe von Spezies über eine beliebige Indexmenge Gleiches gilt.

Beweis
Da $(F_i)_{i\in I}$ nach Vorraussetzung eine Familie summierbarer Spezies ist, existieren nur endlich viele $F_i(M)$, die nicht leer sind, für alle $M \in \mathcal{B}$.
Wähle $J := \{j \in I | F_j(M) \neq \emptyset\} \subseteq I$, dann ist $\sum_{i\in I} F_i = \sum_{j\in J} F_j$, da $\sum_{i\in I\setminus J} F_i = \emptyset$, eine Summe endlich vieler Summanden.
Auf Grund der Abgeschlossenheit der Addition von Spezies gilt, dass beliebige Partialsummen von $\sum_{j\in J} F_j$ wiederum Spezies sind.
Somit ist nach Satz 3.27 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 68) folgende Gleichung einfach nachzuvollziehen,

$$(\sum_{j\in J} F_j)(x) = F_{j_1}(x) + (\sum_{j\in J\setminus\{j_1\}} F_j)(x)$$

da auch F_{j_1}Spezies nach Vorraussetzung.
Nehme man nun sukzessiv die Summe der übrigen Spezies F_j auseinander, folgt die zu beweisende Aussage.

Bei der typ-erzeugenden Funktion wende man das erläuterte Vorgehen analog für die entsprechende Funktion an.

Die Zykelindexreihe lässt sich wie folgt mit Hilfe der gezeigten Identitäten umformen:

$$\begin{aligned} Z_{\sum_{i\in I} F_i}(x_1, x_2, ...) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} |\mathrm{Fix}((\sum_{j\in J} F_j)(g))| \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k(g)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} |\mathrm{Fix}(\sum_{j\in J} F_j(g))| \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k(g)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} \sum_{j\in J} |\mathrm{Fix}(F_j(g))| \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k(g)} \\ &= \sum_{j\in J} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} |\mathrm{Fix}(F_j(g))| \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k(g)} \\ &= \sum_{i\in I} Z_{F_i}(x_1, x_2, ...) \end{aligned}$$

□

(1.4) Beispiel
Eine weitere Spezies ist die Potenzmengenspezies $\boxed{\mathrm{Pm}}$, definiert durch
$\boxed{\mathrm{Pm}}(M) = \{N | N \subseteq M\} = \mathrm{Pot}(M)$. Damit ist die erzeugende Funktion

$$\boxed{\text{Pm}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{|M|} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n!}, \text{ da } M = \{1, ..., n\}$$

und die typ-erzeugende Funktion

$$\widetilde{\boxed{\text{Pm}}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |\text{Pot}(M)/S_M| x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \diamond$$

§2 Multiplikation von Spezies

Eine weitere wichtige Operation, Spezies miteinander zu verknüpfen ist die Multiplikation. Die Produktspezies wurde in Definition 3.35 (Plesken, SS 2014, Seite 72) erläutert. Damit soll nun der entscheidende Satz dieses Themas gezeigt werden.

(2.1) Satz
Spezies bilden einen kommutativen Halbring mit Eins mit den definierten Verknüpfungen "+" und "·". $\diamond$

Beweis
F, G und H seien Spezies mit $M \in \mathcal{B}$.

1) Zu Beginn wird das Assoziativgesetz der Multiplikation gezeigt.
   Da $\tilde{T} \in \text{Pot}(M - T)$, also eine beliebige Teilmenge von M ohne T ist und $T \uplus \tilde{T} \subseteq M$, sowie die Aufteilung von M in eine disjunkte Vereinigung dreier Teilmengen durch $T \uplus \tilde{T} \uplus (M - T \uplus \tilde{T}) = M$, sind folgende Umformungen nachzuvollziehen:

$$\begin{aligned}
F(GH)(M) &= \biguplus_{T \subseteq M} F(T) \times (GH)(M - T) \\
&= \biguplus_{T \subseteq M} F(T) \times \Big(\biguplus_{\tilde{T} \subseteq M - T} G(\tilde{T}) H((M - T) - \tilde{T}) \Big) \\
&= \biguplus_{T \subseteq M} F(T) \times \biguplus_{\tilde{T} \subseteq M - T} G(\tilde{T}) \times H(M - (T \uplus \tilde{T}) \\
&= \biguplus_{T \uplus \tilde{T} \subseteq M} F(T) \times G(\tilde{T}) \times H(M - (T \uplus \tilde{T}))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \biguplus_{M_i\,,\,\biguplus\limits_{i\in\underline{3}} M_i = M} F(M_1) \times G(M_2) \times H(M_3) \\
&= \biguplus_{T\subseteq M} \biguplus_{\tilde{T}\subseteq T} F(\tilde{T}) \times G(T-\tilde{T}) \times H(M-T) \\
&= \biguplus_{T\subseteq M} (FG)(T) \times H(M-T) \\
&= (FG)H(M)
\end{aligned}
$$

2) Da das Kommutativgesetz in dem Beweis zu Lemma 3.25 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 68) bereits für die Addition gezeigt wurde, wird hier nur auf die Kommutativiät der Multiplikation von Spezies eingegangen. Erneut werden die disjunkten Teilmengen M_i zur Hilfe genommen.

$$
\begin{aligned}
(FG)(M) &= \biguplus_{T\subseteq M} F(T) \times G(T-M) = \biguplus_{M_i,\,\biguplus\limits_{i=\underline{2}} M_i = M} F(M_1) \times G(M_2) \\
&= \biguplus_{T\subseteq M} F(T-M) \times G(T) = \biguplus_{T\subseteq M} G(T) \times F(T-M) \\
&= (GF)(M)
\end{aligned}
$$

Es sollte hierbei noch erwähnt werden, dass das kartesisches Produkt nur bis auf Isomorphie kommutativ ist. Also gilt $GF(f)(\alpha_M(a,b)) = \alpha_N(FG(f)(a,b))$, $(a,b) \in F(T) \times G(M-T)$ mit $\alpha_M : FG(M) \to GF(M), (a,b) \mapsto \alpha_{M,T}(a,b) := (b,a)$ als Isomorphismus.

3) Für das Distributivgesetz bedient man sich der bekannten Rechenregeln der Addition von Spezies und der Distributivität des direkten Produkts sowie der disjunkten Vereinigungen von Mengen.

$$
\begin{aligned}
(F(G+H))(M) &= \biguplus_{T\subseteq M} F(T) \times ((G+H)(M-T)) \\
&= \biguplus_{T\subseteq M} F(T) \times (G(M-T) \uplus H(M-T)) \\
&= \biguplus_{T\subseteq M} F(T) \times G(M-T) \uplus F(T) \times H(M-T) \\
&= (FG)(M) \uplus (FH)(M) \\
&= (FG+FH)(M)
\end{aligned}
$$

4) Außerdem ist zu zeigen, dass $\boxed{1}$, das Einselement in $(\mathcal{SP}, +, \cdot)$ ist, also $\boxed{1} \cdot F = F$ gilt. Diese Gleichung ist äquivalent zu $(\boxed{1} \cdot F)(M) = F(M)$, wobei die Spezies $\boxed{1}$ durch Beispiel 3.26 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 68) definiert wurden.

$$\begin{aligned}(\boxed{1} \cdot F)(M) &= \biguplus_{T \subseteq M} \boxed{1}(T) \times F(M-T) \\ &= \biguplus_{T \subseteq M \setminus \{\emptyset\}} \emptyset \times F(M-T) \biguplus \boxed{1}(\emptyset) \times F(M-\emptyset) \\ &= \emptyset \uplus F(M) \\ &= F(M)\end{aligned}$$

5) Zuletzt wird per Definition der Nullspezies gezeigt, dass diese das Nullelement des Halbrings bildet.

$$(\boxed{0} \cdot F)(M) = \boxed{0}(T) \times F(M-T) = \emptyset \times F(M-T) = \emptyset \qquad \square$$

Es folgt also, dass $(\mathcal{SP}, +, \cdot)$ ein kommutativer Halbring mit Eins ist.

Weiterhin möchten wir nun die Rechenregeln für die erzeugenden Funktionen des Produktes zweier Spezies beweisen.
Dabei handelt es sich um die Verifikation des Satzes 3.36 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 73).

Beweis
F und G seien Spezies, es soll $(FG)(x) = F(x) \cdot G(x)$ gelten. Im Folgenden wird dies durch die Anwendung des Cauchy-Produkts gezeigt:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |(FG)(\underline{n})| \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} | \biguplus_{\underline{k} \subseteq \underline{n}} F(\underline{k}) \times G(\underline{n}-\underline{k})| \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} | \sum_{\underline{k} \subseteq \underline{n}} F(\underline{k}) \times G(\underline{n}-\underline{k})| \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |F(\underline{k})| \cdot |G(\underline{n}-\underline{k})| \frac{x^n}{n!} \\ &= (\sum_{n=0}^{\infty} F(\underline{n}) \frac{x^n}{n!}) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} G(\underline{n}) \frac{x^n}{n!})\end{aligned}$$

Als nächstes wird die gleiche Eigenschaft für die typ-erzeugende Funktion begründet. Hierbei sollte erwähnt werden, dass alle k-elementigen Teilmengen der Menge $\underline{n}$ in der gleichen Bahn unter der S_n liegen, da die Symmetrische Gruppe transitiv auf $\mathrm{Pot}_k(M)$ operiert. Deshalb wird im zweiten Umformungsschritt nur die Länge der Bahn und nicht die Anzahl der Bahnen verändert, damit besteht die Gleichheit der Ausdrücke weiterhin.

$$\begin{aligned}
(\widetilde{FG})(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} |(FG)(\underline{n})/S_n| x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |(\biguplus_{\underline{k}\subseteq\underline{n}} F(\underline{k}) \times G(\underline{n}-\underline{k}))/S_n| x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} |\biguplus_{\underline{k}\subseteq\underline{n}} F(\underline{k})/S_k \times G(\underline{n}-\underline{k})/S_{n-k}| x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\underline{k}\subseteq\underline{n}} |F(\underline{k})/S_k| \cdot |G(\underline{n}-\underline{k})/S_{n-k}| x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} |F(\underline{k})/S_k| \cdot |G(\underline{n}-\underline{k})/S_{n-k}| x^n \\
&= (\sum_{n=0}^{\infty} |F(\underline{n})/S_n| x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} |G(\underline{n})/S_n| x^n) \\
&= \tilde{F}(x) \cdot \tilde{G}(x)
\end{aligned}$$

Zuletzt wird Gleiches für die Zykelindexreihe gezeigt.

$$\begin{aligned}
Z_{F\cdot G}(x_1, x_2, ...) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} |\mathrm{Fix}((FG)(g))| \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(g)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g\in S_n} |\mathrm{Fix}(F(g) \cdot G(g))| \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(g)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \sum_{g\in S_n} \binom{n}{k} |\mathrm{Fix}(F(\frac{g}{\underline{k}})| \cdot |\mathrm{Fix}(G(\frac{g}{\underline{n}-\underline{k}}))| \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(g)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \sum_{k=0}^{n} \sum_{g\in S_n} |\mathrm{Fix}(F(\frac{g}{\underline{k}})| \cdot |\mathrm{Fix}(G(\frac{g}{\underline{n}-\underline{k}}))| \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(g)}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (\sum_{\sigma \in S_k} \frac{|\mathrm{Fix}(F(\sigma))|}{k!}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(\sigma)} \cdot (\sum_{\sigma \in S_{n-k}} \frac{|\mathrm{Fix}(G(\sigma))|}{(n-k)!}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(\sigma)}$$
$$= (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |\mathrm{Fix}(F(\sigma)| \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(\sigma)}) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |\mathrm{Fix}(G(\sigma)| \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(\sigma)})$$
$$= Z_F(x_1, x_2, ...) \cdot Z_G(x_1, x_2, ...)$$

□

(2.2) Beispiel
Des Weiteren kann man zeigen, dass für jede Spezies F und alle n $\in \mathbb{N}$ mit Beispiel 3.26 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 68) $\boxed{\mathrm{n}} \cdot F = (\boxed{\mathrm{n}} \cdot 1) \cdot F$ gilt.
Zudem lässt sich dies als $n \cdot (\boxed{1} \cdot F)$ durch Anwenden des Assoziativgesetz der Multiplikation umformen. Da außerdem gezeigt wurde, dass es sich bei $\boxed{1}$ um das Einselement des Halbrings der Isomorphieklassen von Spezies handelt, folgt $n \cdot (\boxed{1} \cdot F) = n \cdot (F) = n \cdot F$. ◇

(2.3) Beispiel
In Beispiel 3.40 (Algebraische Kombinatorik, Plesken, Seite 75) wurden die indizierten Partitionen veranschaulicht, welche sich wegen einer Anordnung von allgemeinen Partitionen unterscheiden.
Es wurde außerdem gezeigt, dass die Spezies der indizierten Partition gleich zu $\boxed{\mathrm{eM}_+}^k$ ist.
Mit dieser Information ist es einfach zu zeigen, dass dass die Familie der $\boxed{\mathrm{eM}_+}^k$ summierbar ist. Da nur endlich viele nichtleere $\boxed{\mathrm{iP}^k}(M)$, mit $M \in \mathcal{B}$, existieren, weil eine Partition auf einer endlichen Menge aus endlich vielen nichtleeren Partitionsklassen besteht, folgt damit direkt:

$$|\{k \in \mathbb{N} | \boxed{\mathrm{eM}_+}^k(M) \neq \emptyset\}| = |\{k \in \mathbb{N} | \boxed{\mathrm{iP}^k}(M) \neq \emptyset\}| < \infty$$ ◇

(2.4) Beispiel
Sei $\boxed{\mathrm{tO}}$ die Spezies der Totalordung und $\boxed{\mathrm{tO}_i}$ die Einschränkung auf die Kardinalität i. Dann gelten folgeden Eigenschaften:

1. Es ist bekannt, dass $\boxed{\mathrm{eM}_1}(M) = \{M\} = \boxed{\mathrm{tO}_1}(M)$, wenn $|M| = 1$, da die Menge nur in eine Ordnung unterteilt wird. Sei $|M| \neq 1$, gilt $\boxed{\mathrm{eM}_1}(M) = \emptyset = \boxed{\mathrm{tO}_1}(M)$.

Also ist gezeigt $\boxed{\text{eM}_1}$ = $\boxed{\text{tO}_1}$. Des weiteren soll diese Gleichung auch für eine Ordnung beliebiger Kardinalität i gelten.

$$\begin{aligned}
\boxed{\text{eM}_1}^i(M) &= (\prod_{k=1}^{i} \boxed{\text{eM}_1})(M) = \biguplus \boxed{\text{eM}_1}(M_1) \times ... \times \boxed{\text{eM}_1}(M_i) \\
&= \begin{cases} \{M_1\}, \ |M_1| = 1 \\ \emptyset, \qquad sonst \end{cases} \times ... \times \begin{cases} \{M_i\}, \ |M_i| = i \\ \emptyset, \qquad sonst \end{cases} \\
&= \begin{cases} \biguplus \{M_1\} \times ... \times \{M_i\}, & |M_k| = i \ \forall k \\ \emptyset, & sonst \end{cases} \\
&= \boxed{\text{tO}_i}(M)
\end{aligned}$$

2. Des Weiteren folgt aus dem Gezeigten die Gleichheit $\boxed{\text{tO}} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \boxed{\text{eM}_1}^i$. Es ist nun von Interesse die erzeugenden Funktionen der Spezies der Totalordnung durch die Darstellung über die Spezies der einelementigen Menge herzuleiten.
   i) Nach Definition ist $\boxed{\text{eM}_1}$ summierbar und $\|\boxed{\text{eM}_1}\| = i!$, wenn $i = n$, ansonsten 0. Damit folgt für die erzeugende Funktion der Spezies der Totalordnung:

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{\infty} \boxed{\text{eM}_1}^i)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\boxed{\text{eM}_1}^i(x)) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i=1}^{\infty} |\boxed{\text{eM}_1}^i(\underline{n})|) \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} = \boxed{\text{tO}}(x)
\end{aligned}$$

   ii) Auch für die typ-erzeugende Funktion wird sich der Summierbarkeit von $\boxed{\text{eM}_1}^i$ zu Nutzen gemacht. Des Weiteren operiert die Symmetrische Gruppe transitiv auf $\boxed{\text{eM}_1}^i(\underline{n})$, weshalb entweder eine Bahn, im Falle $i = n$ oder keine Bahn, in jedem anderen Fall, existiert.

$$\begin{aligned}
(\widetilde{\sum_{i=1}^{\infty} \boxed{\text{eM}_1}^i})(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\widetilde{\boxed{\text{eM}_1}^i})(x)) &= \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} |\boxed{\text{eM}_1}^i(\underline{n})/S_n| x^n) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} = \widetilde{\boxed{\text{tO}}}(x)
\end{aligned}$$

iii) Zuletzt soll die Zykelindexreihe betrachtet werden.
Hierbei sei zunächst erwähnt, dass die Anzahl der Fixpunkte von $\boxed{\mathrm{eM}_1}^i(g)$, mit $g \in S_n$ und wenn $n = i$, genau $i!$ betragen. Grund dafür ist, dass für $i \neq n$ bereits $\boxed{\mathrm{eM}_1}^i(g) = \emptyset$ ist, des weiteren existieren nur Fixpunkte, wenn g schon die Identität ist. Da nun $\boxed{\mathrm{eM}_1}^i(g) \in S_{\boxed{\mathrm{eM}_1}^i(\underline{n})} \cong S_i$, liegen deshalb $i!$ Fixpunkte vor. Hinzu kommt der Zykelzähler, welcher in jedem Falle, bis auf $k = 1$, null ist, denn dann ist $a_1(id) = i$. Man zeigt also:

$$\begin{aligned}
Z_{\sum\limits_{i=1}^{\infty} \boxed{\mathrm{eM}_1}^i}(x_1, x_2, ...) &= \sum_{i=1}^{\infty} Z_{\boxed{\mathrm{eM}_1}^i}(x_1, x_2, ...) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} |\mathrm{Fix}(\boxed{\mathrm{eM}_1}^i(g))| \prod_{k=1}^{n} x_k^{a_k} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot i! \cdot x_1^i = \sum_{i=1}^{\infty} x_1^i = \frac{1}{1 - x_1} \\
&= Z_{\boxed{\mathrm{tO}}}(x_1, x_2, ...)
\end{aligned}$$

Damit ist bewiesen, dass man die Totalordnung und ihre erzeugenden Funktionen auch über andere Spezies konstruieren kann. ◇

Literaturverzeichnis

Plesken, Wilhelm: *Algebraische Kombinatorik, Aachen, Vorlesung SS* 2014