4 Substitution und Differentiation

4.1 Einsetzen

Beispiel 3.41. *Zur Motivation, Substitution einzuführen, stellen wir die Spezies* $\boxed{eF}$ *als eine Kombination der Spezies* $\boxed{S}$ *und* $\boxed{wB}$ *dar. Dafür sagt man, dass Endofunktion sich als Graph beschreiben lässt, worin die gewurzelten Bäume ihre Wurzeln in Zykel von* S_n *haben.*

Übung. Betrachten wir die Spezies $\boxed{Pa}$ Partitionen, definiert für endliche Mengen M, N und Morphismus $f : M \to N \in \mathcal{B}$ als

$$\begin{aligned}&\boxed{Pa}(M) := Par(M),\\ &\boxed{Pa}(f) : \boxed{Pa}(M) \to \boxed{Pa}(N), \pi \mapsto \big\{\boxed{Pm}(f)(p) \,\big|\, p \in \pi\big\},\end{aligned}$$

wobei $Par(M) \subset Pot(Pot(M))$ die Menge der Partitionen auf M ist.

Definition 3.42. *Seien* F, G *zwei Spezies mit* $G(\emptyset) = \emptyset$*. Definieren wir die Spezies* $F \circ G = F(G)$ *für alle Mengen* $M, N \in \mathcal{B}$ *als*

$$(F \circ G)(M) := \textstyle\bigcup_{\pi \in Par(M)} F(\pi) \times \prod_{p \in \pi} G(p),$$

und für Morphismus $f : M \to N$ *als Zusammensetzung der Abbildungen auf* $(\pi, \varphi, \{\gamma_p\}_{p \in \pi})$

$$\begin{aligned}&(F \circ G)(f) = (F \circ G)(M) \to (F \circ G)(N),\\ &(\pi, \varphi, \{\gamma_p\}_{p \in \pi}) \mapsto \Big(\boxed{Pa}(f)(\pi), F(f)(\varphi), \big\{\overline{\gamma}_q\big\}_{q \in F(f)(\varphi)}\Big),\end{aligned}$$

mit $\overline{\gamma}_q = G\Big(\boxed{Pm}(f)\Big)\Big(\gamma_{\boxed{Pm}(f^{-1})(q)}\Big)$.

Übung. Überprüfen wir, dass für $f : M \to N, G : N \to K$ gilt $(F \circ G)(fg) = (F \circ G)(f) \cdot (F \circ G)(g)$. Dafür betrachten wir die Wirkung der Abbildung auf $(\pi, \varphi, \{\gamma_p\}_{p \in \pi})$. Seien

$$\begin{aligned}&(F \circ G)(fg)(\pi, \varphi, \{\gamma_p\}_{p \in \pi}) = \big(\overline{\pi}, \overline{\varphi}, \big\{\overline{\gamma}_q\big\}_{q \in \overline{\pi}}\big),\\ &((F \circ G)(f) \cdot (F \circ G)(g))(\pi, \varphi, \{\gamma_p\}_{p \in \pi}) = (\tilde{\pi}, \tilde{\varphi}, \{\tilde{\gamma}_q\}_{q \in \tilde{\pi}}),\end{aligned}$$

dann

$$\begin{aligned}&\overline{\pi} = \boxed{Pa}(fg)(\pi) = \big(\boxed{Pa}(f)\boxed{Pa}(g)\big)(\pi) = \boxed{Pa}(f)\big(\boxed{Pa}(g)(\pi)\big) = \tilde{\pi},\\ &\overline{\varphi} = F(fg)(\varphi) = (F(f)F(g))(\varphi) = F(f)(F(g)(\varphi)) = \tilde{\varphi},\\ &\forall q \in \overline{\pi} = \tilde{\pi} : \tilde{\gamma}_q = G\big(\boxed{Pm}(fg)\big)\Big(\gamma_{\boxed{Pm}((fg)^{-1})(q)}\Big) = G\big(\boxed{Pm}(f)\big)G\big(\boxed{Pm}(g)\big)\Big(\gamma_{\boxed{Pm}(g^{-1})\boxed{Pm}(f^{-1})(q)}\Big)\end{aligned}$$

Für die erzeugenden Reihen gilt der folgende Satz.

Satz 3.43. *Seien* F, G *Spezies mit* $G(\emptyset) = \emptyset$*, dann gilt*

$$\begin{aligned}&(F \circ G)(x) = F(G(x)),\\ &(\widetilde{F \circ G})(x) = Z_F(G(x), G(x^2), G(x^3), ...),\\ &Z_{F \circ G}(x_1, x_2, ...) = Z_F(Z_G(x_1, x_2, x_3, ...), Z_G(x_2, x_4, x_6, ...), ...)\end{aligned}$$

Beachte, dass diese formalen Potenzreihen wohldefiniert sind. Die letzte Substitution hat einen speziellen Namen

Definition 3.44. *Seien* $f, g \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, ...]]$*, dann ist die* **plethystische Substitution** $f \circ g$ *definiert als*

$$\begin{aligned}&(f \circ g)(x_1, x_2, ...) := f(g_1, g_2, g_3, ...),\\ &g_k := g(x_k, x_{2k}, x_{3k}, ...).\end{aligned}$$

Schreiben wir auch $g_k =: x_k \circ g = g \circ x_k$.

Übung. Zeigen wir, dass für $a, b \in \mathbb{Q}[[x_1, x_2, x_3, ...]]$ gilt

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} a_k \Leftrightarrow a = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} b_k,$$

wobei μ die klassische Möbiusfunktion ist. Seien

$$\varphi, \psi : \mathbb{Q}[[x_1, x_2, x_3, ...]] \to \mathbb{Q}[[x_1, x_2, x_3, ...]], a \overset{\varphi}{\mapsto} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} a_k, a \overset{\psi}{\mapsto} \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} a_k.$$

Es ist klar, dass diese Abbildungen wohldefiniert sind. Aus $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi = \mathbf{1}$ folgt die zu beweisende Eigenschaft, deswegen berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\varphi(\psi(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \Big(\sum_{l=1}^{\infty} \tfrac{\mu(l)}{l} a_l \Big)_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \tfrac{\mu(l)}{kl} (a_l)_k = \sum_{k,l=1}^{\infty} \tfrac{\mu(l)}{kl} a_{kl} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m|n} \tfrac{\mu(m)}{n} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\sum_{m|n} \mu(m)}{n} a_n = a,
\end{aligned}$$

da $\sum_{m|n} \mu(m) = \delta_{n,1}$. Analog

$$\psi(\varphi(a)) = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} \big(\sum_{l=1}^{\infty} \tfrac{1}{l} a_l \big)_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{kl} (a_l)_k = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m|n} \tfrac{\mu(m)}{n} a_n = a.$$

Beispiel 3.45. *Da* $\boxed{eF} = \boxed{S} \circ \boxed{wB}$ *gilt*

$$\begin{aligned}
&\boxed{eF}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^n \tfrac{x^n}{n!} = \boxed{S}\Big(\boxed{wB}\Big) = \tfrac{1}{1 - \boxed{wB}(x)}, \\
&\widetilde{\boxed{eF}}(x) = Z_{\boxed{S}}\Big(\widetilde{\boxed{wB}}(x), \widetilde{\boxed{wB}}(x^2), \widetilde{\boxed{wB}}(x^3), ...\Big), \\
&Z_{\boxed{eF}}(x_1, x_2, ...) = \prod_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{1 - x_i \circ Z_{\boxed{wB}}}.
\end{aligned}$$

Analog $\boxed{wB} = \boxed{eM_1} \cdot \Big(\boxed{eM} \circ \boxed{wB}\Big)$ *und*

$$\begin{aligned}
&\boxed{wB}(x) = x \exp\Big(\boxed{wB}(x)\Big), \\
&\widetilde{\boxed{wB}}(x) = x \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} \widetilde{\boxed{wB}}(x^n)\Big), \\
&Z_{\boxed{wB}}(x_1, x_2, ...) = x_1 \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} x_n \circ Z_{\boxed{wB}}\Big).
\end{aligned}$$

Beispiel 3.46. *Für indizierte Partitionen gilt* $\boxed{iP} = \boxed{tO} \circ \boxed{eM_+}$, *woraus man frühere Ergebnisse herleiten kann. Entsprechend gilt für allgemeine Partitionen* $\boxed{Pa} = \boxed{eM} \circ \boxed{eM_+}$, *folglich*

$$\begin{aligned}
&\boxed{Pa}(x) = \exp(\exp(x) - 1), \\
&\widetilde{\boxed{Pa}}(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{1 - x^i}, \\
&Z_{\boxed{Pa}}(x_1, x_2, ...) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \big(\exp\big(\sum_{l=1}^{\infty} \tfrac{1}{l} x_{kl}\big) - 1\big)\Big).
\end{aligned}$$

Beispiel 3.47. *Sei* $\boxed{Zy}$ *die Spezies der Zykel (die Menge der* $|M|$*-Zykel in* S_M *mit Konjugationen als Morphismen). Offenbar*

$$\begin{aligned}
&\boxed{Zy}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)! \tfrac{x^n}{n!} = \ln\big(\tfrac{1}{1-x}\big), \\
&\widetilde{\boxed{Zy}}(x) = \tfrac{x}{1-x}.
\end{aligned}$$

Merken wir, dass

$$\boxed{S} = \boxed{eM} \circ \boxed{Zy},$$

dann

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{1-x} &= \boxed{S}(x) = \exp \boxed{Zy}(x),\\ \prod_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{1-x^k} &= \widetilde{\boxed{S}}(x) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k}\tfrac{x^k}{1-x^k}\Big),\\ \prod_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{1-x_k} &= Z_{\boxed{S}}(x_1, x_2, ...) = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x_k \circ Z_{\boxed{Zy}}\Big).\end{aligned}$$

Aus der vorigen Übung folgt dann

$$Z_{\boxed{Zy}} = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} \ln \tfrac{1}{1-x_k}.$$

Definition 3.48. *Seien F, Z Spezies mit $F = \boxed{eM} \circ Z$, dann wird Z die Spezies der zusammenhängenden F-Strukturen genannt.*

Bemerkung 3.49. *Für zusammenhängende Strukturen gilt*

$$\begin{aligned}F(x) &= \exp(Z(x)),\\ \tilde{F}(x) &= \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} \tilde{Z}(x^k)\Big),\\ Z_F(x_1, x_2, ...) &= \exp\big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} Z_Z(x_k, x_{2k}, ...)\big).\end{aligned}$$

Übung. Betrachten wir de Spezies $\boxed{zG}$ der schlichten Graphen mit einziger Zusammenhangskomponente

$$\boxed{zG}(M) = \big\{g \in \boxed{sG}(M) \,\big|\, g \text{ hat nur eine Zusammenhangskomponente}\big\}, \quad \boxed{zG}(\emptyset) = \emptyset.$$

Dann

$$\boxed{sG} = \boxed{eM} \circ \boxed{zG},$$

weil jeder schlichter Graph als Vereinigung seiner Zusammenhangskomponenten dargestellt werden kann.

Übung. Aus der Gleichung

$$Z_F(x_1, x_2, ...) = \exp\big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} Z_Z(x_k, x_{2k}, ...)\big),$$

folgt

$$\ln Z_F = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{k} x_k \circ Z_Z,$$

was eine plethystische Komposition ist, deswegen

$$Z_Z = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} x_k \circ \ln Z_F,$$

dann auch

$$\begin{aligned}\widetilde{Z}(x) &= Z_Z(x, x^2, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} \ln Z_F(x^k, x^{2k}, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{\mu(k)}{k} \ln \widetilde{F}(x^k),\\ Z(x) &= Z_Z(x, 0, 0, ...) = \ln F(x).\end{aligned}$$

Übung. Beliebige n-stellige Relationen kann man als Spezies F mit $F(M) \subset M^n$ (kartesischer Produkt) darstellen, wo jedes Element vom Bild gegebene Voraussetzungen erfüllt. Zum Beispiel, lässt sich die Spezies partielle Ordnungen so definieren. Das muss aber nicht die beste Darstellung sein, was man bei totalen Ordnungen sehen kann.

Bemerkung 3.50.

1. *$\forall F : F \circ \boxed{eM_1} = \boxed{eM_1} \circ F = F$.*
2. *Substitution ist assoziativ.*
3. *Falls $G(\emptyset) = \emptyset$, kann man die Komposition von G mit sich selbst iterieren.*

Beweis. 1. Für $F \circ \boxed{eM_1}$, werden nur für die Partition, deren Elemente alle nur ein Punkt haben, die entsprechenden Summanden nicht leer, und die Bijektion zwischen $F(M)$ und $F \circ \boxed{eM_1}$ ist dann klar. Für $\boxed{eM_1} \circ F$ soll die Partition nur ein Element haben, also ist es auch klar, dass $F = \boxed{eM_1} \circ F$.

2. Ganz formell kann man sehen, dass

$$\begin{aligned}(F\circ(G\circ H))(M) &= \biguplus_{\pi\in Par(M)} F(\pi)\times\prod_{p\in\pi}(G\circ H)(p)\\ &= \biguplus_{\pi\in Par(M)} F(\pi)\times\prod_{p\in\pi}\Big(\biguplus_{\pi_p\in Par(p)} G(\pi_p)\times\prod_{p'\in\pi_p} H(p')\Big)\\ &= \biguplus_{\pi_2\leq\pi_1\in Par(M)} F(\pi_1)\times\prod_{p_1\in\pi_1} G(p_1/\pi_2)\times\prod_{p_2\in\pi_2} H(p_2)\\ &= ((F\circ G)\circ H)(M).\end{aligned}$$

Operation auf Morphismen ist natürlich, deswegen ist es leicht zu merken, dass dafür Substitution auch assoziativ ist.

3. Da Substitution assoziativ ist und $G(\emptyset)=\emptyset$, ist $G^{(n)}=G^{(n-1)}\circ G=G\circ G^{(n-1)}$ eindeutig definiert.

□

4.2 Die Ableitung einer Spezies

Definition 3.51. *Sei F eine Spezies. Für endliche Mengen M,N und Morphismus $f:M\to N\in\mathcal{B}$ definieren wir F' als*

$$F'(M):=F(M\uplus\{*\}),\quad F'(f):=F(f^+), f^+:M\uplus\{*\}\to N\uplus\{*\}, m\mapsto\begin{cases} f(m) & m\in M,\\ * & m=*,\end{cases}$$

wo $*$ ein Element ist, das nicht in $M\cup N$ liegt.

Beispiel 3.52. *1. Sehen wir, dass $\boxed{Zy'}=\boxed{tO}$. Dafür merkt man, dass mithilfe des neuen Elements man aus Totalordnung ein M-Zykel machen kann, und durch Weglassen von einem (diesem) Element bekommt man die Totalordnung zurück.*

2. Analog kann man partielle Partitionen, also Partitionen ohne Voraussetzung, dass die Vereinigung die ganze Menge sein soll, definieren. Also $\boxed{Pa'}=\boxed{pP}$, wo die partielle Partition man durch Weglassen von Klassen der Partition erhält, die $\{*\}$ enthält, und durch Addieren aller Elemente, die in der partiellen Partition nicht liegen, kann man die einfache Partition bekommen.

3. $\boxed{tO'}=\boxed{tO}\cdot\boxed{tO}$. Es ist klar, dass wenn man ein Punkt aus dem Totalordnung wegwirft, bekommt man eine Menge, worin eine Partition mit (nicht mehr als) zwei total geordnete Elementen existiert. Hier man soll beachten, dass Elementen der Produktspezies geordnet sind.

Satz 3.53. *Für die Ableitung der Spezies gilt*

$$\begin{aligned}F'(x) &= \tfrac{d}{dx}F(x),\\ \widetilde{F'}(x) &= \tfrac{\partial}{\partial x_1}Z_F(x,x^2,x^3,...),\\ Z_{F'}(x_1,x_2,x_3,...) &= \tfrac{\partial}{\partial x_1}Z_F(x_1,x_2,x_3,...).\end{aligned}$$

Beweis. Erste zwei Gleichungen aus dem Dritten folgen, deswegen beweisen wir nur sie. Schreiben wir

$$Z_{F'}(x_1,x_2,...)=\sum_{n\geq0}\sum_{p\vdash n}\tfrac{fix_{F'}(p)}{a_1(p)!...a_n(p)!}\prod_{k\geq1}\big(\tfrac{x_k}{k}\big)^{a_k(p)}.$$

$F'(g)=F(g^+)$, deswegen definieren wir $p^+=p+1$ (Partition von n mit einem zusätzlichen "1"-Element; auch Zykeltyp von g^+), dann

$$Z_{F'}(x_1,x_2,...)=\sum_{n\geq0}\sum_{p\vdash n}\tfrac{fix_F(p^+)}{(a_1(p^+)-1)!...a_n(p^+)!}x_1^{a_1(p^+)-1}\prod_{k\geq2}\big(\tfrac{x_k}{k}\big)^{a_k(p^+)},$$

woraus die gewünschte Behauptung leicht folgt. □

Beispiel 3.54. *Aus* $\boxed{Zy'} = \boxed{tO}$ *folgt*

$$\begin{aligned}
\boxed{Zy'}(x) = \boxed{tO}(x) = \tfrac{1}{1-x} &\implies \boxed{Zy}(x) = \ln \tfrac{1}{1-x}, \\
Z_{\boxed{Zy'}}(x_1, x_2, ...) = Z_{\boxed{tO}}(x_1, x_2, ...) = \tfrac{1}{1-x_1} &\implies Z_{\boxed{Zy}} = \ln \tfrac{1}{1-x_1} + u(x_2, x_3, ...).
\end{aligned}$$

Aus $\boxed{pP} = \boxed{Pa'}$ *folgt*

$$\begin{aligned}
&\boxed{Pa}(x) = \exp(\exp(x) - 1) \implies \boxed{pP}(x) = \exp(x + \exp(x) - 1), \\
&\widetilde{\boxed{pP}}(x) = \tfrac{1}{(1-x)^2} \textstyle\prod_{k=2}^{\infty} \tfrac{1}{1-x^k}, \\
&Z_{\boxed{Pa}}(x_1, x_2, ...) = \exp\big(\textstyle\sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k}\big(\exp\big(\sum_{l\geq 1} \tfrac{x_{kl}}{l}\big) - 1\big)\big) \\
&\implies Z_{\boxed{pP}}(x_1, x_2, ...) = \exp\big(\textstyle\sum_{k\geq 1} \tfrac{1}{k}\big(x_k + \exp\big(\sum_{l\geq 1} \tfrac{x_{kl}}{l}\big) - 1\big)\big).
\end{aligned}$$

Aus $\boxed{tO'} = \boxed{tO}^2$ *folgt, zum Beispiel*

$$\tfrac{d}{dx} \tfrac{1}{1-x} = \tfrac{1}{(1-x)^2}.$$

Da $\boxed{Zy'} = \boxed{tO} \implies \boxed{Zy''} = \boxed{tO}^2$, *gilt auch*

$$\boxed{Zy} = \ln \tfrac{1}{1-x},$$

was schon früher erhalten wurde.

Beispiel 3.55. *Definieren wir die Spezies Wald gewurzelter Bäume, die jede Menge in die Klasse aller disjunkten Vereinigungen von gewurzelten Bäumen abbildet. Also gilt*

$$\boxed{Ww} = \boxed{eM} \circ \boxed{wB}.$$

Außerdem kann man $\boxed{Ww}$ *als Ableitung von allgemeinen Bäumen darstellen.*

Übung. Für Spezies gilt auch

$$\begin{aligned}
(F + G)' &= F' + G', \\
(FG)' &= F'G + FG', \\
(F \circ G)' &= (F' \circ G)G'.
\end{aligned}$$

Dafür merken wir

$$\begin{aligned}
(F + G)'(M) &= (F + G)(M^+) = F(M^+) \uplus G(M^+) = (F' + G')(M), \\
(FG)'(M) &= \textstyle\bigcup_{U \subset M^+} F(U) \times G(M^+ - U) \\
&= \big(\textstyle\bigcup_{U \subset M} F(U^+) \times G(M - U)\big) \uplus \big(\bigcup_{U \subset M} F(U) \times G((M - U)^+)\big) = (F'G + FG')(M),
\end{aligned}$$

und Abbildung der Morphismen ist auch bijektiv, was leicht zu sehen ist. Analog

$$\begin{aligned}
(F \circ G)'(M) &= \textstyle\bigcup_{\pi \in Par(M^+)} F(\pi) \times \prod_{p \in \pi} G(p) \\
&= \textstyle\bigcup_{U \subset M} \Big(\bigcup_{\pi \in Par(U)} F(\pi^+) \times \prod_{p \in \pi} G(p)\Big) \times G(U^+) \\
&= ((F' \circ G)G')(M).
\end{aligned}$$

Satz 3.43. *Seien F, G Spezies mit $G(\emptyset) = \emptyset$. Die zur Komposition $F \circ G$ gehörigen Reihen sind gegeben durch*

$$\begin{aligned}(F \circ G)(x) &= F(G(x)),\\ \widetilde{(F \circ G)}(x) &= Z_F(G(x), G(x^2), ...),\\ Z_{F\circ G}(x_1, x_2, ...) &= Z_F(G(x_1, x_2, x_3, ...), G(x_2, x_4, x_6, ...), ...)\end{aligned}$$

Beweis. Zuerst betrachten wir (unendliche) Mengen N, K, eine Abbildung

$$f : N \to Mon_R(x_1, x_2, ...) = Mon_R(x_i, i \in \mathbb{N}) = \left\{ r \prod_{j=1}^{m} x_{i_m} \,\middle|\, r \in R, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i_m \in \mathbb{N} \right\},$$

und eine Bijektion $\varphi : N \to K$. Sei die Summe $S(N) = \sum_{n\in N} f(n)$ wohldefiniert, dann ist für jedes Tupel der Indizes I die Summe

$$S_I(N) = \sum_{n\in N: f(n)\in Mon_R(x_i, i\in I)} f(n),$$

wohldefiniert. Dann gilt

$$S_I(K) = \sum_{k\in K: f(\varphi^{-1}(k))\in Mon_R(x_i, i\in I)} f(\varphi^{-1}(k)) = \sum_{n\in N: f(n)\in Mon_R(x_i, i\in I)} f(n) = S_I(N),$$

deswegen ist $S(K)$ wohldefiniert und $S(K) = S(N)$.

Schreiben wir $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ...)$, $\boldsymbol{a}(g) = (a_1(g), a_2(g), ...)$ für Permutation g und

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}(g)} = \prod_{i\geq 1} x_i^{a_i(g)}.$$

Aus der Definition

$$Z_{F\circ G} = \sum_{n\geq 0} \sum_{g\in S_n} \frac{1}{n!} |Fix_{F\circ G}|(g) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}(g)}.$$

Zuerst berechnen wir die Anzahl der Fixpunkten für $g \in S_n$

$$(F \circ G)(g)(\pi, \varphi, \{\gamma\}_{p\in\pi}) = (\pi, \varphi, \{\gamma\}_{p\in\pi}) \implies \begin{cases} g(\pi) = \pi, \\ F(g)(\varphi) = \varphi, \\ \forall p \in \pi : G(g)(\gamma_{g^{-1}(p)}) = \gamma_p. \end{cases}$$

Sei $g_\pi \in S_\pi$ die von g erzeugte Permutation von π, dann $\varphi \in Fix_F(g_\pi)$. Dritte Voraussetzung lässt sich verbessern. Für jedes Element $p \in \pi$ existiert (minimales) $k \in \mathbb{N}$ so, dass $g^{-k}(p) = p$, dann

$$\gamma_p = G(g^k)(\gamma_{g^{-k}(p)}) = G(g^k)(\gamma_{g^{-k}(p)}),$$

also $\gamma_p \in Fix_G(g^k)$. Außerdem sind alle $\gamma_{g^{-i}p}, 1 \leq i \leq k$ eindeutig definiert, wenn γ_p fixiert ist. Seien $Zyk(g_\pi)$ die Menge der Zykel von g_π, dann kann man für jedes Zykel z die Permutation

$$g_z = g^{|z|}|_p, p \in z,$$

eindeutig definieren. Dann

$$\forall z \in Zyk(g_\pi) \forall p \in z : \gamma_p \in Fix_G(g_z).$$

Also

$$\begin{aligned}|Fix_{F\circ G}(g)| &= \sum_{\pi: g(\pi)=\pi} |Fix_F(g_\pi)| \prod_{z\in Zyk(g_\pi)} |Fix_G(g_z)|,\\ Z_{F\circ G} &= \sum_{n\geq 0} \sum_{g\in S_n} \Big(\sum_{\pi: g(\pi)=\pi} \frac{1}{n!} |Fix_F(g_\pi)| \prod_{z\in Zyk(g_\pi)} |Fix_G(g_z)| \Big) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}(g)}.\end{aligned}$$

Weiter wird indizierte Partition $\tilde{\pi}$ anstatt π nützlicher werden, deswegen definieren wir $S_{\tilde{\pi}}$ – die Menge der Permutationen g, dafür (nicht indizierte) $g(\tilde{\pi})$ und π gleich sind. Dann

$$Z_{F\circ G} = \sum_{n\geq 0} \sum_{g\in S_n} \Big(\sum_{\tilde{\pi}: g\in S_{\tilde{\pi}}} \frac{1}{|\tilde{\pi}|!n!} |Fix_F(g_{\tilde{\pi}})| \prod_{z\in Zyk(g_{\tilde{\pi}})} |Fix_G(g_z)| \Big) \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}(g)}.$$

Merken wir, dass

$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{a}(g)} = \prod_{z\in Zyk(g_{\tilde\pi})}(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|})^{\boldsymbol{a}(g_z)},$$

deswegen

$$Z_{F\circ G} = \sum_{n\geq 0}\sum_{g\in S_n}\sum_{\tilde\pi: g\in S_{\tilde\pi}}\frac{1}{|\tilde\pi|!n!}|Fix_F(g_\pi)|\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}.$$

Jetzt definieren wir eine bijektive Abbildung zwischen Mengen

$$\begin{aligned} N = &\ \{(n,g,\tilde\pi)\,|\,n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}; g\in S_M; g\in S_{\tilde\pi}\},\\ K = &\ \Big\{(m,g_\pi,f_1,f_2,f_3)\,\Big|\,m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}; g_\pi\in S_m; f_1:\underline{m}\to\mathbb{N}, f_1\circ g_\pi = f_1;\\ &\ f_2:\underline{m}\to iP(\textstyle\sum_{p\in\underline{m}} f_1(p)); f_3\in\prod_{p\in\underline{m}} S_{f_2(p)}\Big\}.\end{aligned}$$

Die Abbildung $N\to K$ ist leicht zu definieren. In der Rückrichtung

$$n = \sum_{p\in\underline{m}} f_1(p),\quad \tilde\pi = (f_2(p)\,|\,p\in\underline{m}),$$

und die Abbildung $g\mapsto(g_\pi,\{g_p\}_{p\in\pi})$ für jede Partition π bijektiv gemacht werden kann, deswegen lässt sich invertieren. Schreiben wir die Summe aller geeigneten Funktionen f_i als $\sum_{f_i}$, dann

$$\begin{aligned} Z_{F\circ G} &= \sum_{m\geq 0}\sum_{g_\pi\in S_m}\sum_{f_1}\sum_{f_2}\sum_{f_3}\frac{1}{m!\big(\sum_{p\in\underline{m}} f_1(p)\big)!}|Fix_F(g_\pi)|\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}\\ &= \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\sum_{g_\pi\in S_m}|Fix_F(g_\pi)|\sum_{f_1}\sum_{f_2}\sum_{f_3}\frac{1}{\big(\sum_{p\in\underline{m}} f_1(p)\big)!}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}.\end{aligned}$$

Weil g_z wird für mehrere g_p gleich, kann man die Summe vereinfachen. Für jeden Zykel $z\in Zyk(g_\pi)$ gibt es $(f_1(z)!)^{|z|-1}$ (mit $f_1(z)=f_1(p)$ für beliebiges $p\in z$) Abbildungen f_3, die dieselbe g_z erzeugen, folglich für $f_3'(g_\pi): Zyk(g_\pi)\to S_{f_1(z)}$ gilt

$$\begin{aligned} &\sum_{f_3}\frac{1}{\big(\sum_{p\in\underline{m}} f_1(p)\big)!}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}\\ &= \sum_{f_3'(g_\pi)}\frac{1}{\big(\sum_{z\in Zyk(g_\pi)} f_1(z)\big)!}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}(f_1(z)!)^{|z|-1}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}.\end{aligned}$$

Merken wir, dass der Summand von f_2 nicht abhängt, deswegen

$$\begin{aligned} &\sum_{f_2}\sum_{f_3'(g_\pi)}\frac{1}{\big(\sum_{z\in Zyk(g_\pi)} f_1(z)\big)!}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}(f_1(z)!)^{|z|-1}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}\\ &= \frac{\big(\sum_{z\in Zyk(g_\pi)} f_1(z)\big)!}{\prod_{p\in\underline{m}} f_1(p)!}\sum_{f_3'(g_\pi)}\frac{1}{\big(\sum_{z\in Zyk(g_\pi)} f_1(z)\big)!}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}(f_1(z)!)^{|z|-1}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}\\ &= \sum_{f_3'(g_\pi)}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}\frac{1}{f_1(z)!}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}.\end{aligned}$$

Jetzt merken wir, dass für beliebige Menge L gilt

$$\sum_{f:Zyk(g_\pi)\to L}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)} h(z,f(z)) = \prod_{z\in Zyk(g_\pi)}\big(\sum_{l\in L} h(z,l)\big),$$

deswegen

$$\begin{aligned} &\sum_{f_1}\sum_{f_3'(g_\pi)}\prod_{z\in Zyk(g_\pi)}\frac{1}{f_1(z)!}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}\\ &= \prod_{z\in Zyk(g_\pi)}\Big(\sum_{n_z\geq 1}\sum_{g_z\in S_{n_z}}\frac{1}{n_z!}|Fix_G(g_z)|\big(\boldsymbol{x}\circ x_{|z|}\big)^{\boldsymbol{a}(g_z)}\Big) = \prod_{z\in Zyk(g_\pi)} G\circ x_{|z|}.\end{aligned}$$

Endlich

$$\begin{aligned} Z_{F\circ G} &= \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\sum_{g_\pi\in S_m}|Fix_F(g_\pi)|\prod_{z\in Zyk(g_\pi)} G\circ x_{|z|}\\ &= \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\sum_{g_\pi\in S_m}|Fix_F(g_\pi)|\prod_{k\in\mathbb{N}}(G\circ x_k)^{a_k(g_\pi)} = Z_F(Z_G\circ x_1, Z_G\circ x_2, ...)\end{aligned}$$

□