

Algebraische Kombinatorik - Der Burnsidering und verfeinertes Zählen

S. Stüttgen

April 2019

Diese Ausarbeitung wird sich mit den Kapiteln 2.3 und 2.4 des Skriptes zur Vorlesung Algebraische Kombinatorik von W. Plesken aus dem Sommersemester 2014 beschäftigen. Es wird der Burnsidering behandelt werden, sowie eine Anwendung in der Polyaschen Abzähltheorie. Der Burnsidering ist der Ring der formalen Differenzen von G -Mengen und er findet Anwendung bei verschiedenen kombinatorischen Fragestellungen, von denen einige beleuchtet werden sollen. Insbesondere werde ich im zweiten Teil der Ausarbeitung eine Anwendung auf Färbungsprobleme vorstellen. Für Details und Beweise des Großteils der verwendeten Sätze wird oben erwähntes Skript herangezogen.

1 Der Burnsidering

Der Burnsidering ist definiert als der Ring der formalen Differenzen von Äquivalenzklassen von G -Mengen. Für eine formale Definition siehe *Plesken, S.41 f, Satz 2.22*.

Übung 1.1. Beweise *Satz 2.22(3)*: Ähnlichkeitsklassen von G -Mengen lassen sich als Elemente des Burnsiderings auffassen, und bestimmen einer Basis des Burnsiderings als \mathbb{Z} -Modul.

Beweis. Für (1) und (2) siehe *Plesken, S.42*.

3.) Benenne die Abbildung, die jeder Ähnlichkeitsklasse von G -Mengen ihr Element im Burnsidering zuweist mit π . Seien M, N nun G -Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned}\pi([M] + [N]) &= ([M] + [N]) - [\emptyset] \\ &= ([M] - [\emptyset]) + ([N] - [\emptyset]) \\ &= \pi([M]) + \pi([N]).\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt, da $[\emptyset]$ das einzige neutrale Element der Addition ist, dass

$$\begin{aligned}\pi([M][N]) &= ([M][N]) - [\emptyset] \\ &= ([M][N] - [\emptyset][\emptyset]) + ([M][\emptyset] + [N][\emptyset]) \\ &= ([M] - [\emptyset]) \cdot ([N] - [\emptyset]) \\ &= \pi([M])\pi([N]).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Additivität und Multiplikativität von π .

Für die Injektivität seien nun M, N zwei G -Mengen mit $\pi([M]) = \pi([N])$. Dies ist äquivalent zu $[M] - [\emptyset] = [N] - [\emptyset]$, was genau dann der Fall ist, wenn die Vertreter der Äquivalenzklassen in Relation zueinander stehen; sprich, wenn $([M], [\emptyset]) \sim ([N], [\emptyset])$ gilt. Daraus folgt direkt mit der Definition der Äquivalenzrelation und der Addition in $B_{\geq 0}(G)$, dass bereits $[M] = [N]$ gilt, womit die Injektivität der Abbildung gezeigt ist.

Zeige somit noch, dass $B(G)$ als \mathbb{Z} -Modul frei ist mit Basis $[G/U]$, wo U ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G durchläuft. Dazu sei $[M] \in B_{\geq 0}(G)$.

Der Hauptsatz über transitive G -Mengen liefert nun

$$[M] = \left[\bigcup_{i \in I} M_i \right] = \sum_{i \in I} [M_i] = \sum_{i \in I} [G/\text{Stab}_G(m_i)],$$

wo $M_i, i \in I$ die Bahnen der Operation von G auf M sind, und $m_i \in M_i$ ein Vertreter der jeweiligen Bahn. Aus der Computeralgebra ist bekannt, dass für ein weiteres Element der Bahn $n_i \in M_i$ gilt, dass $\text{Stab}_G(m_i)$ und $\text{Stab}_G(n_i)$ konjugiert sind.

Da der Burnsidering als Ring von formalen Differenzen von Äquivalenzklassen von G -Mengen definiert ist, sind somit die $[G/U]$, wo U ein Vertretersystem der Konjugiertenklassen von Untergruppen von G durchläuft, additive Erzeuger von $B(G)$. Die \mathbb{Z} -lineare Unabhängigkeit ergibt sich, da eine transitive G -Menge selbst eine Bahn unter der Operation bildet. Somit lässt sich eine transitive G -Menge nicht als Linearkombination anderer Erzeuger des Burnsiderings schreiben. \square

Satz 2.22(2) kann man entnehmen, dass die Markentafel Aufschluss über die Struktur des Burnsiderings liefert. Identifiziert man die Zeilen der Markentafel mit den zugehörigen transitiven G -Mengen, so liefert das eintragsweise Multiplizieren zweier Zeilen und das anschließende Schreiben als Linearkombination der Zeilen der Markentafel, das Produkt zweier Erzeuger des Burnsiderings als Linearkombination der Basiselemente. Dies wird in einem Beispiel veranschaulicht werden. Zuvor aber ein

Lemma 1.2. *Seien G eine Gruppe und U, H zwei Untergruppen von G . Dann ist $\text{fix}_U(G/H) > 0$ genau dann, wenn U zu einer Untergruppe von H konjugiert ist.*

Beweis. Es ist $\text{fix}_U(G/H) = |\{gH \in G/H \mid UgH = gH\}|$. Die Bedingung $UgH = gH$ ist äquivalent zu $g^{-1}UgH = H$, was wiederum äquivalent zu der Aussage $g^{-1}Ug \leq H$ ist. Damit folgt die Aussage. \square

Beispiel 1.3. Wir wollen die Markentafel der zyklischen Gruppe mit 12 Elementen aufstellen. Der Untergruppenverband der C_{12} ist unten zu sehen. Dann ergibt sich die Markentafel der C_{12} zu

$$M(C_{12}) = \begin{pmatrix} 12 & & & & & \\ 6 & 6 & & & & \\ 4 & & 4 & & & \\ 3 & 3 & & 3 & & \\ 2 & 2 & 2 & & 2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Zeilen der Matrix mit den transitiven G -Mengen $C_{12}/\{1\}, C_{12}/C_2, C_{12}/C_3, C_{12}/C_4, C_{12}/C_6, C_{12}/C_{12}$ identifiziert werden und die Spalten mit den Untergruppen $\{1\}, C_2, C_3, C_4, C_6, C_{12}$. In der ersten Spalte stehen die möglichen Bahnlängen, beziehungsweise die Beträge der Quotienten von Gruppe und Untergruppe, da jedes Mengenelement Fixpunkt unter der Gruppe $\{1\}$ ist. Auf der Hauptdiagonalen stehen die Indizes der Normalisatoren in ihren Untergruppen, da $UgU = gU$ äquivalent zu $g^{-1}UgU = U$, also $g \in N_G(U)$ ist.

Multipliziert man nun beispielsweise die vierte und fünfte Zeile eintragsweise miteinander, so erhält man die zweite Zeile. Dies sagt uns nun, dass im Burnsideing

$$[C_{12}/C_4][C_{12}/C_6] = [C_{12}/C_2]$$

gilt. Daraus lässt sich also ablesen, dass jede zu $C_{12}/C_4 \times C_{12}/C_6$ ähnliche C_{12} -Menge eine transitive Menge mit Stabilisator konjugiert zu C_2 ist.

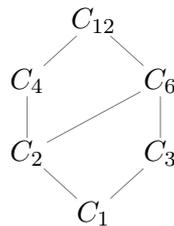


Abbildung 1: Untergruppenverband der C_{12}

Allgemeiner lässt sich für alle zyklischen Gruppen eine Aussage über ihre Markentafel treffen.

Bemerkung 1.4. Sei C_n die zyklische Gruppe von Ordnung n . Dann gilt für alle Untergruppen C_i, C_m von C_n , dass

$$\text{fix}_{C_i}([C_n/C_m]) = \begin{cases} 0 & i \nmid m \\ n/m & i \mid n \end{cases}$$

Beweis. Aus der Computeralgebra ist bekannt, dass die Ordnung einer Untergruppe die Gruppenordnung teilt. Da die Konjugiertenklassen von Untergruppen zyklischer Gruppen nur einelementig sind, folg mit Lemma 1.3, dass

$$\text{fix}_{C_i}([C_n/C_m]) > 0 \Leftrightarrow C_i \leq C_m \leq C_n \Leftrightarrow i \mid m \mid n$$

Sei dies der Fall, sowie $C_n := \langle a \rangle$ mit $\text{ord}(a) = n$.

Dann ist $C_n/C_m = \{a^{j \bmod n/m} \mid j \in \mathbb{N}\}$, sowie $C_i = \{a^{k \cdot (n/i)} \mid k \in \{0, \dots, i-1\}\}$. Seien nun $a^{k \cdot (n/i)} \in C_i$, sowie $a^j \bmod n/m \in C_n/C_m$. Dann ist

$$a^{k \cdot (n/i)} \cdot a^j \bmod n/m = a^{k \cdot (n/i) + j \bmod n/m} = a^j \bmod n/m,$$

da $i \mid m \mid n$ und somit $\frac{n}{m} \mid \frac{n}{i}$. Somit ist jedes Element von C_n/C_m unter der Operation einer Untergruppe von C_m fix. Daraus folgt die Aussage. \square

Plesken, S.44, Satz 2.25 liefert einen Ansatz zur Berechnung des Burnsiderings über den Abzählring des Untergruppenverbandes bezüglich \cap und Konjugation in G . Dieser wird im folgenden Beispiel angewandt:

Beispiel 1.5. Wir wollen den Burnsidering der symmetrischen Gruppe mit 24 Elementen mithilfe des Abzählring des Untergruppenverbandes bzgl \cap und Konjugation bestimmen. Dazu findet sich ein Diagramm des Untergruppenverbandes der S_4 unten. Die Vertreter der Konjugiertenklassen seien $C_1, \langle(1, 3)(2, 4)\rangle, \langle(1, 2)\rangle, C_3, \langle(1, 3), (2, 4)\rangle, \langle(1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4)\rangle, C_4, S_3, D_8, A_4, S_4$. Die Konjugiertenklassen von Untergruppen bilden damit einen Verband mit

$$\begin{aligned} U \vee V &= \langle U \cup V \rangle, U \wedge V = U \cap V, \\ U \leq V &\Leftrightarrow U \subseteq V \end{aligned}$$

Also ergibt sich die Matrix

$$A^\vee = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ & & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ & & & & & & & 1 & 0 & 0 & 4 \\ & & & & & & & & 1 & 0 & 3 \\ & & & & & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Der Burnside-Ring liefert weiterhin für eine G -Menge M einen Überblick über die Bahnen der Operation von G auf $\text{Pot}_k(M)$.

Übung 1.6. Beweise Plesken, S.46, Bem 2.27.

Beweis. 1.) Sei M eine endliche G -Menge. Dann operiert G auf $\text{Pot}_k(M)$ durch

$$gM_i := \{gm_i \mid m_i \in M_i\},$$

mit $M_i \in \text{Pot}_k(M)$. Die Operation des Einselements und die Assoziativität vererbt sich aus der Operation der Gruppe auf der Menge M . Zeige also die Wohldefiniertheit der Operation:

Sei $g \in G, m_i, m_{i_1}, m_{i_2} \in M_i$, mit $gm_{i_1} = m_i = gm_{i_2}$. Dies ist äquivalent zu

$$m_{i_1} = g^{-1}gm_{i_1} = g^{-1}m_i = g^{-1}gm_{i_2} = m_{i_2}.$$

Damit ist $|M_i| = |gM_i|$. Mit der Wohldefiniertheit der Operation von G auf M folgt also, dass $gM_i \in \text{Pot}_k(M)$, und somit die Wohldefiniertheit obiger Operation.

2.) Seien M_1, M_2 zwei disjunkte G -Mengen.

Es ist

$$\sum_{i=0}^k [\text{Pot}_i(M_1)][\text{Pot}_{k-i}(M_2)] = \left[\bigcup_{i=0}^k (\text{Pot}_i(M_1) \times \text{Pot}_{k-i}(M_2)) \right].$$

Zeige also, dass diese Menge als G -Mengen ähnlich zu $\text{Pot}_k(M_1 \cup M_2)$ ist. Betrachte dazu

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Pot}_k(M_1 \cup M_2) &\rightarrow \bigcup_{i=0}^k (\text{Pot}_i(M_1) \times \text{Pot}_{k-i}(M_2)) \\ A &\mapsto (A \cap M_1, A \cap M_2). \end{aligned}$$

A ist k -elementige Teilmenge von $M_1 \cup M_2$. Somit gilt $0 \leq |A \cap M_i| \leq k$, sowie $A \cap M_i \subseteq M_i$, $i \in \{1, 2\}$. Aus der Disjunktheit von M_1 und M_2 folgt, dass $|A \cap M_1| + |A \cap M_2|$ gleich k ist. Somit ist φ wohldefiniert.

Die Abbildung ψ definiert durch

$$\begin{aligned} \psi : \bigcup_{i=0}^k (\text{Pot}_i(M_1) \times \text{Pot}_{k-i}(M_2)) &\rightarrow \text{Pot}_k(M_1 \cup M_2) \\ (A, B) &\mapsto A \cup B \end{aligned}$$

ist eine Umkehrabbildung zu φ . Damit ist φ bijektiv.

Bleibt die G -Äquivarianz zu zeigen. Dazu sei $g \in G$. Da M_i als G -Menge abgeschlossen unter der Operation von G ist, und somit aus $a_i \in A \cap M_i$ folgt, dass $ga_i \in gA \cap M_i$ gilt, ergibt sich

$$\begin{aligned} g \cdot \varphi(A) &= g(A \cap M_1, A \cap M_2) \\ &= (g(A \cap M_1), g(A \cap M_2)) \\ &= (gA \cap M_1, gA \cap M_2) \\ &= \varphi(gA). \end{aligned}$$

Somit ist φ eine G -Ähnlichkeit und die Aussage gezeigt.

3.) Sei M eine transitivie G -Menge, $A \in \text{Pot}_k(M)$, sowie zunächst $0 < k < |M|$.

Angenommen $A \in \text{Fix}_G(\text{Pot}_k(M))$. Dann wäre

$$G \cdot A = \{g \cdot a \mid g \in G, a \in A\} = A.$$

Da G transitiv auf M operiert, folgt damit auch $A \supseteq G \cdot a = M$. Da $|M| > k$ ist, ist das ein Widerspruch und somit $\text{fix}_G(\text{Pot}_k(M)) = \emptyset$.

Für $k = 0$ ist $\text{Pot}_0(M) = \{\emptyset\}$. Die leere Menge ist fix unter der Gruppenoperation als neutrales Element der Addition des Burnside-Rings.

Für $k = |M|$ ist $\text{Pot}_k(M) = \{M\}$. Da M selbst Bahn ist, ist M fix unter der Operation.

4.) Zeige lediglich, dass die Anzahl der G -Bahnen auf $M \times G/U$ gleich der Anzahl der U -Bahnen auf M ist.

Sei $m \in M$. Dann operiert G auf (m, U) derart, dass für $U \leq G$ gilt:

$$U(m, U) = (Um, U),$$

da die Untergruppe die zweite Komponente stabilisiert. Da G nun transitiv auf der zweiten Komponente operiert und die Operation diagonal definiert ist, gilt

$$|G(m, U)| = \lambda \cdot [G : U],$$

wobei λ der Länge der Bahn von U auf m entspricht.

$$\varphi : ((G/U) \times M)_G \rightarrow (M)_U, G(m, U) \mapsto Um$$

ist dann eine bijektive Abbildung. □

Übung 1.7. Sei G eine Gruppe, M, N zwei transitive G -Mengen. Wir wollen die Anzahl aller G -äquivarianten Abbildungen von M nach N bestimmen. Nach dem Hauptsatz über transitive G -Mengen sind M und N ähnlich zu G/U und G/V , wo U, V Vertreter von Konjugiertenklassen von Untergruppen von G sind.

Sei φ nun eine G -äquivariante Abbildung von M nach N . Dann lässt sich φ wegen der G -Äquivalenz durch $\varphi(U) = gV$ definieren, vorausgesetzt es gilt

$$u\varphi(U) = \varphi(uU) = \varphi(U) = gV$$

für alle $u \in U$. Dies ist aber äquivalent zu

$$UgV = gV.$$

Die Anzahl der G -äquivarianten Abbildungen ist also gegeben durch $|\{gV \in G/V \mid UgV = gV\}| = \text{fix}_U(G/V)$, was sich direkt in der Markentafel ablesen lässt.

Es stellt sich heraus, dass eine Menge von Untergruppen einer Gruppe, die abgeschlossen unter Konjugation, Schnittbildung und Erzeugnisbildung ist, eine reduzierte Markentafel der Gruppe liefern. Dies kann dann nützlich sein, wenn keine vollständige Markentafel benötigt wird. Ein Beispiel für eine solche Menge von Untergruppen ist die Menge der sogenannten Young-Untergruppen, die in *Plesken, S.47, Satz 2.28* eingeführt wurden.

Übung 1.8. Beweise *Plesken, S.47, Satz 2.28*.

Beweis. Sei M eine Menge, P eine Partition der Menge M .

1.) Sei $g \in \text{Stab}_{S_M}(P)$, dann gilt für $p \in P, h \in Y(P)$, dass

$$gp \in P, \text{ sowie } ghg^{-1}p = gh(g^{-1}p) = gg^{-1}p = p,$$

da $g^{-1}p \in P$. Da p beliebig gewählt war, ist somit $ghg^{-1} \in Y(P)$ und somit $g \in N_{S_M}(Y(P))$.

Sei nun $g \in N_{S_M}(Y(P))$. Dann gilt für $h \in Y(P)$, dass $ghg^{-1} \in Y(P)$. Für ein beliebiges $p \in P$ gilt dann:

$$gp = gg^{-1}h^{-1}gp = h^{-1}gp.$$

Damit ist $h \in \text{Stab}_{S_M}(gp)$. Da p beliebig gewählt war, ist $gp \in P$ und somit $g \in \text{Stab}_{S_M}(P)$.

2.) und 3.) Zunächst zum Abschluss unter Konjugation: Für $g \in S_M, Y(P) \in \mathcal{Y}(M)$ gilt $gY(P)g^{-1} \in \mathcal{Y}(M)$, denn für $Y(P)$ ist

$$gY(P)g^{-1} = g\left(\bigcap_{X \in P} \text{Stab}_{S_M}(X)\right)g^{-1} = \bigcap \text{Stab}_{S_M}(gX) = Y(gP).$$

Kommen wir zum Abschluss bezüglich des Schnitts von Young-Untergruppen: Grundsätzlich gilt für Partitionselemente der Partionen $P, S, p \in P, s \in S$, dass $\text{Stab}_{S_M}(p) \cap \text{Stab}_{S_M}(s) = \text{Stab}_{S_M}(p \cap s)$ ist, denn für $m \in p \cap s, g \in \text{Stab}_{S_M}(p) \cap \text{Stab}_{S_M}(s)$ gilt

$$gm \in p, gm \in s, \text{ also } gm \in p \cap s.$$

Daraus folgt nun direkt aus der Definition der Young-Untergruppe, dass für $Y(P), Y(S) \in \mathcal{Y}(M)$ gilt, dass $Y(P) \cap Y(S) = Y(P \wedge S)$, wobei $P \wedge S$ aus den nichtleeren Schnitten der Partitionselemente von P und S besteht.

Des weiteren ist $\langle Y(P) \cup Y(S) \rangle = Y(P \vee S)$, wobei $P \vee S$ folgendermaßen definiert ist: Für $q \in Q \in P \vee S$ gilt:

$$\text{Ist } q \in P_1 \in P, q \in S_1 \in S, \text{ so ist } P_1 \subseteq Q, S_1 \subseteq Q.$$

Dies gilt, da für $g \in Y(P), h \in Y(S), q \in P_1 \in P, q \in S_1 \in S$

$$ghq = g(hq) \in P_2 \text{ mit } hq \in S_1 \cap P_2$$

für ein $P_2 \in P$ ist. Analog erhält man $hgq \in S_2$ mit $S_2 \in S$, $gq \in P_1 \cap S_2$.
 Es ist $P(M) \cong \mathcal{Y}(M)$, da für eine Young-Untergruppe $Y(P)$

$$Y(P) \cong S_{P_1} \times \cdots \times S_{P_m} \text{ mit } P = \{P_1, \dots, P_m\}.$$

Die Menge der Partitionen steht also in Bijektion mit den Young-Untergruppen.
 Da sich wie oben gezeigt das Rechnen in den Verbänden überträgt, ist
 $P(M) \rightarrow \mathcal{Y}(M), P \mapsto Y(P)$ ein S_M -äquivarianter Verbandsisomorphismus. \square

2 Verfeinertes Zählen

In diesem Abschnitt wird eine Anwendung des Burnside-Rings auf das Polynomische Abzählproblem vom Anfang des Kapitels thematisiert. Für eine Übersicht der verwendeten Aussagen und Schreibweisen siehe *Plesken, Abschnitt 2.4*.

Die elementare Aussage zum Berechnen der Anzahl der Färbungen einer G -Menge unter G ist *Plesken, S.50, Satz 2.33*.

Beweis. Hier sollen lediglich die Beweisideen skizziert werden.

1.) Zeige dazu die äquivalente Aussage

$$(q_1, \dots, q_s)M(G) = (p_1, \dots, p_s).$$

Da $((q_1, \dots, q_s)M(G))_1, p_1$ Polynome sind, vergleiche die Koeffizienten von $x_{1a(1)} \cdots x_{na(n)}$.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^s r_{a(1), \dots, a(n); j} \cdot \text{fix}_{U_j}(G/U_j) \\ &= \sum_{j=1}^s \#(\text{Färbungen von FT } a(1), \dots, a(n) \text{ ähnlich zu } G/U_j, \text{ fix auf } U_j) \\ &= \#(\text{Färbungen von FT } a(1), \dots, a(n) \text{ fix auf } U_j) \end{aligned}$$

Damit sind die Polynome und somit auch die betrachteten Spalten gleich und die Behauptung gezeigt.

2.) Die Aussage ergibt sich aus der selben Überlegung wie im Beweis zu *Bemerkung 2.27 (4)* und der Definition der Polynome p_i . \square

Zum Abschluss soll nun dieser Satz und die anschließende Bemerkung *Plesken, S.51, Bem. 2.34* verwendet werden, um das letzte Beispiel im Kapitel 2 zu Ende zu rechnen.

Übung 2.1. In dem Beispiel operiert die A_4 orientierungserhaltend auf einem gleichmäßigen Tetraeder. Es wurde bereits die Anzahl der unterschiedlichen Färbungen der Kanten berechnet. Die Menge der Kanten ist mit M bezeichnet. Hier soll zusätzlich die Anzahl der Färbungen der Ecken des Tetraeders berechnet werden.

Berechne dazu die Anzahl der Färbungen der transitiven Menge N mit vier Punkten unter der A_4 . Dann ist $[N] = [A_4/C_3]$.

U	$[A_4/C_3][A_4/U]$	p_u
C_1	$4[G/C_1]$	$(x+y)^4$
C_2	$2[G/C_1]$	$(x^2 + y^2)^2$
C_3	$[G/C_1] + [G/C_3]$	$(x^3 + y^3)(x + y)$
V_4	$[G/C_1]$	$(x^4 + y^4)$
A_4	$[G/C_3]$	$(x^4 + y^4)$

Bestimme nun die q_i durch Multiplikation mit der Markentafel gemäß *Satz 2.33*. Dann erhält man

$$(0, x^2y^2, x^3y + xy^3, 0, x^4 + y^4),$$

woraus sich schließlich

$$(x^2y^2)[G/C_2] + (x^3y + xy^3)[G/C_3] + (x^4 + y^4)[G/A_4]$$

ergibt. Insgesamt gibt es also vier Färbungen der Menge N unter der A_4 . Nun wollen wir *Bem. 2.34* anwenden, um beispielsweise die Anzahl der Färbungen von $[M] + [N]$ unter der A_4 mit Färbungstyp der Kanten x^4y^2 zu bestimmen.

Sei dazu $[\zeta^{-1}(x^4y^2)]$ wie in *Bem. 2.34*. Da die Färbung der Kanten irrelevant ist, ergibt sich somit die Anzahl der Färbungen zu

$$\sum_{i=1}^s v_i \cdot \left(\sum_{\beta(1)+\beta(2)=4} \left(\sum_{j=1}^s w_{\beta(1),\beta(2);j} \cdot \left(\sum_{k=1}^s m_{ijk} \right) \right) \right).$$

Mit $[\zeta^{-1}(x^4y^2)] = [G/C_1] + [G/V_4]$ ist somit die Anzahl der Färbungen gegeben durch

$$(1 \cdot (1 \cdot 6 + (1 \cdot 4 + 1 \cdot 4) + 1 \cdot 1)) + (1 \cdot (1 \cdot 3 + (1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) + 1 \cdot 1)) = 21.$$

Genauso lässt sich berechnen, wie viele Färbungen es gibt, wenn der Färbungstyp der Ecken, der Ähnlichkeitstyp von Ecken- oder Kantenfärbungen, oder der simultane Ähnlichkeitstyp von Ecken- und Kantenfärbungen fixiert wird.