Theta-Reihen von Gittern als Modulformen

von David Caspers

Inhalt

Diese Ausarbeitung basiert auf Wolfang Ebelings *Lattices and Codes* und soll dem Leser einen Überblick ber die ersten vier Abschnitte des zweiten Kapitels (*Theta-Reihen und Gewichtszähler*) verschaffen. Das Ziel ist der Beweis eines Theorems welches aussagt, dass die Theta-Reihe jedes geraden, unimodularen Gitters der Dimension n eine Modulform mit Gewicht $\frac{n}{2}$ ist, und welches außerdem zeigt, dass die Dimension eines jeden solchen Gitters durch 8 teilbar sein muss.

2 Theta-Reihen und Gewichtszähler

2.1 Die Theta-Reihe eines Gitters

Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter. Wir definieren $\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \tau > 0\} \subset \mathbb{C}$ als die obere Halbebene in der Gaußschen Zahlenebene.

Für $\tau \in \mathbb{H}$ verwenden wir die Notation $q := e^{2\pi i \tau}$.

Definition. Die *Theta-Reihe* des Gitters Γ ist definiert als die Funktion

$$\vartheta_\Gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}, \tau \mapsto \sum_{x \in \Gamma} q^{\frac{1}{2} x \cdot x},$$

Hier meint $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das gewöhnliche Euklidische Skalarprodukt.

Später werden wir zeigen, dass diese Reihe für alle $\tau \in \mathbb{H}$ konvergiert, also dass ϑ_Γ eine wohldefinierte Funktion ist. Zuerst betrachten wir den Spezialfall ganzzahliger gerader Gitter. Man erinnere sich, dass ein Gitter Γ *ganz* genannt wird, falls $x \cdot x \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in \Gamma$, und dass ein ganzes Gitter zudem *gerade* genannt wird, falls $x \cdot x \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in \Gamma$.

Bemerkung. *Für ein gerades Gitter Γ ist die Theta-Reihe ϑ_Γ wohldefiniert auf $\mathbb{H}$.*

Beweis. Dies ist offenbar äquivalent zur Konvergenz der Reihe $\sum_{x \in \Gamma} q^{\frac{1}{2} x \cdot x}$ für beliebiges $\tau \in \mathbb{H}$. Da Γ ganz ist, gilt $x \cdot x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ für $x \in \Gamma$. Daher besteht die Theta-Reihe aus Summanden der Form $q^{\frac{1}{2} s}$ mit zugehörigen Koeffizienten, die die Anzahl aller $x \in \Gamma$ mit $x \cdot x = s$ zählen, wobei s über die nichtnegativen ganzen Zahlen läuft.

Da Γ als gerade angenommen ist, kann die Theta-Reihe also wiefolgt notiert werden:

$$\vartheta_\Gamma(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r,$$

dabei ist $a_r = |\{x \in \Gamma \mid x \cdot x = 2r\}|$. Diese Zahlen sind endlich, da die Menge $\{x \in \Gamma \mid x \cdot x = 2r\}$ in der Kugel um den Ursprung mit Radius $\sqrt{2r}$ enthalten ist, die nur endlich viele Elemente aus Γ enthalten kann (Durchschnitt einer kompakten mit einer diskreten Menge). Genauer zählen die Koeffizienten a_r wieviele Punkte $x \in \Gamma$ auf dieser Kugel liegen. Sei $r \geq 0$ fix. Da Γ diskret ist, findet sich um jeden Gitterpunkt auf der Kugel mit Radius $\sqrt{2r}$ eine Umgebung in der keine weiteren Gitterpunkte liegen.

Weiter kann man die Umgebungen offensichtlich so wählen, dass je zwei davon, die zu unterschiedlichen Gitterpunkten gehören, disjunkt sind. Dazu wählt man ihren Radius kleiner als den minimalen Abstand zwischen zwei Punkten des Gitters (der nicht von r abhängt). Falls A die Fläche der kleinsten solchen Umgebung bezeichnet, gilt also unter Verwendung der allgemeinen Formel für den Flächeninhalt einer Kugel

$$a_r \cdot A \leq \frac{2\pi^{n/2}(\sqrt{2r})^{n-1}}{\Gamma(\frac{n}{2})};$$

hier meint Γ ausnahmsweise die Gamma-Funktion und nicht unser Gitter. Vernachlssigen wir alle Konstanten die nicht von r abhängen, zeigt dies dass das Wachstumsverhalten der Folge $(a_r)_{r\geq 0}$ gleich dem der Folge $((\sqrt{2r})^{n-1})_{r\geq 0}$ ist. Den folgenden Grenzwert können wir so leicht bestimmen:

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{a_r} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{(\sqrt{2r})^{n-1}} = \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{(\sqrt{2})^{n-1}} \lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{(\sqrt{r})^{n-1}} = 1,$$

da $\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{2} = 1$ und $\lim_{r\to\infty} \sqrt[r]{r} = 1$.

Nach dem Satz von Cauchy-Hadamard hat also die Reihe $\sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ den Konvergenzradius 1. Für $\tau \in \mathbb{C}$ können wir $\tau = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ schreiben, und erhalten

$$|q| = |e^{2\pi i\tau}| = \underbrace{|e^{2\pi ix}|}_{=1} \cdot |e^{-2\pi y}|,$$

wobei gilt $|e^{-2\pi y}| < 1$ gdw. $y > 0$ gdw. $\tau \in \mathbb{H}$. Insgesamt haben wir also gezeigt dass die Theta-Reihe Konvergenzradius 1 besitzt und dass $|q| < 1$ genau dann, wenn $\tau \in \mathbb{H}$, was den Beweis abschließt. □

Als Motivation und Ausblick formulieren wir an dieser Stelle den Hauptsatz, der in dieser Ausarbeitung bewiesen werden soll. Danach folgen die verschiedene Ergebnisse die dafür benötigt werden.

Theorem 2.1. *Es sei Γ ein gerades unimodulares Gitter in $\mathbb{R}^n$. Dann*

(i) $n \equiv 0 \mod 8$.

(ii) ϑ_Γ *ist eine Modulform von Gewicht* $\frac{n}{2}$.

Modulformen führen wir im nächsten Abschnitt ein.

2.2 Die Modulare Gruppe

Kennzeichne mit $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ die Gruppe aller 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}$ und Determinante 1:

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

Diese Gruppe operiert auf $\mathbb{H}$ via sogenannten gebrochen linearen Transformationen:

$$\tau \mapsto g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Wir bestätigen die Wohldefiniertheit dieser Operation: Sei $\tau = x + iy \in \mathbb{H}, g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Leicht rechnet man nach, dass

$$(c\tau + d)(c\bar{\tau} + d) = |c\tau + d|^2 \tag{1}$$

$$(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d) = adx + bcx + bd + (ad - bc)iy, \tag{2}$$

Kombiniert man (1) und (2) so erhält man

$$g(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{(a\tau + b)(c\bar{\tau} + d)}{(c\tau + d)(c\bar{\tau} + d)} = \frac{(adx + bcx + bd) + (ady - bcy)i}{|c\tau + d|^2},$$

also $\operatorname{Im} g(\tau) = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|c\tau+d|^2} > 0$ da $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Man beachte: das Zentrum $Z(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \{\pm 1\}$ operiert offenkundig trivial auf $\mathbb{H}$.

Definition. Die Faktorgruppe $G := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ heiß die *Modulare Gruppe*.

Später wollen wir gewisse Invarianz-Eigenschaften von Funktionen bezüglich $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ beweisen. Dafür ist es nützlich, die Erzeuger von G zu bestimmen. Das werden die Restklassen der folgenden Elemente von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sein:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ihre jeweiligen Operationen auf $\mathbb{H}$ sind durch die folgenden Abbildungen $\mathbb{H} \to \mathbb{H}$ gegeben:

$$S : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}, \quad T : \tau \mapsto \tau + 1.$$

Die Konzepte Gruppenoperation, Bahn und Stabilisator sind hinlänglich bekannt. Für $\tau \in \mathbb{H}$ bezeichnet G_τ den Stabilisator bezüglich der Operation von G. Basierend darauf führen wir Fundamentalbereiche ein, die an ein Vertretersystem von Äquivalenzklassen erinnern sollten.

Definition. Ein *Fundamentalbereich* für die Operation von G auf $\mathbb{H}$ ist eine Teilmenge $D \subset \mathbb{H}$ so dass

(i) jedes Element $\mathbb{H}$ unter G äquivalent zu einem Element aus D ist,

(ii) zwei Elemente von D höchstens dann äquivalent sind wenn sie auf dem Rand von D liegen.

Wir geben nun ein Beispiel eines Fundamentalbereiches an. Definiere

$$D := \left\{ \tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, |\operatorname{Re} \tau| \leq \frac{1}{2} \right\}, \quad \eta := e^{2\pi i/3}.$$

Theorem 2.2. *(i) $D \subset \mathbb{H}$ ist ein Fundamentalbereich für die Operation von G auf $\mathbb{H}$.*

(ii) Sei $\tau \in D$.

(a) $G_\tau = \{1\}$ für $\tau \notin \{i, \eta, -\bar{\eta}\}$,

(b) $G_i = \{1, S\}$,

(c) $G_\eta = \{1, ST, (ST)^2\}$,

(d) $G_{-\bar{\eta}} = \{1, TS, (TS)^2\}$.

(iii) $G = \langle S, T \rangle$.

Beweis. $G' := \langle S, T \rangle \leq G$.

Um zu zeigen dass D ein Fundamentalbereich ist, beweisen wir zuerst dass jedes Element aus $\mathbb{H}$ äquivalent zu einem Element aus D ist. Sei dafür $\tau \in \mathbb{H}$. Wir konstruieren ein Element $g \in G'$ das $g(\tau) \in D$ erfüllt. Wähle

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

welches die folgenden zwei Bedingungen erfüllt:

(i) $|\operatorname{Re} g(\tau)| \leq 1/2$;

dies ist offenbar möglich falls $\operatorname{Re} \tau < -1/2$ indem man T ausreichend oft anwendet, and ansonsten durch wiederholtes Anwenden von $T^{-1} \in G'$, wenn man bedenkt dass T^{-1} auf $\mathbb{H}$ als $\tau \mapsto \tau - 1$ operiert.

(ii) $\operatorname{Im} g(\tau) = \frac{\operatorname{Im} \tau}{|c\tau + d|^2}$ is maximal;

$\operatorname{Im} T\tau = \operatorname{Im} \tau$, also ist die Menge $X := \{g \in G' \mid \operatorname{Im} g(\tau) \geq \operatorname{Im} \tau\}$ nichtleer. Desweiteren gilt $|c\tau + d| \leq 1$ für alle $g \in X$. Aber $\operatorname{Im} \tau > 0$ und, falls $\tau = x + iy$, so ist $|c\tau + d|^2 = (cx + d)^2 + (cy)^2$. Offensichtlich existieren nur endlich viele $c \in \mathbb{Z}$ die $(cy)^2 \leq 1$ für einen festen Wert $y \in \mathbb{R}$ erfüllen. Also existieren auch nur endlich viele Paare $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $|c\tau + d| \leq 1$, woraus die Existenz eines Elements $g \in X$ mit maximalem Wert $\operatorname{Im} g(\tau)$ folgt.

Da insbesondere T den Imaginärteil nicht verändert, sind beide Bedingungen gleichzeitig erfüllbar. Sei nun g wie oben mit (i) and (ii). Die nächste Behauptung ist $|g(\tau)| \geq 1$. Man beobachte zuerst dass für jedes $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$

$$-\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{x + iy} = -\frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

und daher $\operatorname{Im} -\frac{1}{\tau} = \frac{\operatorname{Im}\tau}{x^2+y^2} = \frac{\operatorname{Im}\tau}{|\tau|^2}$. Nehmen wir an, dass $|g(\tau)| < 1$ so folgt

$$\operatorname{Im} Sg(\tau) = \frac{\operatorname{Im} g(\tau)}{\underbrace{|g(\tau)|^2}_{<1}} > \operatorname{Im} g(\tau)$$

was der Maximalität von g widerspricht. Bisher haben wir somit $g \in G'$ and $g(\tau) \in D$ gezeigt. Der letzte Schritt um D als Fundamentalbereich zu etablieren besteht darin zu zeigen, dass je zwei unter der Operation von G' äquivalente Elemente von D schon auf dem Rand von D liegen. Man überzeugt sich leicht dass der Rand gegeben ist durch

$$\partial D := \{\tau \in \mathbb{H} \ | \ |\operatorname{Re}\tau| = 1/2 \ \wedge \ |\tau| \geq 1\} \cup \{\tau \in \mathbb{H} \ | \ |\tau| = 1 \ \wedge \ |\operatorname{Re}\tau| \leq 1/2\}.$$

Zum Nachweis der zweiten Eigenschaft betrachten wir $\tau, \tau' \in D$, $\tau \neq \tau'$, mit τ und τ' äquivalent. Wir werden zeigen dass dies einen der folgenden Fälle impliziert:

(1) $\operatorname{Re}\tau = \frac{1}{2}, \operatorname{Re}\tau' = -\frac{1}{2}$, and $\tau' = \tau - 1$;

(2) $\operatorname{Re}\tau = -\frac{1}{2}, \operatorname{Re}\tau' = \frac{1}{2}$, and $\tau' = \tau + 1$; oder

(3) $|\tau| = |\tau'| = 1$ and $\tau' = -\frac{1}{\tau}$.

In jedem davon sind τ und τ' Randpunkte, also folgt daraus dass D ein Fundamentalbereich ist. Ein Nebenprodukt dieses Beweisschrittes wird Teil (ii) des ursprünglichen Theorems sein.

Es existiert ein $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\tau' = g(\tau) \in D$. Œ sei $\operatorname{Im} g(\tau) \geq \operatorname{Im}(\tau)$ (falls nicht, vertauscht man die Rollen von τ und τ' und ersetzt g durch g^{-1}). Wie oben festgestellt impliziert das $|c\tau + d|^2 \leq 1$. Sei $\tau = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Da $\tau \in D$ erhält man

$$y \geq \sqrt{1^2 - (1/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

aus dem Satz von Pythagoras. Es ist $|c\tau + d|^2 = c^2y^2 + (cx + d)^2 \leq 1$. Zusammen mit

$$c^2y^2 + (cx + d)^2 \geq \frac{3}{4}c^2 + (cx + d)^2 \geq \frac{3}{4}c^2$$

folgt daraus $c^2 \leq \frac{4}{3}$. Da $c \in \mathbb{Z}$ schließen wir $c \in \{0, \pm 1\}$.

Der Fall $c = 0$ löst sich schnell: dann ist $ad = 1$, also $a = d = 1$ da wir ja modulo des Zentrums $\{\pm 1\}$ rechnen. Wir erhalten $\tau' = g(\tau) = \tau + b$. Es ist $b \in \mathbb{Z}, \tau' \in D, \tau' \neq \tau$ also gilt entweder $b = 1$, was $\operatorname{Re}\tau = -\frac{1}{2}$ und $\operatorname{Re}\tau' = \frac{1}{2}$ erzwingt, oder $b = -1$, woraus $\operatorname{Re}\tau = \frac{1}{2}$ und $\operatorname{Re}\tau' = -\frac{1}{2}$ folgt.

Als nächstes betrachten wir den Fall $c = 1$. Da $|c\tau + d| \leq 1$ und $d \in \mathbb{Z}$ bleiben nur drei Möglichkeiten:

(i) $|\tau| = 1, d = 0$,

(ii) $\tau = \eta, d = 1$,

(iii) $\tau = -\bar{\eta}, d = -1$.

(Zeige graphisch, dass η das einzige Element x aus ∂D ist, das $|x + 1| \leq 1$ erfüllt.)
In Fall (i) impliziert $ad - bc = 1$ sofort $b = -1$ und daher $g(\tau) = \frac{a\tau - 1}{\tau} = a - \frac{1}{\tau}$. Falls $\tau \notin \{\eta, -\bar{\eta}\}$, dann gilt $|\operatorname{Re} g(\tau)| \leq 1/2$ nur für $a = 0$ da $|\operatorname{Re}(-\frac{1}{\tau})| = |\frac{x}{|\tau|^2}| < 1/2$ außer wenn $|\tau|^2 = 1$, dann wäre auch $|a| = 1$ denkbar; aber dann hätten τ und $g(\tau)$ Betrag 1, den gleichen Imaginärteil und würden sich im Realteil um 1 unterscheiden, gerade dann wäre also $\tau \in \{\eta, -\bar{\eta}\}$. Also $g = S$ in diesem Fall.

Betrachte speziell $\tau = i \in D$, und $g \in G'$ mit $g(i) = i$; dann haben wir entweder $c = 0, d = a = 1$ woraus $b = 0$ and $g = 1$ folgt; oder $c = 1$ und nach dem gerade Gezeigten $g = S$. Daher gilt $G_i = \{1, S\}$.

Falls $\tau = \eta$ dann ist $g(\tau) = a - \frac{1}{\eta} = a - \bar{\eta}$, und um $g(\tau) \in D$ (genauer: $|\operatorname{Re}(a - \bar{\eta})| \leq 1/2$) zu erfüllen muss entweder $a = 0$, also $g = S$, oder $a = -1$ und

$$g = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1}S = (ST)^{-1} = (ST)^2$$

gelten. Daran sehen wir auch $(ST)^2 \in G_\eta$. Falls $\tau = -\bar{\eta}$, dann folgt analog $a = 0$ und $g = S$ oder $a = 1$ was

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = TS \in G_{-\bar{\eta}}$$

ergibt.

In Fall (ii) folgt aus $ad - bc = 1$ bereits $b = a - 1$ und $g(\eta) = \frac{a(\eta+1)-1}{\eta+1} = a - \frac{1}{\eta+1} = a + \eta$. Ist $a = 1$ dann gilt $g(\eta) = -\bar{\eta} = -\eta^{-1}$ und wir sind fertig; oder $a = 0$ und wir sind ebenfalls fertig da $\tau = \tau'$, was noch ein Stabilisatorelement ergibt:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = ST \in G_\eta.$$

Für Fall (iii) verfahren wir völlig analog zu Fall (ii): $ad - bc = 1$ impliziert $b = -a - 1$ und $g(-\bar{\eta}) = \frac{a(\bar{\eta}-1)-1}{-\bar{\eta}-1} = a - \frac{1}{\bar{\eta}-1} = a - \frac{1}{\eta} = a + (-\bar{\eta})$. Dann ist entweder $a = -1$ und $g(-\bar{\eta}) = \eta = -(-\bar{\eta})^{-1}$ und wir sind fertig; oder $a = 0$ und wir sind wieder wegen $\tau = \tau'$ fertig:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (TS)^2 \in G_{-\bar{\eta}}.$$

Der Fall $c = -1$ reduziert sich zum Fall $c = 1$ indem man die Vorzeichen von $a, b, c,$ und d ändert (möglich, da wir mit $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ operieren). Also ist D ein Fundamentalbereich. Die Stabilisatoren von i, η und $-\bar{\eta}$ sind nun zur Gänze bestimmt, da wir alle möglichen Gestalten der Matrix g bestimmt haben, falls sie eins der Elemente fixiert. Dazu geht man einfach die Fallunterscheidungen oben durch. Für andere Werte von τ haben wir gezeigt, dass jedes nicht-triviale Element von G_τ gleich S sein muss, aber Fixpunkte φ von S müssen $\varphi^2 = 1$, also $\varphi = \pm i$ erfüllen. Dies zeigt $G_\tau = \{1\}$.

Um den Beweis des Satzes zu beenden muss noch $G = \langle S, T \rangle = G'$ gezeigt werden, was jetzt schnell geht: Sei $g \in G$ und sei $\tau_0 \in D - \partial D$ ein innerer Punkt. Da jedes Element in $\mathbb{H}$ wie oben gezeigt unter G' äquivalent zu einem Element von D ist, finden wir ein $g' \in G'$ mit $g'(g(\tau_0)) \in D$. Nun liegen sowohl $g'(g(\tau_0))$ als auch τ_0 selbst in D, aber D ist ein Fundamentalbereich; das bedeutet $g'(g(\tau_0)) = \tau_0$, da sonst τ_0 kein innerer Punkt sein könnte. Weder i, η, noch $-\bar{\eta}$ sind innere Punkte, also gilt $G_{\tau_0} = \{1\}$ und $g'g = 1$. Somit $g = (g')^{-1} \in G$. C.q.f.d.

□

Es folgt die Definition der Modulformen. Man erinnere sich für das Folgende daran, dass eine Funktion f *holomorph* auf einer offenen Menge U genannt wird falls f *komplex differenzierbar* an jedem Punkt $z_0 \in U$ ist, das heißt also, der Grenzwert

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

Definition. Es sei k eine positive ganze gerade Zahl. Eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ wird *Modulform von Gewicht* k genannt wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $f(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = (c\tau + d)^k f(\tau)$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,

(ii) f hat eine Potenzreihenentwicklung in $q = e^{2\pi i \tau}$, d.h. f ist holomorph bei Unendlich $\tau = i\infty$.

Aus der ersten Bedingung folgt insbesondere,indem man $a = 1, c = 0, d = 1$ verwendet, dass $f(\tau) = f(\tau + b)$ für alle $b \in \mathbb{Z}$ gilt. Also ist f periodisch und hat daher eine Laurentreihenentwicklung in $q = e^{2\pi i \tau}$:

$$f(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_r q^r$$

Die zweite Bedingung sagt aus, dass es sich dabei sogar um eine Potenzreihe handelt, d.h., $a_r = 0$ for $r < 0$.

Mithilfe von Theorem 2.2 lässt sich die erste Bedingung deutlich vereinfachen. Dort haben wir gesehen, dass $G = \langle S, T \rangle$, sodass es ausreicht wenn die Funktion f einerseits $f(S\tau) = \tau^k f(\tau)$ und andererseits $f(T\tau) = f(\tau)$ for all $\tau \in \mathbb{H}$ erfüllt. Letztere ist sogar ebenfalls obsolet, da die komplexe

Exponentialfunktion periodisch mit Länge $2\pi i$ ist, also ist eine Potenzreihe in q periodisch mit Länge 1. Zusammengefasst ist eine Modulform von Gewicht k also gegeben durch eine Potenzreihe

$$f(\tau) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$$

die konvergiert für $|q| < 1$ ($\Leftrightarrow \tau \in \mathbb{H}$ wie schon gezeigt), und die außerdem die nachfolgende Identität erfüllt:

$$f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^k f(\tau).$$

Im Hinblick auf unseren Hauptsatz, der aussagt dass die Theta-Reihe eines geraden unimodularen Gitters in $\mathbb{R}^n$ eine Modulform von Gewicht $\frac{n}{2}$ ist, werden wir also zeigen müssen dass $\frac{n}{2} \in 2\mathbb{Z}$ sowie folgende Identität nachweisen:

$$\vartheta_\Gamma\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau).$$

Diese folgt aus der Poissonschen Summenformel.

2.3 Die Poissonsche Summenformel

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein beliebiges Gitter, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion die den drei Bedingungen genügt:

(V1) Absolute Integrierbarkeit, d.h., $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < \infty$;

Diese Bedingung impliziert die Existenz der *Fourier-Transformierten* $\widehat{f}$ von f die durch die Formel

$$\widehat{f}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot y} dx$$

definiert ist.

(V2) Die Reihe $\sum_{x \in \Gamma} |f(x+u)|$ konvergiert für alle u die zu einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ gehören; Diese Bedingung impliziert die Stetigkeit der Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, u \mapsto \sum_{x \in \Gamma} f(x+u)$ auf $\mathbb{R}^n$.

(V3) Die Reihe $\sum_{y \in \Gamma^*} \widehat{f}(y)$ konvergiert absolut.

Theorem 2.3 (Poissonsche Summenformel)**.** *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine Funktion, die (V1),(V2), und (V3) erfüllt. Dann*

$$\sum_{x \in \Gamma} f(x) = \frac{1}{\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y \in \Gamma^*} \widehat{f}(y).$$

Beweis. Wir betrachten zuerst den Spezialfall $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Wie oben erwähnt, ist die Funktion

$$F(u) := \sum_{x \in \Gamma} f(x+u)$$

nach (V2) stetig und periodisch in u, soll heißen, $F(u+z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{Z}^n$. Um sich letzteres klarzumachen stelle man sich vor dass wir den Urpsrung des Gitter bloß an die Stelle z verschieben, sich aber die auftretenden Summanden dadurch natürlich nicht verändern (prägnanter: mengentheoretisch ist $\mathbb{Z}^n + z = \mathbb{Z}^n$ für alle $z \in \mathbb{Z}^n$). Es handelt sich bei F also um eine stetige, periodische Funktion. Eine solche lässt sich stets in eine Fourierreihe

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i u \cdot y} a(y)$$

entwickeln, wobei

$$a(y) := \int_{[0,1]^n} F(t) e^{-2\pi i y \cdot t} dt.$$

Wir werden $a(y) = \widehat{f}(y)$ zeigen. Dann konvergiert nach (V3) die Fourierreihe von F absolut und gleichmäßig, das heißt sie konvergiert gegen eine stetige Funktion, die dann schon F sein muss. Einsetzen von 0 ergibt dann die Poissonsche Summenformel für $\Gamma = \mathbb{Z}^n$ (beachte $\operatorname{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = 1$ und $\Gamma^* = \Gamma = \mathbb{Z}^n$):

$$F(0) = \sum_{x \in \Gamma} f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} e^{2\pi i \cdot 0 \cdot y} \widehat{f}(y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f}(y).$$

Wir zeigen $a(y) = \widehat{f}(y)$ durch eine Reihe von Umformungen:

$$
\begin{aligned}
a(y) &= \int_{[0,1]^n} \underbrace{\sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(x+t)\, e^{-2\pi i t \cdot y}}_{F(t)} dt \\
&\underset{(1)}{=} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} f(x+t) e^{-2\pi i t \cdot y} dt \\
&\underset{(2)}{=} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \int_{[0,1]^n} f(x+t) e^{-2\pi i (t+x) \cdot y} dt \\
&\underset{(3)}{=} \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} \int_{x+[0,1]^n} f(t') e^{-2\pi i t' \cdot y} dt' \\
&\underset{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i t \cdot y} dt = \widehat{f}(y).
\end{aligned}
$$

Die Begründung der Schritte folgt jetzt:

(1) Die Fourierreihe von F konvergiert absolut, was es uns erlaubt Integral und Reihe zu vertauschen.

(2) $x \cdot y \in \mathbb{Z}$, denn $\mathbb{Z}^n$ ist ein ganzen Gitter; und die komplexe Exponentialfunktion ist periodisch mit Länge $2\pi i$.

(3) Wir führen den Variablentausch $t' := t + x$ durch.

(4) Wir zerteilen den n-dimensionalen reellen Raum kanonisch in Hyperwürfel mit Volumen 1 vermöge der disjunkten Zerlegung
$$
\mathbb{R}^n = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^n} x + [0,1]^n.
$$

Dies beendet den Beweis für $\Gamma = \mathbb{Z}^n$. Im allgemeinen Fall verwenden wir, dass jedes Gitter in $\mathbb{Z}^n$ das Bild von $\mathbb{Z}^n$ unter einer invertierbaren reellen Matrix M ist. Sei also $\Gamma = M \cdot \mathbb{Z}^n$ ein beliebiges Gitter, dabei $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dann ist $M = ((e_1, \ldots, e_n))$ und die Zeilen $e_1, \ldots, e_n$ von M bilden eine Basis von $\Gamma = \mathbb{Z}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}e_n$.

Dann finden wir die korrespondierende Dualbasis $M_D := ((e_1^*, \ldots, e_n^*))$ die durch $e_i \cdot e_j^* = \delta_{ij}$ festgelegt ist, und die eine Basis des dualen Gitters $\Gamma^* = \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathbb{Z})$ bildet. Wir zeigen, dass $M_D = (M^t)^{-1}$ und daher $\Gamma^* = (M^t)^{-1} \cdot \mathbb{Z}^n$:

$$
M_D \cdot M^t = \begin{pmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1^t & \ldots & e_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1^* & e_2 \cdot e_1^* & \cdots & e_n \cdot e_1^* \\ e_1 \cdot e_2^* & \ddots & & e_n \cdot e_2^* \\ \vdots & & \ddots & e_n \cdot e_3^* \\ e_1 \cdot e_n^* & \cdots & \cdots & e_n \cdot e_n^* \end{pmatrix} = I_n.
$$

Jetzt verwenden wir $f_M(x) := f(Mx)$ und die Poissonsche Summenformel für $\mathbb{Z}^n$:

$$
\sum_{x \in \Gamma} f(x) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f(Mx) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^n} f_M(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^n} \widehat{f_M}(y),
$$

und

$$
\begin{aligned}
\widehat{f_M}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(Mt) e^{-2\pi i t \cdot y} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\det M}{\det M} f(Mt) e^{-2\pi i (M^{-1}M)t \cdot y} dt \\
&\underset{(1)}{=} \frac{1}{\det M} \int_{\mathbb{R}^n} f(t') e^{-2\pi i (M^{-1}t') \cdot y} dt' \\
&\underset{(2)}{=} \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \widehat{f}\left((M^t)^{-1} y\right)
\end{aligned}
$$

Beide Schritte begründen wir en detail:

(1) Substituiere $t' := Mt$. Dies folgt aus der allgemeinen Transformationsformel für Integrale mit der Abbildung $t \mapsto Mt$ welche injektiv ist (da $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$) und zudem stetig differenzierbar mit Jacobi-Matrix M.

(2) $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = \det M$ wie in Abschnitt 1.1; der Rest folgt aus der Definition von $\widehat{f}$, wobei die folgende grundlegende Identität für das Standardskalarprodukt verwendet wurde:

$$x \cdot M^{-1}y = M^{-1}y \cdot x = (M^{-1}y)^t x = y^t (M^{-1})^t x = y \cdot (M^t)^{-1} x.$$

Schließlich verwenden wir $\Gamma^* = (M^t)^{-1} \cdot \mathbb{Z}^n$ und erhalten

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f_M}(y) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\mathbb{Z}^n} \widehat{f}((M^t)^{-1}y) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} \widehat{f}(y),$$

die Poissonsche Summenformel. C.q.f.d. □

Um später die Gültigkeit von Bedingung (V3) nachzuweisen ist folgendes Lemma nötig.

Lemma 2.1. *Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-\pi x^2}$ ist identisch zu ihrer Fourier-Transformierten, d.h.,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\cdot y} dx = e^{-\pi y^2}.$$

Beweis. Wir verwenden eine Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Zuerst zeigen wir die Formel für $n = 1$. Sei $\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} dx$ für $y \in \mathbb{R}$ die Fourier-Transformierte von $f(x)$.

Da $y \mapsto e^{-2\pi ixy}$ integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist, können wir die Leibnizregel für Integrale verwenden um $\widehat{f}'$ mittels Differentiation unter dem Integralzeichen zu analysieren:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \left(e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} \right) dx = \int_{\mathbb{R}} -2\pi ix e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} dx.$$

Um den Ausdruck weiter zu vereinfachen, integrieren wir partiell mit $g(x) = e^{-2\pi ixy}$ and $h'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}'(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \widehat{f}(y) &= i \cdot \int_{\mathbb{R}} \underbrace{-2\pi x e^{-\pi x^2}}_{h'} \underbrace{e^{-2\pi ixy}}_{g} dx \\
&= i \cdot \left([g(x)h(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{\mathbb{R}} g'(x)h(x) dx \right) \\
&= i \cdot \left(\underbrace{\left[e^{-2\pi ixy - \pi x^2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} -2\pi iy \cdot e^{-2\pi ixy} \cdot e^{-\pi x^2} dx \right) \\
&= i^2 2\pi y \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi ixy} dx \\
&= -2\pi y \widehat{f}(y).
\end{aligned}$$

Mithilfe dieser Gleichheit differenzieren wir den Quotienten $\widehat{f}(y)/e^{-\pi y^2}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \frac{\widehat{f}(y)}{e^{-\pi y^2}} &= \frac{\widehat{f}'(y) e^{-\pi y^2} + \widehat{f}(y) e^{-\pi y^2} \cdot 2\pi y}{e^{-2\pi y^2}} \\
&= \frac{(-2\pi y \widehat{f}(y) + 2\pi y \widehat{f}(y)) e^{-\pi y^2}}{e^{-2\pi y^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $y \mapsto \frac{\widehat{f}(y)}{e^{-\pi y^2}}$ konstant ist, d.h. $\widehat{f}(y) = c e^{-\pi y^2}$ für eine Konstante c. Einsetzen von 0 resultiert in

$$\widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1 \qquad \text{(Gauß-Integral)},$$

also muss $c = 1/(e^{-\pi \cdot 0}) = 1$ sein. Damit ist der Fall $n = 1$ bewiesen.

Falls $n > 1$ reduzieren wir die Dimension mit dem Satz von Fubini; wir schreiben $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\bar{x} := (x_1, \ldots, x_{n-1})$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x\cdot y} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{-\pi \bar{x}^2} e^{-2\pi i \bar{x}\cdot\bar{y}}\right) \cdot \left(e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_n y_n}\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(e^{-\pi \bar{x}^2} e^{-2\pi i \bar{x}\cdot\bar{y}}\right) \cdot \left(e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_n y_n}\right) d\bar{x}\ dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\pi x_n^2} e^{-2\pi i x_n y_n}\right) dx_n \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(e^{-\pi \bar{x}^2} e^{-2\pi i \bar{x}\cdot\bar{y}}\right) d\bar{x} \\
&\underset{(\star)}{=} e^{-\pi y_n^2} \cdot e^{-\pi \bar{y}^2} = e^{-\pi y^2}.
\end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung wird bei $(\star)$ verwendet. C.q.f.d. □

Der nächste Abschnitt behandelt die Herleitung der zwei letzten Lemmata, und schließt ab mit dem Beweis von Theorem 2.1.

2.4 Theta-Reihen als Modulformen

Das erste Lemma ermöglicht es uns, die Ergebnisse aus dem vorigen Abschnitt anzuwenden.

Lemma 2.2. *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, $\nu_0 > 0$. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x} = \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i \tau x^2}$$

gleichmäßig für alle τ mit $\operatorname{Im}\tau \geq \nu_0$.

Beweis. $\Gamma = M \cdot \mathbb{Z}^n$ für ein $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Sei

$$\varepsilon := \min_{|x|=1} (Mx)^2.$$

Das Minimum existiert, da $x \mapsto (Mx)^2$ stetig ist und die Kugel mit Radius 1 kompakt. Natürlich muss $\varepsilon > 0$ da M invertierbar ist und $(Mx)^2 \geq \varepsilon x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ weil $x/|x| = 1$ und

$$(Mx)^2 = (M\frac{x}{|x|})^2 |x|^2 \geq \varepsilon^2 x^2$$

.

Damit leiten wir folgende Abschätzung her, dabei schreiben wir $\tau = a + ib$:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\Gamma} \left|e^{\pi i \tau x^2}\right| &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \left|e^{\pi i (a+ib)(Mx)^2}\right| \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} \underbrace{\left|e^{\pi i a (Mx)^2}\right|}_{=1} \left|e^{-\pi b (Mx)^2}\right| = \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} e^{-\pi b (Mx)^2} \\
&\leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^n} e^{-\pi \nu_0 \varepsilon x^2} \\
&= \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\nu_0\varepsilon r^2}\right)^n < \infty \quad \text{(by the integral test using } \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.\text{)}
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit wird induktiv bewiesen: für $n = 1$ ist sie trivial, und kann ansonsten wiefolgt manipuliert werden:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in\mathbb{Z}^n} e^{-\pi\nu_0\varepsilon x^2} &= \sum_{x_n\in\mathbb{Z}} \sum_{x\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-\pi\nu_0\varepsilon(x^2+x_n^2)} \\
&= \left(\sum_{x_n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi\nu_0\varepsilon x_n^2}\right) \cdot \left(\sum_{x\in\mathbb{Z}^{n-1}} e^{-\pi\nu_0\varepsilon x^2}\right) \\
&= \left(\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-\pi\nu_0\varepsilon r^2}\right)^n.
\end{aligned}$$

C.q.f.d. □

Also ist ϑ_Γ wohldefiniert und holomorph bei $\tau \in \mathbb{H}$, als Grenzwert einer Folge von holomorphen Funktionen die gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}$ konvergieren.

Lemma 2.3. *Es gilt die Identität*

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{\tau}{i}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \vartheta_{\Gamma^*}(\tau).$$

Beweis. Der Identitätssatz für holomorphe Funktionen besagt, dass zwei auf einem Definitionsbereich E holomorphe Funktionen, die auf einer beliebigen Teilmenge von E, die einen Häufungspunkt enthält, übereinstimmen, bereits auf ganz E identisch sind. Beide Seiten der obigen Gleichung sind holomorph auf $\mathbb{H}$, also genügt es, den Fall $\tau = it$ zu beweisen, wobei $t \in \mathbb{R}, t > 0$, denn $\{it | t > 0\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{H}$ die Häufungspunkte enthält.

Lemma 2.1 ermöglicht uns die Berechnung der Fourier-Transformierten von $g : x \mapsto e^{-\pi\left(\frac{1}{t}\right)x^2}$ indem wir die Variablen $\widetilde{x} = \frac{1}{\sqrt{t}}x$ und $\widetilde{y} = \sqrt{t}y$ betrachten:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\frac{1}{t}x^2} e^{-2\pi i x\cdot y} dx \\
&\underset{(1)}{=} \left(\sqrt{t}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\widetilde{x}} e^{-2\pi i\sqrt{t}\widetilde{x}\cdot y} d\widetilde{x} \\
&\underset{(2)}{=} \left(\sqrt{t}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\widetilde{x}} e^{-2\pi i\widetilde{x}\cdot\widetilde{y}} d\widetilde{x} \\
&\underset{(3)}{=} \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi\widetilde{y}^2} = \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2},
\end{aligned}$$

wobei (1) die Substitution $x \to \sqrt{t}x$ mit Jacobi-Matrix $\mathrm{diag}(\sqrt{t}, \ldots, \sqrt{t})$ durchführt, (2) schreibt einfach $\widetilde{y} = \sqrt{t}y$ und (3) wendet Lemma 2.1 an. Jetzt können wir die Poissonsche Summenformel anwenden (man vergewissert sich mithilfe der vorangegangenen Lemmata leicht, dass (V1), (V2) und (V3) erfüllt sind),

$$\begin{aligned}
\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{it}\right) &= \sum_{x\in\Gamma} e^{\pi i\left(-\frac{1}{it}\right)x^2} = \sum_{x\in\Gamma} e^{-\pi\frac{1}{t}x^2} \\
&= \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} \left(\sqrt{t}\right)^n e^{-\pi t y^2} \\
&= t^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \vartheta_{\Gamma^*}(it),
\end{aligned}$$

c.q.f.d. □

Beweis von Theorem 2.1. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades unimodulares Gitter. Wir beweisen zuerst (i), d.h. 8 teilt n. Ist das nicht der Fall, so können wir Œ annehmen, dass $n \equiv 4 \pmod 8$ denn falls n kongruent zu 2 oder 6 $\pmod 8$ dann ist $2n \equiv 4 \pmod 8$ und wir ersetzen Γ durch $\Gamma \perp \Gamma \subset \mathbb{R}^{2n}$, und falls n kongruent zu 1,3,5 oder 7 $\pmod 8$ dann ist $4n \equiv 4 \pmod 8$ und wir ersetzen Γ durch $\Gamma \perp \Gamma \perp \Gamma \perp \Gamma \subset \mathbb{R}^{4n}$ bevor wir fortfahren. Das Nachfolgende würde dann zeigen dass $2n$ bzw. $4n$ durch 8 teilbar sind; falls $2n$ durch 8 teilbar ist, dann ist n durch 4 teilbar, also kongruent zu 0 oder 4 $\pmod 8$ (Widerspruch zu n kongruent zu 2 oder 6); und wenn $4n$ durch 8 teilbar ist, dann ist n gerade (Widerspruch zu n kongruent zu 1,3,5 oder 7). Also sei ab jetzt $n \equiv 4$. Nach Lemma 2.3 gilt

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{n}{2}} \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_{\Gamma^*}(\tau) = (-1)^{\frac{n}{4}} \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_{\Gamma^*}(\tau) = -\tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau),$$

wobei man $\Gamma = \Gamma^*$, $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = 1$ und die Tatsache dass n durch 4 aber nicht durch 8 teilbar ist verwendet. Wir wissen bereits dass ϑ_Γ invariant unter T ist, der Verschiebung von $\mathbb{H}$ nach rechts um 1. Daraus folgt

$$\vartheta_\Gamma((TS)\tau) = \vartheta_\Gamma(S\tau) \underset{S\tau=-1/\tau}{=} -\tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau).$$

Als Vorbereitung auf den letzten Schritt berechnet man

$$TS\tau = T\frac{-1}{\tau} = -\frac{1}{\tau} + 1 = \frac{\tau - 1}{\tau}, \qquad (TS)^2\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tau = -\frac{1}{\tau - 1}.$$

Daraus leiten wir her

$$\begin{aligned}
\vartheta_\Gamma((TS)^3\tau) &= -((TS)^2\tau)^{\frac{n}{2}} \cdot \vartheta_\Gamma((TS)^2\tau) \\
&= ((TS)^2\tau \cdot (TS)\tau)^{\frac{n}{2}} \cdot \vartheta_\Gamma((TS)\tau) \\
&= -((TS)^2\tau \cdot (TS)\tau \cdot \tau)^{\frac{n}{2}} \cdot \vartheta_\Gamma(\tau) \\
&= -\left(\frac{\tau-1}{\tau} \cdot \frac{-1}{\tau-1} \cdot \tau\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \vartheta_\Gamma(\tau) \\
&= -(-1)^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau) = -\vartheta_\Gamma(\tau),
\end{aligned}$$

und die letzte Vereinfachung nutzt aus, dass $n/2$ gerade ist. Andererseits ist

$$(TS)^3 = (TS)^2 TS = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -I_2$$

das Einselement der Modularen Gruppe. Widerspruch. Das beweist (i).

Um (ii) nachzuweisen gilt es zu zeigen, dass ϑ_Γ eine Modulform von Gewicht $\frac{n}{2}$ ist. Wir haben gezeigt dass $\frac{n}{2}$ gerade ist, und dass ϑ_Γ eine Potenzreihenentwicklung in $q = e^{2\pi i \tau}$ hat; wir wissen dass ϑ_Γ invariant unter T ist. Es bleibt einzig die Identität

$$\vartheta_\Gamma\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{\frac{n}{2}} \vartheta_\Gamma(\tau),$$

nachzuweisen, die aber schon aus Lemma 2.3 folgt da $\Gamma^* = \Gamma$, $\mathrm{vol}(\mathbb{R}^n/\Gamma) = 1$ und $8 \mid n$ impliziert $(i^{-1})^{\frac{n}{2}} = (-i)^{\frac{n}{2}} = ((-i)^4)^{\frac{n}{8}} = 1$. Also ist ϑ_Γ eine Modulform von Gewicht $\frac{n}{2}$, c.q.f.d. $\square$