Seminar algebraische Kombinatorik
Gewichtete Spezies

Martin Gäbele

Juli 2019

Vorwort

Diese Ausarbeitung basiert auf dem Skript *Algebraische Kombinatorik* von *Prof. Dr. Wilhelm Plesken*. Daher werden im folgenden nicht alle auftauchenden Begriffe definiert sondern an entsprechender Stelle auf das genannte Skript verwiesen.

1 Gewichtete Spezies

1.1 Gewichtete Mengen

Gewichtete Mengen werden mit dem Hintergedanken eingeführt später die Kardinalität einer Menge in den Reihen einer Spezies durch das "Gewicht" oder "Inventar" einer Menge zu ersetzen um zusätzliche Informationen über die Strukturen zu gewinnen. Dabei sind die Gewichte Polynome oder Potenzreihen.

An dieser Stelle wird auf die Definitionen 3.68/3.69 der *R-gewichteten Menge, das Inventar, die Morphismen gewichteter Mengen, Isomorphismus, Summe bzw. disjunkte Vereinigung sowie Cartesisches Produkt* aus dem erwähnten Skript [2] hingewiesen. Diese werden im Folgenden als bekannt vorausgesetzt.

Die Definitionen sind so gewählt wie man es erwarten würde sodass die Eigenschaften im nächsten Satz erfüllt werden.

Satz 1.1.1. *Seien (M, w) und (N, v) zwei endliche R-gewichtete Mengen. Dann gilt für Summe und Produkt gewichteter Mengen:*

(i) $|M \uplus N|_\mu = |M|_w + |N|_v$

(ii) $|M \times N|_\mu = |M|_w |N|_v$

(iii) Ist w gegeben durch $M \to R : m \mapsto 1$, so gilt $|M|_w = M$

Bemerkung 1.1.2. *Die endlichen R-gewichteten Mengen (M, w) bilden die Objekte einer Kategorie $\mathcal{E}_R$, deren Morphismen die Morphismen R-gewichteter Mengen aus Definition 3.68 sind.*

1.2 Gewichtete Spezies

Definition 1.2.1. *Sei $R = K[[x]]$ wie bei den gewichteten Mengen ein Ring formaler Potenzreihen oder Polynome über einem Integritätsbereich $K \subset \mathbb{C}$. Eine* **R-gewichtete Spezies** *ist ein (kovarianter) Funktor von $\mathcal{B}$ in die Kategorie $\mathcal{E}_R$ aus vorangegangener Bemerkung. Ein solcher Funktor wird als F_w geschrieben.*

Bemerkung 1.2.2. *Nach der Definition eines Funktors wird also einer endlichen Menge M durch $F_w(M) = (F(M), w_{F(M)})$ eine gewichtete Menge zugewiesen. Bei der Schreibweise F_w ist zu beachten, dass w nicht für eine einzelne Gewichtsfunktion sondern vielmehr für die Menge aller Gewichtsfuktionen auf den Bildern F(M) für die endlichen Mengen M steht.*

In Anlehnung an die Definition isomorpher gewichteter Mengen werden jetzt isomorphe F-Strukturen definiert.

Definition 1.2.3. *Zwei F-Strukturen $s_1, s_2 \in F(M)$ heißen* isomporph *falls sie durch einen bijektiven gewichtserhaltenden Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(F(M), F(M))$ aufeinander abgebildet werden, also $f(s_1) = s_2$.*

Insbesondere besitzen zwei isomorphe Strukturen dasselbe Gewicht. Denn

$$w(s_1) = w(f(s_1)) = w(s_2),$$

für zwei isomorphe F-Strukturen $s_1, s_1 \in F(M)$ mit Gewichtsfunktion w und gewichtserhaltender Bijektion f. Damit ist auch das Gewicht der Menge der Isomorphietypen von F-Strukturen $|F(M)/\sim|_w$ wohldefiniert indem man je das Gewicht eines beliebigen Vertreters einer Isomorphieklasse heranzieht und diese aufsummiert.

Beispiel 1.2.4. *Für die Spezies Symmetrische Gruppe bietet sich eine Gewichtung anhand der Zykeltyps an. Da die üblichen Morphismen genau die Konjugationen sind und diese den Zykeltyp erhalten sind diese Morphismen ohne Veränderung gewichtserhaltend. Wähle also als Gewicht für die $\boxed{S}$-Strukturen $\sigma \in S_M$*

$$w(\sigma) = a^{zyk(\sigma)},$$

wobei a eine formale Variable ist und $zyk(\sigma) := \#Zykel$ in σ. Das Inventar von $\boxed{S_w}(M)$ ist ein ganzzahliges Polynom

$$|S_M|_w = \sum_{\sigma \in S_M} a^{zyk(\sigma)} \in \mathbb{Z}[a].$$

Für $\boxed{S}(\underline{3}) = S_3$ ist

$$|S_3|_w = \sum_{\pi \in S_3} a^{zyk(\sigma)} = a^3 + 3a^2 + 2a$$

und für $\boxed{S}(\underline{4}) = S_4$ das Gewicht eines Vertretersystem der Isomorphieklassen

$$|S_4/\sim|_w = |\{id, (12), (123), (12)(34), (1234)\}|_w = a^4 + a^3 + 2a^2 + a.$$

Man kann an der letzten Gewichtung die Anzahl verschiedener Partitionen der Zahl 4 in 4, 3, 2 oder 1 Elemente ablesen. Offenbar erhält man für $a = 1$ die übliche Kardinalität also aus $\boxed{S_w}$ wieder $\boxed{S}$.

Definition 1.2.5. *Sei F_w eine R-gewichtete Spezies.*

1.) Die **erzeugende Reihe** *von F ist die exponentielle Potenzreihe $F_w(x)$ definiert durch*

$$F_w(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} |F(\underline{n})|_w \frac{x^n}{n!},$$

2.) Mit der zuvor diskutierten Vertretermenge der Isomorphieklassen von F-Strukturen ist die **typ-erzeugende Reihe** *von F_w definiert durch*

$$\widetilde{F_w}(x) \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} |F(\underline{n})/\sim|_w x^n.$$

3.) **Zykelindexreihe** *Z_{F_w} von F_w ist definiert als*

$$Z_{F_w}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} |\mathrm{Fix}(F(g))|_w \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i(g)}.$$

Bemerkung 1.2.6. *(i) Sind $g, h \in S_n$ konjugiert, so gilt $|\mathrm{Fix}(F(g))|_w = |\mathrm{Fix}(F(h))|_w$. Also kann man wie im ungewichteten Fall schreiben:*

$$Z_{F_w}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}} |\mathrm{Fix}(F(\mathbf{n}))|_w \frac{\mathbf{x^n}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})}.$$

(ii) Es gilt wieder wie im gewöhnlichen Fall

$$F_w(x) = Z_{F_w}(x, 0, 0, ...)$$
$$\widetilde{F_w}(x) = Z_{F_w}(x, x^2, x^3, ...)$$

1.3 Gewicht von Verknüpfungen und Operatoren

Im folgenden sollen für alle bisher eingeführten Verknüpfungen und Operatoren von Spezies die Übertragung auf gewichtete Spezies untersucht werden.

In der Tabelle nach Bemerkung 3.75 des zugehörigen Skriptes findet man die Fortsetzungen der zugrundeliegenden Gewichtsfunktionen auf eine neu konstruierte Spezies. Die getroffene Wahl lässt sich wie folgt erklären:

(i) Da die Summe und Produkt von Spezies analog zu Summe und Produkt von gewichteten Mengen definiert wurden liefert Satz 1.1.1 sofort das Gewicht für die Addition und Cartesisches Produkt von gewichteten Spezies.

(ii) Betrachtet man $((F \cdot G)(M), \mu)$ als gewichtete Menge, so erklärt

$$\begin{aligned} |(F \cdot G)(M)|_\mu &= |\biguplus_{T \subset M} F(T) \times G(M-T)|_\mu \\ &= \sum_{T \subset M} |F(T) \times G(M-T)|_\mu \\ &= \sum_{T \subset M} |F(T)|_w \cdot |G(M-T)|_v \end{aligned}$$

die Wahl des Gewichtes $\mu(a, b) = w(a)v(b)$ für das Produkt von gewichteten Spezies. Außerdem sieht man, dass es bei der Gewichtung nur auf die Zusammensetzung der $F \cdot G$-Struktur ankommt.

(iii) Nach Definition der Komposition (Substitution) schreiben wir die $F \circ G$-Strukturen als Tripel $(\pi, \phi, (\gamma_p)_{p\in\pi})$ wobei π eine Partition darstellt - also für das Gewicht irrelevant ist - und ϕ eine F-Struktur sowie γ_p G-Strukturen sind. Dementsprechend ist das Gewicht einer solchen $F_w \circ G_w$-Struktur
$$\mu((\pi, \phi, (\gamma_p)_{p\in\pi})) = w(\phi) \prod_{p\in\pi} v(\gamma_p).$$

(iv) Für die Ableitung, also das Weglassen eines Elementes, muss die Gewichtsfunktion offenbar nicht verändert werden.

(v) Die punktierte Spezies entsteht für eine endliche Menge $M \in \mathcal{B}$ durch $F^\bullet(M) = F(M) \times M$. Da M keine gewichtete Menge ist muss von der $F^\bullet$-Struktur (s, m) nur s bewertet werden, also $\mu(s) = w(s)$.

Bereits bei der Substitution nicht-gewichteter Spezies mussten typ-erzeugende Reihe und Zykelindexreihe verketteter Spezies neu definiert werden. Für die gewichtete Variante der Substitution ist eine erneute Anpassung notwendig [1].

Definition 1.3.1. *Seien F_w, G_v zwei gewichtete Spezies. Die plethystische Substution für die Zykelindexreihen ist definiert durch*

$$(Z_{F_w \circ G_v})(x) = Z_{F_w}((Z_{G_v})_1, (Z_{G_v})_2, \dots),$$

wobei $(Z_{G_v})_k = (Z_{G_{v^k}})(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$ für $k = 1, 2, \dots$. Damit ist auch die typ-erzeugende Reihe definiert als
$$(\widetilde{F_w \circ G_v})(x) = Z_{F_w}(\widetilde{G_v}(x), \widetilde{G_{v^2}}(x^2), \dots).$$

Einen ausführlichen Beweis für die Notwendigkeit und Eindeutigkeit der Definition findet man in *Combinatorial Species and Tree-like Structures* [1].

Bis auf diese Ausnahme werden alle Konstruktionen identisch wie zuvor (nur mit Gewicht anstelle der Kardinalität) definiert und somit bleiben bestehende Identitäten erhalten.

Übung 1.3.2. *Sei F eine Spezies und a eine Unbestimmte. Man kann F zu einer $\mathbb{Z}[a]$-gewichteten Spezies F_a machen, indem man jeder Struktur in $F(M)$ das Gewicht a gibt. Dann ist $F_a(x) = aF(x)$ und $Z_{F_a} = aZ_F$.*

Beweis. Sei also $w : F(\underline{n}) \to \mathbb{Z}[a], m \mapsto a$. Für jede gewichtete Menge (M, w), $M \subset F(\underline{n})$ ist dann $|M|_w = \sum_{m\in M} a = a|M|$. Betrachte die erzeugende Reihe

$$F_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |F(\underline{n})|_w \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} a \cdot |F(\underline{n})| \frac{x^n}{n!} = aF(x)$$

und die Zykelindexreihe

$$\begin{aligned} Z_{F_a}(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{n}} |\mathrm{Fix}(F(\mathbf{n}))|_w \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})} \\ &= \sum_{\mathbf{n}} a \cdot |\mathrm{Fix}(F(\mathbf{n}))| \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}}}{\mathrm{aut}(\mathbf{n})} = aZ_{F_a}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

Beispiel 1.3.3 (Fortsetzung). *Je nachdem was gezählt werden soll kann eine andere Bewertung nützlich sein. Wie im vorherigen Beispiel angedeutet, sollen bei der Spezies symmetrische Gruppe* $\boxed{S}$ *die Zykeltypen gezählt werden. Gibt man jeder Struktur in Zy also jedem Zykel das Gewicht a, dann erhalten die aus Zykeln zusammengesetzten Strukturen* σ *in* $\boxed{eM}(\boxed{Zy_a})$ *als Produkt der Gewichte das Gewicht* $a^{zyk(\sigma)}$ *wie in* $\boxed{S_w}$ *aus* Bsp. 1.2.4 *zuvor. Also*

$$\boxed{S_w} = \boxed{eM}(\boxed{Zy_a}).$$

Zur Erinnerung waren

$$\boxed{eM}(x) = e^x, \qquad Z_{\boxed{eM}}(x_1, x_2, ...) = \exp(x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + ...) = \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\frac{x_i}{i})$$

und

$$\boxed{Zy}(x) = \log(\frac{1}{1-x}), \quad \widetilde{\boxed{Zy}}(x) = \frac{x}{1-x}, \quad Z_{\boxed{Zy}}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \log(\frac{1}{1-x_k}).$$

Zusammen mit der letzten Übung ergeben sich die erzeugende Funktion

$$\boxed{S_w}(x) = \boxed{eM}(\boxed{Zy_a}(x)) = \exp(a \log(\frac{1}{1-x})) = (\frac{1}{1-x})^a$$

sowie die typ-erzeugende Funktion

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boxed{S_w}}(x) &= Z_{\boxed{eM}}(\widetilde{\boxed{Zy_a}}(x), \widetilde{\boxed{Zy_{a^2}}}(x^2), \ldots) \\
&= \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \widetilde{\boxed{Zy_{a^i}}}(x^i)) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \frac{a^i x^i}{1-x^i}) = \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i x^i}{i} \sum_{k=0}^{\infty} x^{ik}) \\
&= \exp(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^i x^i}{i} x^{ik}) = \exp(\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i x^{i(k+1)}}{i}) \\
&= \exp(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a^i x^{ik}}{i}) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-ax^k}
\end{aligned}$$

mit der bekannten Identität $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i} = \log(\frac{1}{1-x})$. *Die Zykelindexreihe ist*

$$\begin{aligned}
Z_{\boxed{S_w}}(x_1, x_2, ...) &= Z_{\boxed{eM}}((Z_{\boxed{Zy_a}})_1, (Z_{\boxed{Zy_a}})_2, ...) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\frac{1}{i} Z_{\boxed{Zy_{a^i}}}(x_i, x_{2i}, x_{3i}, ...)) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\frac{1}{i} a^i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \log(\frac{1}{1-x_{ik}})) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \exp(\frac{1}{i} a^i \log(\prod_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{1-x_{ik}})^{\frac{\varphi(k)}{k}})) \\
&= \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{1-x_{ik}})^{a^i \frac{\varphi(k)}{ik}} = \prod_{l=1}^{\infty} (\frac{1}{1-x_l})^{\sum_{d|l} a^d \frac{\varphi(\frac{l}{d})}{l}}
\end{aligned}$$

Berechnet man einige Koeffizienten von $\boxed{\widetilde{S_w}}(x)$ so erhält man beispielsweise als Koeffizient von $x_4: a^4+a^3+2a^2+a$ (Vergleiche mit Beispiel 1.2.4) oder von $x^6: a^6+a^5+2a^4+3a^3+3a^2+a$. Der Koeffizient von x^n entspricht dabei dem Inventar $\|\boxed{S}(\underline{n})/\sim|_w$. Dabei kann $c\cdot a^i$ interpretiert werden als c verschiedene Konjugiertenklassen bestehend aus i Zykeln. Mithilfe der binomischen Reihe erhält man eine Formel für die Koeffizienten der erzeugenden Reihe $\boxed{S_w}(x)$:

$$\boxed{S_w}(x) = (1-x)^{-a} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-a}{k}(-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}(-a-i+1)\right)(-1)^k\frac{x^k}{k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{k}(a+i-1)\right)\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{k-1}(a+i)\right)\frac{x^k}{k!}$$

Man liest ab: $\|\boxed{S}(\underline{n})|_w$ hat das Inventar $a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1)$. Hierbei sollte $c\cdot a^i$ als "c Permutationen in S_n bestehend aus i Zykeln" gelesen werden.

Ein sehr ähnliches Ergebnis erhält man bei der Spezies der Partitionen:

Beispiel 1.3.4. *Sei $\boxed{Pa_w} := \boxed{eM}(\boxed{eM_{+,t}})$. Also erhält $\boxed{eM_+}$ als Struktur der zusammenhängenden $\boxed{Pa_w}$-Strukturen eine Gewichtsfunktion (wie die der Zykel im vorherigen Beispiel) mit der Unbestimmten t.*

$$\boxed{Pa_w}(x) = \boxed{eM}(\boxed{eM_{+,t}}(x)) = \exp(t\,\boxed{eM_+}(x)) = \exp(t\exp(x)-1)$$
$$\boxed{\widetilde{Pa_w}}(x) = Z_{\boxed{eM}}(\boxed{\widetilde{eM_{+,t}}}(x), \boxed{\widetilde{eM_{+,t^2}}}(x^2), \dots) = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-tx}$$

da $\boxed{\widetilde{eM_{+,t}}}(x) = \boxed{\widetilde{Zy_t}}(x)$. Also geht man wie im vorherigen Beispiel vor. Die Zykelindexreihe bekommt man sofort durch einsetzen:

$$Z_{\boxed{Pa_w}}(x_1, x_2, \dots) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}Z_{\boxed{eM_{+,t^k}}}(x^k)\right)$$
$$= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{x_{ki}}{i}\right)-1\right)\right)$$

Beide Beispiele haben gemeinsam, dass die betrachteten Spezies zusammengesetzte Spezies sind, also der Art $F = \boxed{eM}\circ G$ und jeweils wurde durch die Gewichtung die Zusammenhangskomponenten gezählt. Das Ergebnis lässt sich verallgemeinern:

Satz 1.3.5. *Sei F eine zusammengesetzte Spezies. Man gewichte jede F-Struktur s durch*

$$w^a(s) = a^{z(s)}$$

wobei z(s) die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von s ist. Dann sind

(i) $F_{w^a}(x) = F(x)^a$

(ii) $\widetilde{F_{w^a}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\tilde{F}(x^k)^{\lambda_k(a)}$

(iii) $Z_{F_{w^a}}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} Z_F(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)^{\lambda_k(a)}$

mit $\lambda_k(a) = \frac{1}{k}\sum_{d|k} \mu(\frac{k}{d})a^d$. *Dabei ist* μ *die zahlentheoretische Möbiusfunktion.*

Beweis. Zusammengesetzte Spezies deren Zusammenhangskomponenten im Gewicht gezählt werden sollen sind gegeben durch $F_{w^a} = \boxed{eM} \circ G_a$. Ohne Gewichtung gilt natürlich $F = \boxed{eM} \circ G$.

(i) $F_{w^a}(x) = \exp(G_a(x)) = \exp aG(x) = \exp G(x)^a = F(x)^a$

(ii) folgt direkt aus (iii) wegen $Z_F(x^k, x^{2k}, \dots) = \tilde{F}(x^k)$.

(iii) Benutze zunächst die bekannte Formel, welche zwei Potenzreihen a, b bei plethystischer Substitution in Relation zueinander setzt:

$$b = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} a_k \Leftrightarrow a = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} b_k \tag{$\star$}$$

Es ist $Z_F(x) = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Z_G(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$ bzw. $\log Z_F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Z_G(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots)$. Wendet man nun ($\star$) darauf an so ist also:

$$Z_G(x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_F(x_k, x_{2k}, \dots) = \log(\prod_{k=1}^{\infty} Z_F(x_k, x_{2k}, \dots)^{\frac{\mu(k)}{k}})$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
Z_{F_{w^a}}(x) &= \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} Z_{G_{a^k}}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \frac{1}{k} a^k Z_G(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \frac{a^k}{k} \log(\prod_{i=1}^{\infty} Z_F(x_{ik}, x_{2ik}, \dots)^{\frac{\mu(i)}{i}}) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{\infty} Z_F(x_{ik}, x_{2ik}, \dots)^{a^k \frac{\mu(i)}{ki}} \\
&= \prod_{l=1}^{\infty} Z_F(x_l, x_{2l}, \dots)^{\sum_{d|l} a^d \frac{\mu(l/d)}{l}}
\end{aligned}$$

□

Quellen

[1] P. Leroux F. Bergeron, G. Labelle. *Combinatorial Species and Tree-like Structures.* Cambridge University Press, 1998.

[2] Wilhelm Plesken. Algebraische Kombinatorik, Skript zur Volresung, 2014.