Die Algebra der Modulformen

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes, 05.11.2019

Leonie Scheeren

Im letzten Vortrag wurden unter Anderem Modulformen allgemein eingeführt und Theta-Reihen als Modulformen näher betrachtet. In dieser Ausarbeitung werden mit den Eisensteinreihen zunächst weitere Beispiele von Modulformen betrachtet, deren Potenzreihenentwicklung in $e^{2\pi iz}$ sich explizit angeben lässt. Darüber hinaus wird eine weitere Eigenschaft von Modulformen bezüglich der Ordnung einzelner Punkte in ihrem Definitionsbereich herausgearbeitet. Mit den daraus gewonnenen Erkenntnissen und einigen Ergebnissen aus vorherigen Vorträgen wird dann die Struktur der durch die Modulformen vom Gewicht k gegebenen $\mathbb{C}$-VR bestimmt und daraus unter Anderem gefolgert, dass alle geraden unimodularen Gitter in $\mathbb{R}^8$ isomorph zum E_8-Gitter sind.
Ich orientiere mich dabei an Wolfgang Ebelings "Lattices and Codes" (3. Auflage) und dem Vorlesungsskript "Funktionentheorie *I*" von Aloys Krieg, Sebastian Walcher und Olaf Wittich aus dem Jahr 2018.

<u>Im Folgenden verwendete Definitionen:</u>

- $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$
- $G := SL_2(\mathbb{Z})/\{I_2,-I_2\}$
- $D := \{z \in \mathbb{H} \mid |z| \geq 1 \wedge |Re(z)| \leq \frac{1}{2}\}$
- $S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- zu $p \in \mathbb{H} : [p] := \{z \in \mathbb{H} \mid \exists\, g \in G : g(p)=z\}$
- zu $p \in \mathbb{H} : e_p := |G_p| := |\{g \in G \mid g(p)=p\}|$
- zu $z \in \mathbb{H} : q := e^{2\pi iz}$
- $W := e^{2\pi i/3}$

- zu einem Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$:
  $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{C}, t \mapsto \gamma(a+b-t)$, der entgegengesetzte Weg
  und für eine auf der Spur des Weges stetige Funktion
  $\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$

Verwendete Resultate aus der Funktionentheorie:

(0.1) Bemerkung

- Über Potenzreihen definierte Funktionen sind holomorph (auf ihrem Konvergenzkreis)
- Die durch die Operation der Elemente in G induzierten Funktionen sind holomorph auf $\mathbb{H}$
- Linearkombinationen, Produkte, (wohldefinierte) Quotienten und Ableitungen holomorpher Funktionen sind wieder holomorph
- Das Weierstrasssche Majoratenkriterium ist mit angepasster Norm auch im Komplexen anwendbar (wobei als Majorante weiterhin eine reele Reihe dient).
- Wegintegrale sind invariant unter Umparametrisierung des Weges ◇

(0.2) Satz (Satz von Weierstrass)
Seien:

- U $\subseteq \mathbb{C}$ offen
- f_n: U $\to \mathbb{C}$ (n $\in \mathbb{N}$) eine Folge holomorpher Funktionen, die (lokal) gleichmäßig gegen eine Funktion f: U $\to \mathbb{C}$ konvergiert

Dann ist f ebenfalls holomorph ◇

(0.3) Satz
Seien U $\subset \mathbb{C}$ offen, f': U $\to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die eine Stammfunktion f besitzt und γ ein Weg in U mit Anfangspunkt z_0 und Endpunkt z_1.
Dann gilt: $\int\limits_\gamma f'(z)dz = f(z_1) - f(z_0)$. ◇

(0.4) Korollar
Seien: G $\subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und f eine auf G holomorphe Funktion. Dann besitzt f eine Stammfunktion. ◇

(0.5) Lemma
Seien: $U \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in U$, $n \in \mathbb{N}_0$ und f: $U \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann sind äquivalent:

- f hat eine Nullstelle der Ordnung n bzw. keine Nullstelle, falls n = 0.
- Die Potenzreihenentwicklung von f in z_0 hat die Form:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

  mit $a_n \neq 0$.
- Es gibt ein $r > 0$ und eine holomorphe Funktion g: $K_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$ für alle $z \in K_r(z_0) \cap U$ und $g(z_0) \neq 0$. ◇

(0.6) Satz (Identitätssatz)
Seien: $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, f: $U \to \mathbb{C}$ holomorph, dann sind äquivalent

- $f \equiv 0$
- f hat in U eine Nullstelle der Ordnung ∞
- Die Nullstellenmenge von f hat einen Häufungspunkt in U ◇

(0.7) Lemma
Sei f: $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Periode 1, dann existiert eine auf $K_{0,1}(0)$ holomorphe Funktion F mit $f(z) = F(e^{2\pi i z})$, $z \in \mathbb{H}$. ◇

(0.8) Satz (Spezialfall des Satzes vom Argumentprinzip)
Seien:

- $U \in \mathbb{C}$ offen
- f: $U \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant
- A die Menge der Nullstellen von f in U
- zu $a \in A$: $v_a(f)$ die Ordnung der Nullstelle a
- ϕ ein Zyklus in U, der keine der Nullstellen trifft und keine Punkte in $\mathbb{C} \setminus U$ umläuft
- zu $a \in A$: $n_\phi(a)$ die Umlaufzahl des Zyklus ϕ um a

Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\phi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{a\in A} n_{\phi}(a)\cdot v_a(f)$$

◇

§1 Eisensteinreihen

In diesem Abschnitt werde ich die Eisensteinreihen und einige ihrer im Verlauf dieser Ausarbeitung benötigten Eigenschaften vorstellen, wobei ich größtenteils auf die Angabe von Beweisen verzichte und diesbezüglich auf Wolfgang Ebelings "Lattices und Codes" verweise.

(1.1) Definition
Sei k $\in \mathbb{Z}_{>2}$ gerade, dann def. für z $\in \mathbb{H}$

$$G_k(z) := \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^k}$$

die Eisensteinreihe vom Index k. ◇

(1.2) Behauptung
Für k $\in \mathbb{Z}_{>2}$ gerade ist die Eisensteinreihe G_k eine Modulform vom Gewicht k. ◇

dazu:
Unter der Annahme, dass G_k wohldefiniert ist, zunächst zur Gewichtsbedingung:
Aus dem vorherigen Vortrag geht hervor, dass es genügt, diese für S und T, welche G erzeugen, zu zeigen.
zu T:
Anwenden von T auf z sorgt mit (m(Tz)+n) = (mz+(m+n)) lediglich für eine Umsortierung der Summanden. Also: G_k(Tz) = G_k(z).
zu S:
$G_k(Sz) = G_k(-\frac{1}{z}) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(m(-\frac{1}{z})+n)^k} = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{z^k}{(nz-m)^k} = z^k G_k$

Somit ist die Gewichtsbedingung der Modulformdefinition erfüllt.

noch zu zeigen bleibt:

(1) G_k: $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist wohldefiniert und holomorph.
(2) G_k ist holomorph in $i\infty$ beziehungsweise G_k verfügt über eine Potenzreihenentwicklung (um 0) in q.

zu (1):

(1.3) Lemma
Seien L ein Gitter in $\mathbb{C}$, r > 2 und $R := \sum\limits_{\gamma \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{|\gamma|^r}$, dann konvergiert R. ◇

Damit kann die Wohldefiniertheit und Holomorphie von G_k auf $\mathbb{H}$ gezeigt werden, denn auf D ist durch $\sum\limits_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{|mW+n|^k}$ eine nach diesem Lemma konvergente Majorante gegeben. Mit dem Weiherstrassschen Majorantenkriterium und Satz und der Holomorphie der Partialsummen folgt daraus die Holomorphie auf D. Unter Ausnutzung der bereits gezeigten Gewichtsbedingung und der Tatsache, dass D ein Fundamentalgebiet der Operation von G ist, zeigt die Betrachtung von $G_k(g^{-1}z)$ die Holomorphie auf $\mathbb{H}$

zu (2):

(1.4) Definition
Die **Riemannsche ζ-Funktion** ist definiert durch
$\zeta : \{s \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(s) > 1 \} \to \mathbb{C}, \zeta(s) := \sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$ ◇

(1.5) Bemerkung
$\zeta(s)$ konvergiert für alle s aus dem Definitionsbereich, denn es gilt mit
$s = x+iy$ ($x,y \in \mathbb{R}$): $|\frac{1}{m^s}| = |\frac{1}{e^{sLog(m)}}| = |\frac{1}{e^{xLog(m)} \cdot e^{iyLog(m)}}| = \frac{1}{e^{xLog(m)}} = \frac{1}{m^x}$. Da $x > 1$, konvergiert die Reihe $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^x}$ und ist somit eine konvergente Majorante.
Mit (0.2) und der aus dem Majorantenkriterium folgenden gleichmäßigen Konvergenz ist die Riemannsche ζ-Funktion damit insbesondere holomorph.

(1.6) Definition
$\sigma_l(r) := \sum\limits_{d \in \mathbb{N}, d|r} d^l$, $r \in \mathbb{N}$ ◇

Mit diesen Definitionen lässt sich eine explizite Darstellung der Potenzreihenentwicklung in q angeben.

(1.7) Lemma
Seien: $k \in \mathbb{Z}_{>2}$ gerade, $z \in \mathbb{H}$, dann gilt:
$G_k(z) = 2\zeta(k) + \frac{2(2\pi i)^k}{(k-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(r) q^r$ ◇

Insgesamt folgt, dass G_k eine Modulform vom Gewicht k ist.
Anhand der gegebenen Darstellung der Potenzreihenentwicklung kann der konstante Term $2\zeta(k)$ abgelesen werden. Definiere daher:

(1.8) Definition
Zu $k \in \mathbb{Z}_{>2}$ gerade, $z \in \mathbb{H}$, definiere $E_k(z) := \frac{1}{2\zeta(k)} G_k(z)$ **die normierte Eisensteinreihe.** ◇

Eine Vereinfachte Darstellung ihrer Potenzreihenentwicklung erhält man unter Verwendung der Bernoulli-Zahlen.

(1.9) Definition
Die **Bernoulli-Zahlen B_k**, $k \geq 0$ sind definiert über:
$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{z^k}{k!}$. ◇

(1.10) Proposition
Sei $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ gerade, dann: $\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{2k!} B_k$. ◇

Damit ergibt die folgende Darstellung:

(1.11) Lemma
$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(r)\, q^r$ ◇

Es werden nun Beispiele betrachtet, die im folgenden Anwendung finden:

k = 4
$E_4(z) = 1 - \frac{2 \cdot 4}{-\frac{1}{30}} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_3(r)\, q^r = 1 + 240q + 200 \cdot 9q^2 + ...$
k = 6
$E_6(z) = 1 - \frac{2 \cdot 6}{\frac{1}{42}} \sum_{r=1}^{\infty} \sigma_5(r)\, q^r = 1 - 504q - 504 \cdot 33q^2 + ...$

(1.12) Definition
$\Delta := \frac{1}{1728}(E_4^3 - E_6^2)$ ◇

Es gilt: $\Delta = \frac{1}{1728}(0 + 1728q + 1728\cdot(-24)q^2 + ...)$ und Δ ist eine Modulform vom Gewicht 12 mit konstantem Term 0.

§2 Zur Ordnung

Nachdem im letzten Abschnitt mit E_4 und E_6 weitere Beispiele von Modulformen näher bestimmt wurden, wird in diesem Abschnitt eine allgemeine Eigenschaft von Modulformen hergeleitet, die es im dritten Abschnitt ermöglichen wird, zu zeigen, dass sich alle Modulformen als Linearkombinationen der Monome in E_4 und E_6 schreiben lassen.

(2.1) Definition (Ordnung einer holomorphen Funktion in einem Punkt)
Seien:

- $0 \not\equiv f$ eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$
- $p \in \mathbb{H}$
- $f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r(z-p)^r$, $z \in \mathbb{H}$ die Potenzreihenentwicklung von f in p

Dann definiere $\mathbf{v_p(f)} := \min\{r \in \mathbb{N}_0 \mid c_r \neq 0\}$ die **Ordnung** von f in p.
Ist $f(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r q^r$ die Potenzreihenentwicklung von f in q, dann definiere des Weiteren: $\mathbf{v_{i\infty}(f)} := \min\{r \in \mathbb{N}_0 \mid a_r \neq 0\}$

(2.2) Beispiele
Anhand der Darstellungen der Potenreihenentwicklungen im ersten Abschnitt kann abgeslesen werden:

- $v_{i\infty}(E_4) = 0 = v_{i\infty}(E_6)$
- $v_{i\infty}(\Delta) = 1$ ◇

(2.3) Bemerkung
Ist f eine Modulform vom Gewicht k, so gilt:
$\forall\, g \in G, p \in \mathbb{H}$: $v_{g(p)}(f) = v_{g(p)}(f)$ ◇

Dazu:

Seien f eine Modulform vom Gewicht k, p,z $\in \mathbb{H}$ und g := $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ G, dann gilt

f(z) = $(cz+d)^{-k}$ f(g(z)), nach Definition

Nach (0.5) gilt des Weiteren für die Potenzreihenentwicklung um g(p):

$$f(z) = \sum_{l=v_{g(p)}(f)}^{\infty} a_l(z - g(p))^l,$$

mit $a_{v_{g(p)}(f)} \neq 0$.

Mit (ad - bc) = 1 folgt insgesamt für die Potenzreihenentwicklung um z:

f(z) = $(cz+d)^{-k}$ f(g(z)) = $(cz+d)^{-k} \sum\limits_{l=v_{g(p)}(f)}^{\infty} a_l(g(z) - g(p))^l$ = $(cz+d)^{-k} \sum\limits_{l=v_{g(p)}(f)}^{\infty} a_l(\frac{(ad-bd)(z-p)}{(cz+d)(cp+d)})^l$

= $\sum\limits_{l=v_{g(p)}(f)}^{\infty} a_l(cz-d)^{-k}(\frac{1}{(cz+d)(cp+d)})^l(z-p)^l$.

Da die hinzugekommenen Faktoren ungleich 0 sind, folgt aus (0.5) nun die zu zeigende Gleichheit.

(2.4) Bemerkung

Aus dem letzten Vortrag ist bekannt, dass für p $\in$ D gilt:

$$G_p := \{ g \in G \mid g(p)=p \} = \begin{cases} \{1, S\} & , p = i \\ \{1, ST, (ST)^2\} & , p = W \\ \{1, TS, (TS)^2\} & , p = -\overline{W} \\ \{1\} & , sonst \end{cases} .$$

Des Weiteren gelten:

- $[W] = [-\overline{W}]$ (T(W) = $-\overline{W}$)
- für g $\in$ G, p,$\tilde{p} \in \mathbb{H}$ mit $\tilde{p}$ = g(p): $g^{-1}G_{\tilde{p}}g = G_p$. Insbesondere haben sie die gleiche Ordnung. ◇

Somit ist die Ordnung der Stabilisatoren auf $\mathbb{H}$ gegeben durch:

$$e_p = \begin{cases} 2 & , p \in [i] \\ 3 & , p \in [W] \\ 1 & , sonst \end{cases} .$$

Nun zu dem Satz, der im Folgenden als eines der Hauptwerkzeuge dienen wird.

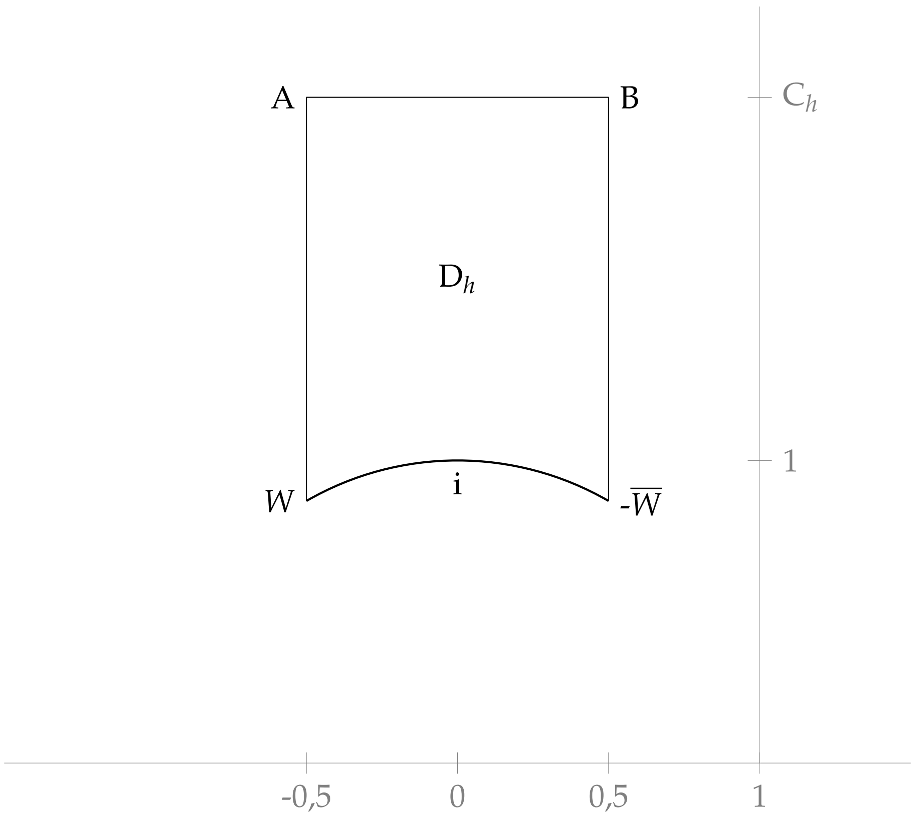
(2.5) Satz
Sei: $0 \not\equiv$ f eine Modulform vom Gewicht k,
dann gilt:

$$v_{i\infty}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_W(f) + \sum_{p\in\mathbb{H}/G, p\neq[i],[W]} v_p(f) \overset{\text{(a)}}{=} v_{i\infty} + \sum_{p\in\mathbb{H}/G} \frac{1}{e_p}v_p(f) \overset{\text{(b)}}{=} \frac{k}{12}$$ ◇

Beweis
Im Folgenden werden S und T auch als Bezeichnung der durch ihr Operieren induzierten holomorphen Abbildungen verwendet.
zu (a):
Folgt direkt mit der letzten Bemerkung.
zu (b):
Vorüberlegung:

- $\mathbb{H}$ und $K_1(0)$ sind konvexe Gebiete in $\mathbb{C}$
- f $\not\equiv 0 \Rightarrow v_p$(f) $< \infty\ \forall\, p \in \mathbb{H}$ nach dem Identitätssatz
- f holomorh auf $\mathbb{H}$ und periodisch mit Periode 1 $\overset{(0.7)}{\Rightarrow} \exists$ F: $K_{0,1}(0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit f(z) = F($e^{2\pi iz}$) $\forall$ z $\in \mathbb{H}$
- f $\not\equiv 0 \Rightarrow$ F $\not\equiv 0$
- f holomorph in $i\infty \Rightarrow$ F holomorph (fortsetzbar) in 0 $\Rightarrow \exists$ h > 0: F(z) $\neq 0$ $\forall\, 0 < |z| < h$, mit dem Identitätssatz, da sonst die Nullstellenmenge von F einen Häufungspunkt bei 0 ($\in K_1(0)$) hätte und somit F $\equiv 0$ (Widerspruch). Ebenfalls aus dem Identitätssatz folgt: $v_0(F) < \infty$ und somit $v_{i\infty}(f) < \infty$
- $|e^{2\pi iz}| = |e^{2\pi iRe(z)}|\,|e^{-2\pi Im(z)}| = e^{-2\pi Im(z)}$ wird mit steigendem Imaginärteil kleiner $\Rightarrow \exists\, C_h \in \mathbb{R}_+$, so dass $|e^{2\pi iz}| <$ h $\forall$ z $\in \mathbb{C}$ mit Im(z) $\geq C_h$
- Definiere $D_h := \{\, z \in D \mid Im(z) \leq C_h\}$
- Da D ein Fundamentalbereich der Operation von G auf $\mathbb{H}$ ist, enthält D_h somit Vertreter aller Nullstellenklassen von f in $\mathbb{H}/G$
- D_h kompakt $\Rightarrow$ in D_h sind nur endlich viele Nullstellen von f enthalten (da sonst die Nullstellenmenge von f einen Häufungspunkt in $\mathbb{H}$ hätte und somit nach dem Identitätssatz f $\equiv 0$ wäre)

Insgesamt ist also die Anzahl der Nullstellen von f in $\mathbb{H}/G$ endlich, sodass nur für endlich viele p $\in \mathbb{H}/G$ v_p(f) > 0 gilt. Mit dem zweiten und fünften Punkt der Vorüberlegung folgt somit die Endlichkeit der beiden Summen auf der linken Seite der Gleichungskette.

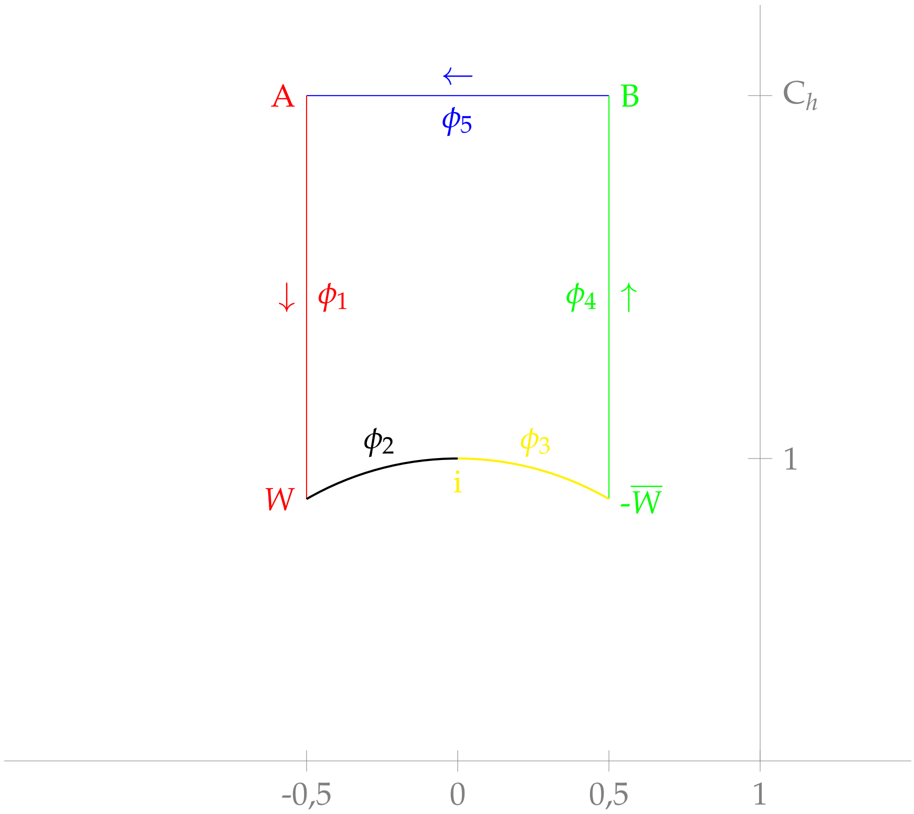


Nun zum Beweis von (b):
<u>1. Fall:</u> es liegen keine Nullstellen von f auf ∂D_h
Sei ϕ ein Randzyklus von D_h, der gegen den Uhrzeigersinn verläuft, dann betrachte:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\phi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Da f als nicht triviale Modulform nicht konstant ist, in diesem Fall von jeder Nullstellenklasse genau ein Vertreter im Inneren von D_h liegt, v_p(f) = 0 $\forall$ p $\in \mathbb{H}/G$ mit f(p) $\neq 0$ und für alle Nullstellen a von f gilt: $n_\phi(a) = \begin{cases} 0 & ,a \notin D_h \\ 1 & ,a \in \mathring{D}_h \end{cases}$, folgt mit dem Argumentprinzip: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\phi}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum\limits_{p\in\mathbb{H}/G} v_p(\text{f})$.

Auf der anderen Seite gilt mit der im folgenden Diagramm dargestellten Aufteilung des Integrationsweges $\phi = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5$:



- $\sum\limits_{p \in \mathbb{H}/G} v_p(f) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\phi_1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{\phi_2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{\phi_3} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{\phi_4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz + \int\limits_{\phi_5} \frac{f'(z)}{f(z)}dz\right)$
- Ist V: $\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph und γ: $[a, b] \to \mathbb{H}$ ein Weg, so dass V$\circ\gamma$ keine Nullstellen von f trifft, dann gilt für das Wegintegral über V$\circ\gamma$:
  $\int\limits_{V\circ\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int\limits_a^b \frac{f'((V\circ\gamma)(t))}{f((V\circ\gamma)(t))}(V \circ \gamma)'(t)dt = \int\limits_a^b \frac{(f\circ V)'(\gamma(t))\frac{1}{V'(\gamma(t))}}{(f\circ V)(\gamma(t))}V'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = \int\limits_a^b \frac{(f\circ V)'(\gamma(t))}{(f\circ V)(\gamma(t))}\gamma'(t)dt = \int\limits_{\gamma} \frac{(f\circ V)'(z)}{(f\circ V)(z)}dz$
- T$\circ\phi_1 = \phi_4^-$
- f(Tz) = f(z), z $\in \mathbb{H}$ (f Modulform vom Gewicht k)
- S$\circ\phi_2 = \phi_3^-$ (S wirkt auf dem Einheitskreis als Spiegelung an der Imaginären Achse)

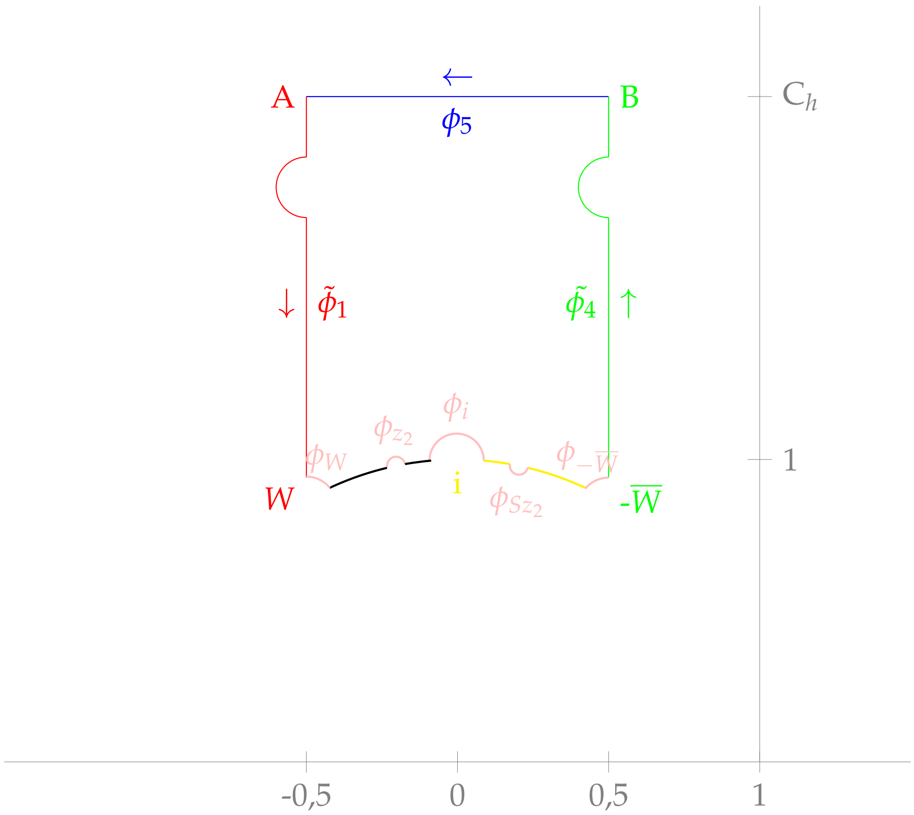
- f(Sz) = z^kf(z), z $\in \mathbb{H}$ (f Modulform vom Gewicht k) und somit $\frac{(f\circ S)'(z)}{f(Sz)} = \frac{kz^{k-1}f(z)+z^kf'(z)}{z^kf(z)} = k\cdot\frac{1}{z}+\frac{f'(z)}{f(z)}$
- $\int\limits_{\phi_2^-} \frac{k}{z}dz = k\int\limits_{\phi_2^-}\frac{1}{z}dz = k\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{\phi_2^-(t)}\cdot\phi_2^{-\prime}(t)dt = k\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{e^{it}}\cdot ie^{it}dt = k\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2}{3}\pi} idt = 2\pi i\frac{k}{12}$
  (Beachte: Der Wert des Integrals ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung des Weges)
- Die holomorphe Abbildung J: $\mathbb{H}\to\mathbb{C}, z\mapsto e^{2\pi iz}$ bildet $\phi_5:[0,1]\to\mathbb{H}$, $t\mapsto B+t(A-B)=(0,5-t)+iC_h$ mit J($\phi_5(t)$) = $-e^{-2\pi C_h}e^{-2\pi it}$ auf einen Kreis um die Null (orientiert im Uhrzeigersinn) ab, für dessen Radius nach Wahl von C_h gilt: $e^{-2\pi C_h}<h$.
  Nach der Wahl von h ist also 0 die einzig mögliche Nullstelle von F im Inneren des Kreises und es liegen keine Nullstellen von F auf der Spur des Weges J$\circ\phi_5$.
- Mit f(z) = (F$\circ$J)(z) $\forall$ z $\in\mathbb{H}$ gilt:
  $\int\limits_{\phi_5}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \int\limits_{\phi_5}\frac{(F\circ J)'(z)}{(F\circ J)(z)}dz = \int\limits_{J\circ\phi_5}\frac{F'(z)}{F(z)}dz =: \circledast$
  Mit dem vorherigen Punkt und $n_{J\circ\phi_5}(0)$ = -1 folgt nach dem Argumentprinzip: $\circledast = -2\pi i v_0$(F) = $-2\pi i v_{i\infty}$(f)

Insgesamt gilt:

$$\sum_{p\in\mathbb{H}/G} v_p(f) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\phi_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_3}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_4}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_5}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\phi_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\int\limits_{S\circ\phi_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\int\limits_{T\circ\phi_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_5}\frac{(F\circ J)'(z)}{(F\circ J)(z)}dz\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\phi_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{\phi_2}\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\int\limits_{\phi_2}k\cdot\frac{1}{z}+\frac{f'(z)}{f(z)}dz-\int\limits_{\phi_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\int\limits_{J\circ\phi_5}\frac{F'(z)}{F(z)}dz\Big) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\Big(\int\limits_{\phi_2^-}k\cdot\frac{1}{z}dz+\int\limits_{J\circ\phi_5}\frac{F'(z)}{F(z)}dz\Big) = \frac{1}{2\pi i}(2\pi i\frac{k}{12}+(-2\pi i v_{i\infty}(f))) = \frac{k}{12}-v_{i\infty}(f)))$$
$$\Rightarrow \sum_{p\in\mathbb{H}/G} v_p(f)+v_{i\infty}(f))) = \frac{k}{12}$$

<u>2. Fall:</u> es liegen Nullstellen von f auf ∂D_h

In diesem Fall passe den Zyklus an, so dass der neu Zyklus $\tilde{\phi}$ die Nullstellen auf Teilkreisbögen umläuft und lasse die Radien r der zugehörigen Kreise gegen 0 laufen. (Beachte: ϕ_5 aus dem 1. Fall trifft nach Wahl von C_h keine Nullstellen von f.)



Der Weg $\tilde{\phi}$ ist dabei so gewählt, dass abgesehen von den Klassen $[W]$ und $[i]$ weiterhin aus jeder Nullstellenklasse genau ein Vertreter umlaufen wird, während kein Vertreter aus den Klassen $[W]$ und $[i]$ umlaufen wird.
Das Argumentprinzip liefert in diesem Fall: $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\phi}} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum\limits_{p\in \mathbb{H}/G\setminus\{[W],[i]\}} v_p(f)$

Wie im vorherigen Fall kann auch hier der Wert des Integrals über eine Zerlegung des Weges bestimmt werden. Dazu:

- Wie zuvor gilt $\int\limits_{\phi_5} \frac{f'(z)}{f(z)}dz = -2\pi i v_{i\infty}(f)$.
- Da T($\tilde{\phi}_2$) = $\tilde{\phi}_4^{\,-}$, heben sich auch in diesem Fall die Integrale über die linke und die rechte Seiten weg.
- Wird das Vorgehen aus dem ersten Fall jeweils auf Paare der Teilstücke von ϕ_2 und ϕ_3 angewandt, so liefern diese für r $\to$ 0 insgesamt wieder den Wert $2\pi i\frac{k}{12}$.

- Da S$\circ\phi_{z_2} = \phi_{Sz_z}$ und -k $\int\limits_{\phi_{z_2}} \frac{1}{z} \to 0$ (mit der Holomorphie von $\frac{1}{z}$ auf $\mathbb{H}$ und (0.3),(0.4)), liefern auch die Integrale über die Teilkreise um die Nullstellen auf dem Einheitskreis den Wert 0.

Noch zu betrachten sind die Integrale über ϕ_W, $\phi_{-\overline{W}}$ und ϕ_i.
Dazu betrachte zu x $\in \{W, -\overline{W}, i\}$ (am Beweis des Argumentprinzips orientiert) die nach (0.5) für f in einer Umgebung von x existente Darstellung f(z) = (z - x)$^{v_x(f)}$ g(z), wo g eine in dieser Umgebung holomorphe Funktion mit g(x) $\neq$ 0 ist. Mit dieser Darstellung gilt:

$$\int\limits_{\phi_x} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int\limits_{\phi_x} \frac{v_x(f)}{z-x} + \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

Da g (und damit auch g$'$) holomorph ist und mit dem Identitätssatz (und g(x) $\neq$ 0) g auf einer Umgebung der 0 den Wert 0 nicht annimmt, ist $\frac{g'(z)}{g(z)}$ auf einer Umgebung der 0 holomorph. Daher gilt mit (0.3) und (0.4):

$$\int\limits_{\phi_x} \frac{g'(z)}{g(z)} dz \overset{\text{r}\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Mit dem in Abhängigkeit von r aufgespannten Winkel α_x(r) und passend gewähltem β gilt:
$\int\limits_{\phi_x} \frac{1}{z-x} dz = \int\limits_{\beta}^{\beta+\alpha_x(r)} \frac{1}{(x+e^{-it})-x} - ie^{-it} dt = -i \int\limits_{\beta}^{\beta+\alpha_x(r)} 1\, dt = -i\alpha_x(r)$, so dass sich die gesuchten Integrale bestimmen lassen zu:

$$\int\limits_{\phi_W} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \overset{\text{r}\to 0}{\longrightarrow} -i\frac{\pi}{3} v_W(f) = -\frac{2\pi i}{6} v_W(f)$$

$$\int\limits_{\phi_{-\overline{W}}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \overset{\text{r}\to 0}{\longrightarrow} -i\frac{\pi}{3} v_{-\overline{W}}(f) = -\frac{2\pi i}{6} v_{-\overline{W}}(f)$$

$$\int\limits_{\phi_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \overset{\text{r}\to 0}{\longrightarrow} -i\pi v_i(f) = -\frac{2\pi i}{2} v_i(f)$$

Da $v_W(f) = v_{-\overline{W}}(f)$ folgt schließlich:

$$\sum_{p \in \mathbb{H}/G \setminus \{[W],[i]\}} v_p(f) = \frac{1}{2\pi i}(-2\pi i v_{i\infty}(f) + 2\pi i \frac{k}{12} - 2 \cdot \frac{2\pi i}{6} v_W(f) - \frac{2\pi i}{2} v_i(f))$$

$$\Rightarrow \sum_{p\in\mathbb{H}/G\setminus\{[W],[i]\}} v_p(f) + v_{i\infty}(f) + \frac{1}{3}v_W(f) + \frac{1}{2}v_i(f) = \frac{k}{12}.$$

□

(2.6) Bemerkung
Auf $f_1 = E_4 \in M_4$ und $f_2 = E_6 \in M_6$ angewandt liefert die gerade gezeigte Gleichung:

$$v_{i\infty}(f_1) + \frac{1}{2}v_i(f_1) + \frac{1}{3}v_W(f_1) + \sum_{p\in\mathbb{H}/G, p\neq[i],[W]} v_p(f_1) = \frac{1}{3}$$

und

$$v_{i\infty}(f_2) + \frac{1}{2}v_i(f_2) + \frac{1}{3}v_W(f_2) + \sum_{p\in\mathbb{H}/G, p\neq[i],[W]} v_p(f_2) = \frac{1}{2},$$

also ist W die einzige Nullstelle von E_4 in D und i die einzige Nullstelle von E_6 in D. ◇

Die in den letzten 2 Abschnitten dargestellten Resultate werden im Folgenden als Werkzeuge für die Betrachtung der Struktur der Algebra der Modulformen und der "Eindeutigkeit" des E_8-Gitters dienen.

§3 Die Algebra der Modulformen

(3.1) Definition
Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei $\mathbf{M_k}$ definiert als die Menge aller Modulformen vom Gewicht k.
Ist $f \in M_k$ und gilt zusätzlich $f(i\infty) = 0$, dann wird f als eine **Spitzenform** vom Gewicht k bezeichnet.
Definiere $\mathbf{M_k^0}$ als die Menge aller Spitzenformen vom Grad k. ◇

(3.2) Bemerkung
Im Unterschied zur Definition der Modulformen aus dem letzten Vortrag sind in dieser Definition nicht nur Gewichte aus $2\mathbb{N}$, sondern aus ganz $\mathbb{Z}$ zugelassen. Im Folgenden wird u.A. gezeigt, dass dieser Unterschied insofern nicht weiter ins Gewicht fällt, als dass die einzige Modulform der zusätzlich betrachteten Gewichte (abgesehen von der 0) jeweils die konstante 0 Abbildung ist (bzw. im Fall k = 0 die Modulformen vom Gewicht k gerade die konstanten Abbildungen sind). ◇

(3.3) Bemerkung
Die M_k sind jeweils $\mathbb{C}$-VR.
(Betrachte: (0.1) angewandt auf die Modulformen selbst für die Holomorphie und angewandt auf die im Fall der Modulformen holomorph in die 0 fortsetzbaren Funktionen aus (0.7) für die Holomorphie in $i\infty$. Die Gewichtsbedingung folgt direkt durch Nachrechnen.) $\diamond$

Zur Struktur der VR M_k:

(3.4) Bemerkung
Betrachte die lineare Abbildung φ_∞: $M_k \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(i\infty)$.
Es gilt nach Definition: Kern(φ_∞) = M_k^0 (also insb. $M_k^0 \leq M_k$) und Bild(φ_∞) $\leq \mathbb{C}$. Mit dem Homomorphiesatz folgt: $\dim(M_k/M_k^0) \leq 1$.
Für $k \geq 4$ und gerade gilt wie im ersten Abschnitt gesehen, dass $E_k \in M_k$ mit $E_k(i\infty) = 1 \neq 0$, also $E_k \in M_k \backslash M_k^0$.
Insgesamt gilt somit für gerade $k \in \mathbb{Z}_{\geq 4}$: $M_k = M_k^0 \oplus \mathbb{C}E_k$. $\diamond$

(3.5) Satz
(i) Für $k \in \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0 \vee m = 2 \vee 2 \nmid m\}$ gilt: $M_k = \{0\}$.
(ii) $M_0 = \mathbb{C}$, $M_0^0 = \{0\}$ und für $k \in \{4,6,8,10\}$ gilt: $M_k^0 = \{0\}$ und $M_k = \mathbb{C}E_k$.
(iii) $M_{k-12} \cong M_k^0$ vermöge der durch Multiplikation mit Δ induzierten Abbildung. $\diamond$

Beweis
zu (i):
Sei $k \in \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0 \vee m = 2 \vee 2 \nmid m\}$.
Angenommen $k \in \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0 \vee m = 2 \vee 2 \nmid m\}$ und $M_k \neq \{0\}$, dann ex. $0 \not\equiv f \in M_k$ und nach (2.5) gilt:

$$v_{i\infty}(f) + \frac{1}{2}v_i(f) + \frac{1}{3}v_w(f) + \sum_{p \in \mathbb{H}/G, p \neq [i],[w]} v_p(f) = \frac{k}{12}$$

womit $k \geq 0$, da alle Summanden auf der linken Seite nach Definition nicht negativ sind. (Beachte: Der Beweis von (2.5) setzt nicht voraus, dass $k \in 2\mathbb{N}$ ist.)
Da Multiplikation mit 6 auf der linken Seite der Gleichung eine ganze Zahl und auf der rechten Seite $\frac{k}{2}$ ergibt, muss $2|k$ gelten.
Wäre $k = 2$, so müssten $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}_0$ existieren, so dass $6n_1 + 3n_2 + 2n_3 + 6n_4 = 1$. Da dies nicht der Fall ist, folgt insgesamt: $k \notin \{m \in \mathbb{Z} \mid m < 0 \vee m = 2 \vee 2 \nmid m\}$, was einen Widerspruch darstellt.
zu (iii):

zur Injektivität:
Mit $v_{i\infty}(\Delta) = 1$, $\Delta \in M_{12}$, $\frac{12}{12} = 1$ und (2.5) gilt für alle p $\in \mathbb{H}/G$: $v_p(\Delta) = 0$, also $\Delta(z) \neq 0$ für alle z $\in \mathbb{H}$ und somit ist die Multiplikation mit Δ injektiv.
zur Surjektivität:
Sei f $\in \mathrm{M}_k^0$. Definiere $X := \frac{f}{\Delta}$ (Beachte $\Delta(z) \neq 0\ \forall z \in \mathbb{H}$), dann gelten:

- z $\in \mathbb{H}$, g $:= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$ G $\Rightarrow \frac{f(g(z))}{\Delta(g(z))} = \frac{(cz+d)^k f(z)}{(cz+d)^{12}\Delta(z)} = (cz+d)^{k-12}\frac{f(z)}{\Delta(z)}$
- X ist als (wohldefinierter) Quotient holomorpher Funktionen holomorph.
- $v_p(X) = v_p(f) - v_p(\Delta) = \begin{cases} v_p(f) & , p \neq i\infty \\ v_p(f) - 1 & , p = i\infty \end{cases}$.
  Da f $\in M_k^0$, gilt $v_{i\infty}(f) \geq 1$ und somit $v_{i\infty}(X) \geq 0$. D.h. X ist ebenfalls holomorph in $i\infty$.

Insgesamt gilt: $X \in M_{k-12}$ und $X\Delta$ = f. Dies zeigt die Surjektivität.
zu (ii):
Sei k $\in \{4, 6, 8, 10\}$, dann gilt k - 12 < 0 und somit $\mathrm{M}_k^0 \overset{\text{(iii)}}{\cong} \mathrm{M}_{k-12} \overset{\text{(i)}}{=} \{0\}$.
Nach der vorherigen Bemerkung gilt damit dim(M_k) ≤ 1 und (ii) folgt, da $0 \not\equiv E_k \in \mathrm{M}_k$. □

(3.6) Bemerkung

$$M := \sum_{k=0}^{\infty} M_k$$

ist eine direkte Summe, da nicht triviale Modulformen über ein eindeutiges Gewicht verfügen. (Beachte: Da nicht triviale Modulformen mit dem Identitätssatz in unendlich vielen Punkten nicht den Wert 0 annehmen, muss dass Polynom
$(cz + d)^{k_1}$ - $(cz + d)^{k_2}$ unendlich viele Nullstellen haben.)
Des Weiteren definiert, wie schon zuvor genutzt, die Multiplikation eine Funktion $\mathrm{M}_k \times \mathrm{M}_l \to \mathrm{M}_{k+l}$, durch die

$$M = \bigoplus_{j=0}^{\infty} M_k$$

◇

zu einer graduierten Algebra wird.

(3.7) Satz
$M \cong \mathbb{C}[E_4,E_6]$ ◇

Beweis
Dazu wird zunächst gezeigt:
Beh.: $\forall$ k$\in \mathbb{Z}$ gilt: M_k wird erzeugt von einer Teilmenge von $\{ E_4^\alpha E_6^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0\}$.

Vorüberlegungen:

- Für k ≤ 6 oder k $\notin 2\mathbb{N}$ folgt dies direkt aus (3.5) (i) und (ii).
- Ist k $\in \mathbb{N}_{\geq 8}$ gerade und f $\in M_k$, dann definiere F := $\begin{cases} E_4^r E_6^0 & , k = 4r \\ E_4^{r-1} E_6^1 & , k = 4r+2 \end{cases}$.
  Es gilt: F $\in M_k$ mit F($i\infty$) $\neq 0$ (also $v_{i\infty}(F) = 0$). Somit existiert $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass f - $\lambda \cdot$ F $\in M_k^0$.
  Ist k ≤ 10, so gilt mit (3.5) (ii), dass f - $\lambda \cdot$ F = 0. Also ist f = $\lambda \cdot$ F in den in der Beh. angegebenen Monomen darstellbar.
  Ist k ≥ 10, so existiert nach (3.5) (iii) $\varphi \in M_{k-12}$, so dass f - $\lambda \cdot$ F = $\Delta \cdot \varphi$.

Die Behauptung folgt nun per Induktion über k.
(IA)
Nach der Vorüberlegung gilt die Behauptung für alle k < 12 und für alle ungeraden k.
(IV)
Es gelte die Behauptung $\forall$ k' in { ..., -1, 0, 1, ... k} für ein k $\in \mathbb{N}_{\geq 10}$
(IS)
Für ein beliebiges f $\in M_{k+1}$ gilt mit den Definitionen aus der Vorüberlegung, dass f - $\lambda \cdot$ F = $\Delta \cdot \varphi$, wobei sich φ nach (IV) und sowohl Δ als auch $\lambda \cdot$ F nach Definition als Linearkombination der gegebenen Monome darstellen lassen. Dasselbe gilt dann auch für f.

Für die Isomorphie bleibt z.z., dass E_4 und E_6 algebraisch unabhängig sind, also dass kein P in $\mathbb{C}[X,Y] \setminus \{0\}$ existiert, für das gilt: P(E_4,E_6) = 0.
Dazu:
Angenommen, es existiert ein P $\in \mathbb{C}[X,Y] \setminus \{0\}$ mit P(E_4,E_6) = 0. Dann ist jedes Monom eine Modulform. Da es sich bei M um eine direkte Summe handelt (und die Darstellung der 0 in M somit eindeutig ist), müssen die Monome gleichen Gewichtes zusammen schon 0 ergeben und es kann daher OE angenommen werden, dass alle in P vorkommenden Monome das gleiche Gewicht k haben, welches dann dem

gewichteten Grad von P entspricht.
Des Weiteren muss E_4 jedes vorkommende Monom teilen. Sonst müsste gelten:

$$P(E_4, E_6) = c \cdot E_6^{\alpha} + E_4 \cdot \tilde{P}(E_4, E_6)\,,$$

mit $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X, Y]$
(da unter der Annahme eines festen Gewichts der einzelnen Monome in allen Monomen, die E_4 nicht teilt, E_6 zu einer festen Potenz vorkommen muss).
Da aber $E_4(W) = 0$ und $E_6(W) \neq 0$, ist dies nicht möglich und es muss gelten: c = 0, also $P(E_4, E_6) = E_4 \cdot \tilde{P}(E_4, E_6)$ mit $\tilde{P}(E_4, E_6) = 0$ von gewichtetem Grad k-4.
Wird dies nun sukzessiv auf $\tilde{P}$ angewandt, so verringert sich die Potenz, zu der E_4 in den einzelnen Monomen vorkommt in jedem Schritt. Nach endlich vielen Schritten landen wir bei einem $\tilde{P}*$, welches midestens ein Monom enthält, dass nicht von E_4 geteilt wird und damit nach obiger Überlegung trivial sein muss. Damit ist P = $E_4^{\beta} \cdot \tilde{P}*$ für ein $\beta \in \mathbb{N}$ aber ebenfalls trivial. □

Bevor eine weitere Anwendung des Satzes (3.5) betrachtet wird, zunächst eine

Erinnerung:
Die irreduziblen Wurzelgitter sind:

Gitter	Dimension	Anzahl der Wurzeln
A_n	n ($\geq$ 1)	n(n+1)
D_n	n ($\geq$ 4)	2n(n-1)
E_6	6	72
E_7	7	126
E_8	8	240

(3.8) Behauptung
Sei L ein gerades, unimodulares Gitter in $\mathbb{R}^8$, dann ist L isomorph zum E_8-Gitter. ◇

Beweis
Sei ϑ_L die Theta-Reihe von L. Im letzten Vortrag haben wir gesehen:

- ϑ_L ist eine Modulform vom Gewicht 4
- der Koeffizient von q gibt die Anzahl der Wurzeln in L an

Nach Satz (3.5) ex. $c \in \mathbb{C}$, so dass $\vartheta_L = c \cdot E_4$.
Da der konstante Term der Potenzreihenentwicklung in q sowohl bei E_4 als auch bei ϑ_L 1 ist, gilt somit: $\vartheta_L = E_4 = 1 + 240q + ...$ Die Anzahl der Wurzeln in L ist also 240 und diese Wurzeln erzeugen ein Wurzelteilgitter L_U der Dimension ≤ 8.
Nun gelten:

- Das E_8-Gitter ist (bis auf Isomorphie) das einzige Wurzelgitter mit Dimension ≤ 8 und 240 Wurzel (vgl. Tabelle oben)
- Das E_8-Gitter ist unimodular
- Im Fall unimodularer Gitter ist die Determinate = 1
- $\sqrt{det(L_U)} = \sqrt{det(L)} \cdot |L/L_U|$

Insgesamt gilt also:
$L \cong E_8$, da $L_U \cong E_8$ und $|L/L_U| = 1$. $\square$