

SIEGELSCHE THETAREIHEN
ZU DEN GESCHLECHTERN DER ZEHN
LEECHARTIGEN, EXTREMALEN,
STARK MODULAREN, GERADEN GITTER

Diplomarbeit

im Studiengang Mathematik

angefertigt

an der Fakultät für Mathematik und
Wirtschaftswissenschaften der Universität Ulm



von

Maria Teider

Ulm, Januar 2005

Betreuerin: Prof. Dr. G. Nebe

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Grundlagen	5
1.2.1	Gitter in euklidischen R ⁿ -Räumen	5
1.2.2	Modulare Gitter	12
1.2.3	Geschlecht von Gittern	19
1.2.4	Siegelsche Modulformen und Theta-Reihen von Gittern	22
1.2.5	Extremale Gitter	32
2	Methoden	38
2.1	Filtrierung	38
2.2	Konstruktion einer Spitzenform nach der Methode von Borcherds, Freitag und Weissauer	44
2.3	Knesersche Nachbarmethode	57
2.4	Hecke-Operatoren	65
3	Ergebnisse	77
3.1	Vorgehensweise	77
3.1.1	Allgemein angewandte Verfahren	77
3.1.2	Praktische Umsetzung der Berechnung der Fourier-Koeffizienten	81
3.2	Das Geschlecht des Leech-Gitters der Dimension 24	83
3.3	Das Geschlecht des Barnes-Wall-Gitters der Dimension 16	85
3.4	Das Geschlecht des Coxeter-Todd-Gitters der Dimension 12	88
3.5	Das Geschlecht der 5-modularen geraden Gitter der Dimension 8	91
3.6	Das Geschlecht von \mathcal{E}_6 der Dimension 8	93
3.7	Das Geschlecht der 7-modularen Gitter der Dimension 6	94
3.8	Das Geschlecht der stark N-modularen Gitter der Dimension 4 für N = 11, 14 und 15	95
3.9	Das Geschlecht der 23-modularen Gitter der Dimension 2	96

Kapitel 1

Einführung

1.1 Einleitung

Der Begriff „Gitter“ wurde erst 1831 von Gauss in die Mathematik eingeführt, beim Beweis über die dichteste gitterförmige Kugelpackung im 3-dimensionalen Raum. Implizit über zahlentheoretische Begriffe wurde er von anderen bereits früher verwendet, wie z. B. von Lagrange im Jahr 1770 bei der Bestimmung der dichtesten gitterförmigen Packungen von Kreisen. Seit dem Ende des 19. Jahrhunderts sind Gitter ein Gegenstand mathematischer Forschung, sogar der zentrale Gegenstand in der Minkowskischen Geometrie der Zahlen. Die Pionierarbeiten dazu sind jedoch in der Schreibweise der quadratischen Formen verfaßt, die von uns verwendete geometrische Notation wurde erst vor ein paar Jahrzehnten eingeführt. Diese ist zum einen geometrisch anschaulicher, zum anderen zum Algorithmisieren geeigneter, sodaß die meisten Fragestellungen mit Hilfe des Computers gelöst werden können.

Ein Gitter ist, grob beschrieben, eine unendliche Punktmenge im Raum mit einer regelmässigen Anordnung der Punkte. Formal besteht ein Gitter in einem euklidischen Vektorraum aus allen ganzzahligen Linearkombinationen einer Basis des Vektorraumes. Das einfachste Beispiel eines Gitters in \mathbb{R}^d ist das Standardgitter \mathbb{Z}^d .

Gitter treten in verschiedenen mathematischen Gebieten auf: In der Kristallographie als Menge von Translationsvektoren in einer sogenannten kristallographischen Gruppe, in der Struktur- und Darstellungstheorie von Lie-Gruppen und Lie-Algebren als Wurzelgitter und Gewichtsgitter, in der Zahlentheorie bei Lösungen ganzzahliger quadratischer Formen. Außerdem an völlig anderer Stelle – in der Informationstheorie – im Zusammen-

hang mit Signalübertragung und auch in der diskreten Geometrie bei der klassischen, von Kepler initiierten, Frage nach den dichtesten gitterförmigen Kugelpackungen.

Last but not least: In der Codierungstheorie beim Problem optimaler fehlerkorrigierender Codes, wobei viele neue Codes mittels Gitter und auch umgekehrt konstruiert wurden.

Die Gittertheorie hängt eng zusammen mit der Theorie der Modulformen, die beim Studium von Eigenschaften eines Gitters an seiner Theta-Reihe zum Tragen kommt (siehe dazu den Übersichtsartikel [14]). Darüber hinaus können wir z. B. durch Bildung der Siegelschen Theta-Reihen“ einige Operationen auf dem Vektorraum der Gitterklassen auf Operationen auf einem bestimmten Vektorraum von Modulformen übertragen.

Die Ausgangsbasis dieser Arbeit war die wissenschaftliche Veröffentlichung „On Siegel modular forms of weight 12“ von G. Nebe und B. Venkov (s. [16]).¹

Darin wurde der endlich dimensionale Vektorraum \mathcal{V} der formalen \mathbb{C} -Linearkombinationen der Isometrieklassen der unimodularen geraden Gitter der Dimension 24 (sogenannte Niemeier-Gitter) betrachtet und einige Hecke-Operatoren darauf explizit (d.h. in einer Matrixdarstellung) berechnet. Diese 24 Isometrieklassen bilden das Geschlecht des Leech-Gitters, das eins der bemerkenswertesten Gitter unter allen bisher bekannten ist.

Auf dem Vektorraum \mathcal{V} ist durch die Siegelschen Theta-Reihen der Gitter bis zum Grad 12, die alle Siegelsche Modulformen vom Gewicht 12 sind, eine Filtrierung gegeben. Ein Hecke-Operator, den R. Borcherds zum Zweck der Klassifizierung der ungeraden unimodularen Gitter der Dimension 24 entdeckte, ist aus der Kneserschen Nachbarmethode naheliegend. Er erhält die Filtrierung und hat als ein selbstadjungierter Operator bezüglich einer natürlichen hermiteschen Form auf \mathcal{V} zudem ein einfaches Spektrum. Seine 24 Eigenvektoren sind die Eigenformen der Hecke-Algebra sowie Spitzenformen vom Gewicht 12 und von unterschiedlichen Ordnungen, die zu bestimmen im allgemeinen schwierig ist. In diesen für das Geschlecht des Leech-Gitters auftretenden Fällen wurden alle diese Ordnungen, bis auf eine (für die aber eine gute obere und untere Schranke gefunden wurde), bestimmt.

¹Für eine genauere Erläuterung der nachfolgenden Fachbegriffe siehe den Abschnitt „Grundlagen“.

Die dafür eingesetzte Methode war die Einführung einer hermiteschen Form (die ein algebraisches Analogon zum Petersson'schen Skalarprodukt für Siegel'sche Spitzenformen ist) und einer Multiplikation auf \mathcal{V} . Die daraus resultierenden Relationen ermöglichten die genaue Platzierung der meisten Eigenformen in der Filtrierung. Um die Ordnungen der Eigenformen für die restlichen Fälle zu bestimmen, wurden zwei Spitzenformen vom Gewicht 12 konstruiert.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Ausdehnung der Untersuchungen durch eine entsprechend abgeänderte Methode auf weitere Geschlechter, nämlich die Geschlechter der zehn leechartigen, extremalen, stark modularen, geraden Gitter. „Leechartig“ bedeutet hierbei, daß das Gitter im wesentlichen die gleichen Struktureigenschaften wie das Leech-Gitter besitzt.

Genaugenommen betrachten wir die stark N -modularen geraden Gitter mit N aus der Menge $\mathcal{N} := \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ und der zugehörigen Dimension $d(N)$, die mit der Formel $d(N) := 24\sigma_0(N)/\sigma_1(N)$ berechnet wird (wobei $\sigma_1(N)$ die Summe der positiven Teiler von N und $\sigma_0(N)$ die Anzahl dieser Teiler bezeichnet). Das 1-modulare Gitter hierbei ist das Leech-Gitter.

Solche Gitter werden zum einen ausgewählt, weil ihre Theta-Reihen zu einem übersichtlichen Ring der Modulformen gehören, und zum anderen verbindet alle diese Gitter die Eigenschaft „Extremalität“, die, grob beschrieben, bedeutet, daß die minimale Länge der von Null verschiedenen Gittervektoren so groß ist, wie es die Theorie der Modulformen erlaubt. In [19] wird gezeigt, daß zu jedem $N \in \mathcal{N}$ genau ein solches Gitter \mathcal{E}_N der Dimension $d(N)$ existiert. Es wird konstruiert als das Fixgitter eines Elementes der Ordnung N in der Mathieu-Gruppe M_{23} , einer Untergruppe der Automorphismengruppe des Leech-Gitters, angeregt durch die Tatsache, daß \mathcal{N} auch die Menge der quadratfreien Ordnungen der Elemente von M_{23} ist.

In der nachfolgenden Tabelle sind alle diese Gitter aufgelistet.² Ihre Geschlechter werden in [24] vorgestellt. Sie sind stark modular, mit Ausnahme der Fälle $N = 2$ und $N = 6$.

²Eine allgemeine Übersicht über modulare Gitter, sowohl gerade als auch ungerade, bis zur Dimension 64, bietet die Datenbank „Katalog der Gitter“ (s. [15]).

N	Dimension d(N)	Gitter \mathcal{E}_N
1	24	Leech-Gitter Λ_{24}
2	16	Barnes-Wall-Gitter BW_{16}
3	12	Coxeter-Todd-Gitter K_{12}
5	8	Gitter $Q_8(1)$ (auch H_4 genannt)
6	8	$A_2 \otimes D_4$ mit der Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 2\text{Gram}(D_4) & \text{Gram}(D_4) \\ \text{Gram}(D_4) & 2\text{Gram}(D_4) \end{pmatrix}$
7	6	$A_6^{(2)}$ mit der Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
11	4	zur Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ gehörendes Gitter
14	4	zur Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ gehörendes Gitter
15	4	zur Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ gehörendes Gitter
23	2	zur Gram-Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ gehörendes Gitter

1.2 Grundlagen

Ziel dieses Kapitels ist es, alle zum weiteren Verständnis der Arbeit notwendigen Begriffe und Sätze aus verschiedenen Gebieten zusammenzutragen.

1.2.1 Gitter in euklidischen Räumen

Definition 1.1 Im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^d mit einem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) heißt eine Teilmenge Λ ein Gitter, falls eine Basis $\{b_1, \dots, b_d\}$ von \mathbb{R}^d existiert, so daß Λ aus allen ganzzahligen Linearkombinationen der Vektoren b_1, \dots, b_d besteht, d.h.

$$\Lambda = \langle b_1, \dots, b_d \rangle_{\mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{i=1}^d \alpha_i b_i \mid \alpha_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Die Menge $\{b_1, \dots, b_d\}$ wird eine Basis von Λ genannt.

Bemerkung 1.2 Strenggenommen ist Λ in der obigen Definition ein volldimensionales \mathbb{Z} -Gitter.

Beispiel 1.3 Das Gitter $\mathbb{Z}^d := \langle e_1, \dots, e_d \rangle_{\mathbb{Z}}$, erzeugt von den üblichen Einheitsvektoren e_1, \dots, e_d , in \mathbb{R}^d mit dem kanonischen euklidischen Skalarprodukt, wird das Standardgitter genannt.

Wir heben hervor, daß für die Struktur eines Gitters Λ die abelsche Gruppe Λ zusammen mit dem auf \mathbb{R}^d vorgegebenen Skalarprodukt (\cdot, \cdot) bestimmend ist, und daß die Einschränkung des Skalarproduktes auf $\Lambda \times \Lambda$ die wichtigste Information über Λ liefert. Denn rein als abelsche Gruppen betrachtet, sind je zwei Gitter derselben Dimension d isomorph, nämlich isomorph zu \mathbb{Z}^d . So ist das Gitter Λ stets als das Paar $(\Lambda, (\cdot, \cdot))$ zu betrachten.

Allgemeiner kann ein Gitter als ein endlich erzeugter freier \mathbb{Z} -Modul von einem endlichen Rang mit einer positiv definiten symmetrischen Bilinearform beschrieben werden.

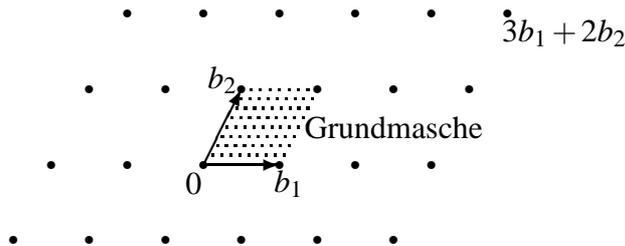
Für eine Einführung in die Grundlagen der Gittertheorie verweisen wir auf [7].

Definition 1.4 *Das Parallelepiped*

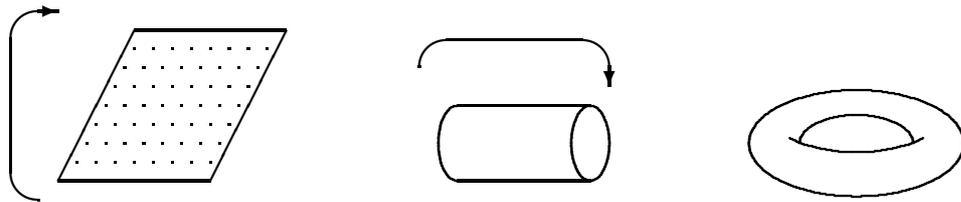
$$F(B) := \left\{ \sum_{i=1}^d t_i b_i \mid 0 \leq t_i < 1 \text{ für alle } i = 1, \dots, d \right\}$$

heißt die Grundmasche (oder auch der Fundamentalbereich) des Gitters Λ bezüglich der Basis $B = \{b_1, \dots, b_d\}$.

Folgende Zeichnung zeigt einen Ausschnitt aus einem Gitter der Dimension 2:



Durch Identifizierung der durch Λ aufeinander bezogenen Teile des Randes der Grundmasche von Λ entsteht ein d -dimensionaler Torus, der kompakte Quotientenraum \mathbb{R}^d / Λ , wie die folgende Skizze für ein 2-dimensionales Gitter veranschaulicht:



Eine andere Definition für ein Gitter ergibt sich mittels des Satzes von Bieberbach: Eine Teilmenge Λ des euklidischen Raumes \mathbb{R}^d ist genau dann ein Gitter, wenn sie eine diskrete additive Untergruppe des \mathbb{R}^d mit dem kompakten Quotientenraum \mathbb{R}^d / Λ ist.

Die aus den Skalarprodukten der Basisvektoren untereinander gebildete Matrix $((b_i, b_j))_{i,j=1,\dots,d}$ ist offenbar symmetrisch und positiv definit (insbesondere invertierbar).

Definition 1.5 Die Matrix $\text{Gram}(B) := ((b_i, b_j))_{i,j=1,\dots,d}$ heißt die Gram-Matrix (nach J. P. Gram) von Λ bezüglich der Basis $B = \{b_1, \dots, b_d\}$.

Bemerkung 1.6 Schreiben wir einen Gittervektor λ als $\lambda = \sum_{i=1}^d \alpha_i b_i$ eine eindeutige ganzzahlige Linearkombination der Basis $B = \{b_1, \dots, b_d\}$, so gilt offenbar:

$$(\lambda, \lambda) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \text{Gram}(B) (\alpha_1, \dots, \alpha_d)^{tr}.$$

Beispiel 1.7 Das Standardgitter \mathbb{Z}^d hat als die Gram-Matrix bezüglich der Einheitsvektoren e_1, \dots, e_d die $d \times d$ Einheitsmatrix E_d .

Durch die Angabe der Gram-Matrix bezüglich der Einheitsvektoren ist ein Gitter eindeutig spezifiziert. Umgekehrt läßt sich für jede positiv definite symmetrische Matrix $P \in \mathbb{R}^{d \times d}$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{R}^d definieren gemäß $(x, y)_P := x^t P y$ für $x, y \in \mathbb{R}^d$ und damit das Gitter $(\mathbb{Z}^d, (\cdot, \cdot)_P)$, dessen Gram-Matrix bezüglich der Einheitsvektoren gleich P ist.

Lemma 1.8 Die Determinante einer Gram-Matrix ändert sich nicht bei einem Basiswechsel.

Beweis. Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis des Gitters Λ . Ist $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ eine weitere Basis von Λ , so existiert eine sogenannte Basiswechselmatrix $U = (U_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ mit $b'_i = \sum_{k=1}^d U_{ki} b_k$ für alle $i = 1, \dots, d$. Daraus folgt zunächst, daß U ganzzahlige Koeffizienten hat. Die Matrix U^{-1} drückt umgekehrt die Vektoren b durch die Basisvektoren b'_i aus, hat also ebenfalls ganzzahlige Koeffizienten. Daher ist $U \in GL_d(\mathbb{Z})$.

Die Gruppe $GL_d(\mathbb{Z})$ aller ganzzahligen $d \times d$ Matrizen mit einer ganzzahligen Inversen ist aber offenbar die Menge aller unimodularen $d \times d$ Matrizen (d.h. ganzzahligen Matrizen mit der Determinante gleich ± 1).

Damit folgt für die Gram-Matrix bezüglich B $\text{Gram}(B') = U^t \text{Gram}(B) U$ und wegen $\det U = \pm 1$ schließlich $\det \text{Gram}(B') = \det \text{Gram}(B)$. □

Die folgende Definition ist daher sinnvoll (da unabhängig von der Wahl der Gitterbasis):

Definition 1.9 Die Determinante der Gram-Matrix bezüglich einer beliebigen Gitterbasis wird die Determinante (manchmal auch die Diskriminante) des Gitters Λ genannt. Die Bezeichnung dafür ist: $\det \Lambda$.

Definition 1.10 Für ein d -dimensionales Gitter Λ mit der Basis B sei das d -dimensionale Volumen des Fundamentalbereiches $F(B)$ erklärt durch

$$\text{vol } F(B) := \sqrt{\det \text{Gram}(B)}.$$

Hiermit ergibt sich sofort:

Proposition 1.11 Die Determinante des Gitters Λ ist das Quadrat des d -dimensionalen Volumens von \mathbb{R}^d/Λ .

Dies, zusammen mit der Tatsache, daß $\text{vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda') = \text{vol}(\mathbb{R}^d/\Lambda) \cdot [\Lambda : \Lambda']$ für $\Lambda' \subseteq \Lambda$, beweist die sogenannte Determinanten-Index-Formel, die im folgenden Satz angegeben wird. Sie besagt, daß beim Übergang zu einem Teilgitter die Determinante mit dem Quadrat des (Gruppen-) Indexes des Teilgitters im Obergitter (als abelsche Gruppe) multipliziert werden muß.

Satz 1.12 Für $\Lambda' \subseteq \Lambda$ gilt: $\det \Lambda' = \det \Lambda \cdot [\Lambda : \Lambda']^2$.

Wenn ein Gitter aus einem anderen Gitter durch lineare Isometrien des \mathbb{R}^d wie Drehung oder Spiegelung erhalten werden kann, dann sind diese Gitter „im Wesentlichen gleich“.

Definition 1.13 Eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt orthogonal (auch isometrisch) bezüglich des Skalarproduktes (\cdot, \cdot) , falls sie dieses Skalarprodukt erhält, d.h. falls

$$(f(x), f(y)) = (x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Jede orthogonale Abbildung ist injektiv und wegen der Endlich-Dimensionalität sogar bijektiv, also ein Automorphismus des euklidischen Vektorraumes. Ferner ist die Verkettung von zwei orthogonalen Abbildungen wieder orthogonal, ebenso die Inverse einer orthogonalen Abbildung.

Daher bilden alle orthogonalen Abbildungen des euklidischen Vektorraumes \mathbb{R}^d mit dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) bei Verkettung eine Gruppe:

Definition 1.14 Die Gruppe $O(\mathbb{R}^d, (\cdot, \cdot))$ aller orthogonalen Abbildungen heißt die orthogonale Gruppe des euklidischen Vektorraumes \mathbb{R}^d mit dem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) .

Definition 1.15 Zwei Gitter Λ und Λ' der gleichen Dimension d heißen isomorph, in Zeichen $\Lambda \cong \Lambda'$, falls sie durch eine orthogonale Abbildung ineinander überführt werden können, d.h. falls ein $f \in O(\mathbb{R}^d, (\cdot, \cdot))$ existiert mit $f(\Lambda) = \Lambda'$.

Die Gitter-Isomorphie ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Gitter gleicher Dimension.

Definition 1.16 Die Äquivalenzklassen der Gitter-Isomorphie werden aus Tradition Isometrieklassen genannt und mit $[\Lambda]$ für den Repräsentanten Λ bezeichnet.

Also besteht die Isometrieklasse eines Gitters Λ aus allen Gittern, die zu Λ isomorph sind, d.h. $[\Lambda] = \{\Lambda' \mid \Lambda' \cong \Lambda\}$.

In [10, Satz 20.2] wird unter Benutzung der klassischen Reduktionstheorie die folgende wohlbekanntete Tatsache gezeigt:

Satz 1.17 *Für feste Dimension und Determinante existieren nur endlich viele Isometrieklassen ganzer Gitter.*

Die Isomorphie zwischen zwei Gittern kann anhand ihrer Gram-Matrizen überprüft werden, nämlich durch:

Bemerkung 1.18 *Zwei Gitter sind genau dann zueinander isomorph, wenn ihre Gram-Matrizen bezüglich beliebiger Basen zueinander isometrisch sind, d.h. wenn eine Matrix $U \in GL_d(\mathbb{Z})$ mit $G' = U^{tr}GU$ existiert, wobei G und G' Gram-Matrizen von Λ , bzw. Λ' , sind.*

Definition 1.19 *Die Automorphismengruppe des Gitters Λ in \mathbb{R}^d ist*

$$\text{Aut}(\Lambda) := \left\{ f \in \text{O}(\mathbb{R}^d, (\cdot, \cdot)) \mid f(\Lambda) = \Lambda \right\}.$$

Bemerkung 1.20 *Schreiben wir für ein ganzes Gitter Λ die Operation von $\text{Aut}(\Lambda)$ auf $(\mathbb{R}^d, (\cdot, \cdot))$ bezüglich einer Basis B von Λ , d.h. identifizieren wir für ein ganzes Gitter Λ die Elemente von $\text{Aut}(\Lambda)$ mit ihrer Matrixdarstellung bezüglich einer Basis B von Λ , so wird $\text{Aut}(\Lambda)$ zu einer Untergruppe von $GL_d(\mathbb{Z})$. Diese Untergruppe ist endlich, da das Skalarprodukt (\cdot, \cdot) positiv definit ist. Also ist*

$$\text{Aut}(\Lambda) = \{C \in GL_d(\mathbb{Z}) \mid C^{tr}\text{Gram}(B)C = \text{Gram}(B)\}.$$

Definition 1.21 *Ein Gitter Λ heißt ganz, falls die Bilinearform auf Λ nur ganze Werte annimmt, also falls für je zwei Gittervektoren λ_1 und λ_2 gilt: $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z}$.*

Ein Gitter Λ heißt gerade, falls für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt: $(\lambda, \lambda) \in 2\mathbb{Z}$.

Bemerkung 1.22 *Jedes gerade Gitter ist ganz, wegen der Identität*

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x + y) - \frac{1}{2}(x, x) - \frac{1}{2}(y, y).$$

Offensichtlich ist ein Gitter genau dann ganz, wenn seine Gram-Matrix bezüglich einer beliebigen Basis ganzzahlig ist, und genau dann gerade, wenn zusätzlich die Diagonaleinträge der Gram-Matrix gerade Zahlen sind (d.h. wenn seine Gram-Matrix gerade ist).

Definition 1.23 Für einen Gittervektor λ wird die Größe (λ, λ) die Quadratlänge oder einfach die Länge von λ genannt.

Die folgende topologische Eigenschaft, die durch Betrachtung der Dimension 2 völlig einsichtig erscheint, beruht auf der Diskretheit von Gittern:

Lemma 1.24 Für jede reelle Zahl r gibt es nur endlich viele Gittervektoren mit der Länge kleiner oder gleich r .

Bemerkung 1.25 Dies sind die Gittervektoren im Inneren und auf der Mantelfläche des Ellipsoids $\{v \in \mathbb{R}^d \mid (v, v) = r\}$.

Beweis. Fassen wir einen Gittervektor λ mit $(\lambda, \lambda) \leq r$ als die Linearkombination $\sum_{i=1}^d \alpha_i b_i$ einer Basis $\{b_1, \dots, b_d\}$ des Gitters auf, so existiert eine Konstante C (da bekanntlich je zwei Normen auf \mathbb{R}^d äquivalent sind), sodaß $|\alpha| \leq \max_{i=1, \dots, d} |\alpha_i| \leq C\sqrt{r}$ gilt. Daher existieren höchstens $(2C\sqrt{r} + 1)^d$ solcher Gittervektoren λ . \square

Der nächste Satz ist eine direkte Konsequenz aus dem vorangehenden Lemma:

Satz 1.26 Jedes Gitter Λ hat kürzeste, von Null verschiedene Vektoren, also existiert das Minimum der von Null verschiedenen Gittervektoren.

Wir können daher folgende Definition geben:

Definition 1.27 Die Zahl

$$\min \Lambda := \min_{0 \neq \lambda \in \Lambda} (\lambda, \lambda)$$

wird das Minimum des Gitters Λ genannt.

Die Anzahl seiner kürzesten, von Null verschiedenen Vektoren

$$\varkappa(\Lambda) := |\{\lambda \in \Lambda \mid (\lambda, \lambda) = \min \Lambda\}|$$

heißt die Kußzahl dieses Gitters.

Bemerkung 1.28 Die Kußzahl ist die maximale Anzahl der sich nichtüberlappenden Kugeln, deren Mittelpunkte die Gitterpunkte sind und die eine ebensogroße Kugel um den Nullpunkt berühren.

Der Name für diesen Begriff kommt aus dem Problem der dichtesten Kugelpackungen, das später besprochen wird (s. auch [6]).

Beispiel 1.29 *Das Leech-Gitter hat keine Vektoren der Länge 2, es ist sogar das einzige unimodulare gerade Gitter der Dimension 24 mit dem Minimum 4 und der Kußzahl 196560, die die größtmögliche für diese Dimension ist.*

Im nächsten Satz geben wir zusammenfassend wesentliche Eigenschaften von Isometrie-
klassen an, die sich unmittelbar aus den Definitionen herleiten lassen.

Satz 1.30 *Das Minimum, die Kußzahl (oder allgemeiner die Anzahl von Vektoren bestimmter Länge), die Determinante sowie die Ordnung der Automorphismengruppe sind Invarianten der Isometrieklasse eines Gitters.*

In der Regel bestimmen die Invarianten die Isometrieklasse nicht eindeutig.

1.2.2 Modulare Gitter

Schon lange gibt es in der Gittertheorie den Begriff „unimodulares Gitter“, in Analogie zur Matrixtheorie ist ein solches Gitter ganz und hat die Determinante 1. Unimodulare Gitter spielen eine große Rolle in der klassischen Theorie der quadratischen Formen.

Ein anderer Zugang zur Charakterisierung eines unimodularen Gitters erfolgt über sein duales Gitter:

Definition 1.31 Das duale Gitter $\Lambda^\#$ zum Gitter Λ in \mathbb{R}^d ist definiert als

$$\Lambda^\# := \left\{ v \in \mathbb{R}^d \mid (v, \lambda) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \lambda \in \Lambda \right\}.$$

Wie der Name schon sagt, ist $\Lambda^\#$ auch ein Gitter in \mathbb{R}^d . Dies wird im folgenden Satz erläutert.

Satz 1.32 Ist $\{b_1, \dots, b_d\}$ eine Basis von Λ , so bildet ihre Dualbasis $\{b_1^\#, \dots, b_d^\#\}$, die durch $(b_i^\#, b_j) = \delta_{ij}$ charakterisiert ist, eine Basis des dualen Gitters $\Lambda^\#$ zu Λ .

Hierbei ist δ das Kronecker-Symbol.

Weiter ist jedes $v \in \Lambda^\#$ eine eindeutige ganzzahlige Linearkombination $\sum_{i=1}^d (v, b_i) b_i^\#$.

Beweis. Die Dualbasis $B^\# = \{b_1^\#, \dots, b_d^\#\}$ von $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ wird folgendermaßen konstruiert:

$$b_i^\# = \sum_{j=1}^d A_{ij} b_j,$$

wobei $A := (A_{ij})_{i,j=1,\dots,d} = \text{Gram}(B)^{-1}$ die Inverse der Gram-Matrix von Λ bezüglich B ist. Beachte dabei, daß A symmetrisch ist, da $\text{Gram}(B)$ offenbar symmetrisch ist.

Es ist klar, daß $B^\#$ eine Basis von $\Lambda^\#$ ist. Außerdem gilt $\text{Gram}(B^\#) = A \cdot \text{Gram}(B) \cdot A = A$.

Aber $\text{Gram}(B^\#) = ((b_i^\#, b_j^\#))_{i,j=1,\dots,d}$ und daher

$$b_i^\# = \sum_{j=1}^d (b_i^\#, b_j^\#) b_j.$$

Wegen $A^{-1} = \text{Gram}(B) = ((b_i, b_j))_{i,j=1,\dots,d}$ gilt weiter

$$b_i = \sum_{j=1}^d (b_i, b_j) b_j^\#.$$

Das beweist den zweiten Teil der Behauptung, nämlich daß jedes $v \in \Lambda^\#$ eine eindeutige ganzzahlige Linearkombination $\sum_{i=1}^d (v, b_i) b_i^\#$ ist. \square

Bemerkung 1.33 Aus dem obigen Beweis folgt ebenfalls:

Jedes $v \in \Lambda^\#$ ist eine (eindeutige) Linearkombination $\sum_{i=1}^d (v, b_i^\#) b_i$.

Korollar 1.34 Aus $\Lambda^\# = \langle b_1^\#, \dots, b_d^\# \rangle_{\mathbb{Z}}$ folgt:

$$(\Lambda^\#)^\# = \langle (b_1^\#)^\#, \dots, (b_d^\#)^\# \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle b_1, \dots, b_d \rangle_{\mathbb{Z}} = \Lambda.$$

Korollar 1.35 Für das duale Gitter $\Lambda^\#$ zum Gitter Λ mit der Basis $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ ist die Gram-Matrix bezüglich $B^\# = \{b_1^\#, \dots, b_d^\#\}$ die Inverse der Gram-Matrix $\text{Gram}(B)$ von Λ , d.h. $\text{Gram}(B^\#) = (\text{Gram}(B))^{-1}$.

Insbesondere ist die Determinante von $\Lambda^\#$ der reziproke Wert der Determinante von Λ , nämlich $\det \Lambda^\# = \frac{1}{\det \Lambda}$.

Proposition 1.36 Ist $\Lambda' \subseteq \Lambda$, so ist $\Lambda^\# \subseteq (\Lambda')^\#$.

Beweis. Für jedes $v \in \Lambda^\#$ gilt aus der Definition: $(v, \lambda) \in \mathbb{Z}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und somit gilt wegen $\Lambda' \subseteq \Lambda$: $(v, \lambda') \in \mathbb{Z}$ für alle $\lambda' \in \Lambda'$. \square

Offenbar ist Λ genau dann ganz, wenn $\Lambda \subseteq \Lambda^\#$ gilt.

Definition 1.37 Im Falle $\Lambda \subseteq \Lambda^\#$ wird $\Lambda^\#/\Lambda$ (als abelsche Gruppe) die Diskriminanten-
gruppe von Λ genannt.

Bemerkung 1.38 Ist $\Lambda \subseteq \Lambda^\#$, was für ein ganzes Gitter Λ der Fall ist, so ist der Index $[\Lambda^\# : \Lambda]$ offenbar endlich und nach der Determinanten-Index-Formel (vgl. Satz 1.12) gilt für die Diskriminante von Λ :

$$[\Lambda^\# : \Lambda] = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{\det \Lambda^\#}} = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(\det \Lambda)^{-1}}} = \sqrt{(\det \Lambda)^2} = |\det \Lambda| = \det \Lambda.$$

Definition 1.39 Ein ganzes Gitter Λ heißt unimodular (auch selbstdual), falls $\Lambda = \Lambda^\#$.

Aus der vorangehenden Bemerkung ergibt sich nun sofort

Folgerung 1.40 Ein unimodulares Gitter hat die Determinante 1.

Beispiel 1.41 Das ungerade Standardgitter \mathbb{Z}^d ist in jeder Dimension d unimodular. Außerdem ist das Leech-Gitter, das gerade ist und die Dimension 24 hat, unimodular.

Für die Dimension eines unimodularen geraden Gitters gibt es eine Einschränkung, die mithilfe der Theorie der Modulformen gezeigt werden kann (zum Beweis dieses klassischen Resultates siehe z. B. [7, Theorem 2.1]):

Satz 1.42 *Ein gerades unimodulares Gitter existiert nur in den durch 8 teilbaren Dimensionen.*

Definition 1.43 *Zu einem Gitter Λ und zu einer reellen Zahl r bezeichnen wir mit*

$${}^{(r)}\Lambda := \sqrt{r}\Lambda.$$

ein reskaliertes Gitter.

Der Begriff „unimodulares Gitter“ wurde von H.–G. Quebbemann in [17] verallgemeinert auf „modulares Gitter“:

Definition 1.44 *Ein ganzes Gitter Λ heißt N -modular (oder modular der Stufe N) für eine natürliche Zahl N , falls es isomorph zu seinem reskalierten dualen Gitter*

$${}^{(N)}\Lambda^\#$$

ist, d.h. falls eine Abbildung $f \in \text{O}(\mathbb{R}^d, (\cdot, \cdot))$ existiert mit $f(\Lambda) = {}^{(N)}\Lambda^\#$.

Ein 1-modulares Gitter heißt auch unimodular.

Beispiel 1.45 *Einfachstes Beispiel eines p -modularen Gitters für eine Primzahl p ist das Gitter $\langle e_1, \sqrt{p}e_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$ in \mathbb{R}^2 mit dem kanonischen euklidischen Skalarprodukt.*

Proposition 1.46 *In der Dimension 2 ist jedes ganze Gitter Λ modular der Stufe $\det \Lambda$.*

Beweis. Ist $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ eine Gram-Matrix von Λ , so ist die Matrix $\frac{1}{\det \Lambda} \begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ nach Korollar 1.35 eine Gram-Matrix von $\Lambda^\#$. Daher ist $\begin{pmatrix} d & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ eine Gram-Matrix des Gitters ${}^{(\det \Lambda)}\Lambda^\#$. Die Isomorphie zwischen Λ und ${}^{(\det \Lambda)}\Lambda^\#$ ist damit gegeben durch die unimodulare Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (vgl. Bemerkung 1.18). \square

Beispiel 1.47 *Ein wohlbekanntes Beispiel hierfür ist das 2-modulare Barnes–Wall–Gitter BW_{16} sowie das 3-modulare Coxeter–Todd–Gitter K_{12} .*

Lemma 1.48 *Die Determinante eines N -modularen Gitters Λ der Dimension d ist gleich $N^{d/2}$. Insbesondere ist dann d gerade, es sei denn, N ist ein Quadrat.*

Beweis. Diese Aussage beruht auf der Bemerkung 1.38, und zwar $\det \Lambda = [\Lambda^\# : \Lambda] = [\Lambda^\# : {}^{(N)}\Lambda^\#] = (\sqrt{N})^d = N^{d/2}$. \square

Unter einer schwächeren Bedingung an ${}^{(N)}\Lambda^\#$ wird jetzt der Begriff „Stufe“ eines geraden Gitters vorgestellt. Zunächst zeigen wir das folgende Lemma:

Lemma 1.49 *Für ein gerades Gitter Λ gilt: $(\det \Lambda)\Lambda^\#$ ist ein gerades Gitter.*

Beweis. Bezeichne $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ eine Basis von Λ . Dann ist seine Dualbasis $B^\# := \{b_1^\#, \dots, b_d^\#\}$ eine Basis des dualen Gitters $\Lambda^\#$, wie im Satz 1.32 gezeigt wurde. Nach dem Korollar 1.35 gilt dann $\text{Gram}(B^\#) = (\text{Gram}(B))^{-1}$ und daher $(\det \Lambda)(\text{Gram}(B))^{-1} = (\det \Lambda)\text{Gram}(B^\#) = \left((\sqrt{\det \Lambda} b_i^\#, \sqrt{\det \Lambda} b_j^\#) \right)_{i,j=1,\dots,d}$.

Also ist $(\det \Lambda)(\text{Gram}(B))^{-1}$ eine Gram-Matrix des reskalierten dualen Gitters ${}^{(N)}\Lambda^\#$. Aber per definitionem ist $(\det \Lambda)(\text{Gram}(B))^{-1} = (\det(\text{Gram}(B))(\text{Gram}(B))^{-1})^{-1}$ eine Adjungierte der geraden Matrix $\text{Gram}(B)$ und daher auch eine gerade Matrix. \square

Somit können wir definieren:

Definition 1.50 *Für ein gerades Gitter Λ wird die kleinste natürliche Zahl N , für die ${}^{(N)}\Lambda^\#$ wieder ein gerades Gitter ist, die Stufe von Λ genannt.*

Offensichtlich ist die Stufe eines geraden N -modularen Gitters eben N .

Proposition 1.51 *Für ein gerades d -dimensionales Gitter Λ der Stufe N gilt: $N\Lambda^\# \subset \Lambda$ und ferner $(\det \Lambda)(\det {}^{(N)}\Lambda^\#) = N^d$.*

Beweis. Sei $B = \{b_1, \dots, b_d\}$ eine Basis von Λ und $B^\# := \{b_1^\#, \dots, b_d^\#\}$ seine Dualbasis.

Wie im Beweis des vorangehenden Lemmas läßt sich zeigen: $N(\text{Gram}(B))^{-1} = N\text{Gram}(B^\#) = \left((\sqrt{N} b_i^\#, \sqrt{N} b_j^\#) \right)_{i,j=1,\dots,d}$.

Also ist $N(\text{Gram}(B))^{-1}$ eine Gram-Matrix des reskalierten dualen Gitters ${}^{(N)}\Lambda^\#$. Damit gilt:

$$\det \Lambda = \det \text{Gram}(B) = \frac{1}{\det(\text{Gram}(B))^{-1}} = \frac{N^d}{\det(N(\text{Gram}(B))^{-1})} = \frac{N^d}{\det {}^{(N)}\Lambda^\#},$$

wobei d die Dimension von Λ ist. Somit ist $(\det \Lambda)(\det {}^{(N)}\Lambda^\#) = N^d$.

Schließlich gilt nach der Bemerkung 1.33

$$Nb_i^\# = \sum_{j=1}^d (\sqrt{N}b_i^\#, \sqrt{N}b_j^\#) b_j.$$

Daher ist $Nb_i^\# \in \Lambda$ für alle $i \in \{1, \dots, d\}$ und folglich $N\Lambda^\# \subset \Lambda$. □

Eine weitere Verallgemeinerung des Modularitätsbegriffes unter stärkeren Voraussetzungen wurde von H.-G. Quebbemann in [18] eingeführt, die wir im folgenden darstellen.

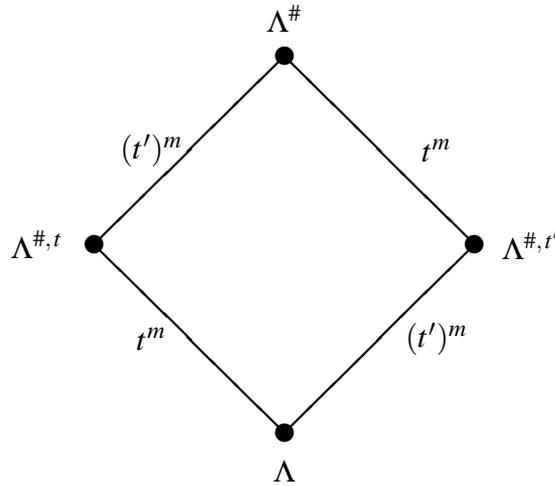
Definition 1.52 Zu einem Gitter Λ und zu einer reellen Zahl r führen wir die Bezeichnung

$$\Lambda^{\#,r} := \Lambda^\# \cap \frac{1}{r}\Lambda$$

ein.

Ist $N = t \cdot t'$ ein Produkt von zwei teilerfremden Zahlen t und t' , so gibt es zwischen dem N -modularen Gitter Λ und seinem dualen Gitter $\Lambda^\#$ zwei Gitter $\Lambda^{\#,t}$ und $\Lambda^{\#,t'}$.

Die folgende Skizze veranschaulicht diese Situation für die Dimension $2m$. Hierbei erhalten wir die Indizes: $[\Lambda^\# : \Lambda^{\#,t}] = [\Lambda^{\#,t'} : \Lambda] = t^m$ sowie $[\Lambda^\# : \Lambda^{\#,t'}] = [\Lambda^{\#,t} : \Lambda] = (t')^m$.



Wegen der Identität $(r\Lambda)^\# = \frac{1}{r}\Lambda^\#$ für alle $r \in \mathbb{R}$, die sich aus dem Satz 1.32 mühelos herleiten läßt, können wir festhalten:

Lemma 1.53 Für ein Gitter Λ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$${}^{(r)}\Lambda^{\#,r} = \sqrt{r} \left(\Lambda^\# \cap \frac{1}{r}\Lambda \right) = (\sqrt{r}\Lambda^\#) \cap \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\Lambda \right) = ({}^{(r)}\Lambda^\#) \cap ({}^{(r)}\Lambda^\#)^\#.$$

Dies hat zur Folge:

Satz 1.54 *Ist Λ ein N -modulares Gitter, wobei $N = t \cdot t'$ ein Produkt von zwei teilerfremden Zahlen t und t' ist, so ist*

$${}^{(t)}\Lambda^{\#,t} = \sqrt{t} \left(\Lambda^{\#} \cap \frac{1}{t} \Lambda \right)$$

ein ganzes Gitter in \mathbb{R}^d , welches das t -partielle duale Gitter zu Λ genannt wird.

Korollar 1.55 *Ist Λ ein gerades N -modulares Gitter, wobei $N = t \cdot t'$ ein Produkt von zwei teilerfremden Zahlen t und t' ist, so ist*

$${}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$$

auch ein gerades Gitter in \mathbb{R}^d .

Beweis. Offensichtlich gilt: $\sqrt{t}(\sqrt{t}\Lambda^{\#,t}) \subset \Lambda$ sowie $\sqrt{t'}\left({}^{(t)}\Lambda^{\#,t}\right) = \sqrt{N}\Lambda^{\#} \cap \sqrt{\frac{t'}{t}}\Lambda \subset \sqrt{N}\Lambda^{\#} = {}^{(N)}\Lambda^{\#} \cong \Lambda$. Da Λ ein gerades Gitter ist, folgt daraus: $t \cdot (x, x) = (\sqrt{t}x, \sqrt{t}x) \in 2\mathbb{Z}$ sowie $t' \cdot (x, x) = (\sqrt{t'}x, \sqrt{t'}x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in {}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$. Die Zahlen t und t' sind aber teilerfremd. Also ist $(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in {}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$. \square

In [18, Proposition 1] werden weitere Eigenschaften der t -partiellen dualen Gitter gezeigt:

Proposition 1.56 *Das t -partielle duale Gitter ${}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$ zum N -modularen Gitter Λ , das im vorangehenden Satz eingeführt wurde, wobei $N = t \cdot t'$ ein Produkt von zwei teilerfremden Zahlen t und t' ist, besitzt folgende Eigenschaft:*

$$\sqrt{N} \left({}^{(t)}\Lambda^{\#,t} \right)^{\#} = {}^{(t')} \Lambda^{\#,t'}.$$

Korollar 1.57 *Die Stufe des Gitters ${}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$ zu einem geraden N -modularen Gitter Λ ist N . Insbesondere ist $\det {}^{(t)}\Lambda^{\#,t} = \det \Lambda$.*

Definition 1.58 *Ein N -modulares Gitter Λ heißt stark N -modular, falls es isomorph zu jedem t -partiellen dualen Gitter ${}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$ für einen exakten positiven Teiler t von N ist.*

Hierbei ist mit einem exakten Teiler t von N ein solcher gemeint, für den $\text{ggT}(t, N/t) = 1$ gilt. Die Bezeichnung dafür ist $t \parallel N$.

Ist N prim, so ist ein N -modulares Gitter sofort stark N -modular.

Beispiel 1.59 Für $N \in \mathbb{Z}$ sei $\{t_1, \dots, t_c\}$ die Menge aller (verschiedenen) exakten positiven Teiler von N . Dann ist das Gitter $\langle \sqrt{t_1}e_1, \dots, \sqrt{t_c}e_c \rangle_{\mathbb{Z}}$ in \mathbb{R}^c mit dem kanonischen euklidischen Skalarprodukt stark N -modular.

Bemerkung 1.60 Modularität ist sozusagen eine Invariante der Isometrieklassen von Gittern, d.h. ist ein Gitter N -modular, so sind alle Gitter in seiner Isometrieklasse auch N -modular, da Isomorphie der Gitter offenbar Isomorphie der zugehörigen dualen Gitter impliziert.

1.2.3 Geschlecht von Gittern

Im ersten Abschnitt lernten wir die Partition der Menge aller ganzen Gitter der gleichen Dimension in Isometrieklassen kennen. In diesem Abschnitt behandeln wir die Komplettierungen von Gittern und führen, gestützt auf [10], den Begriff eines Geschlechtes ein, wodurch sie noch gröber unterteilt werden.

Sei für eine Primzahl p die Menge der p -adischen Zahlen mit \mathbb{Q}_p und darin die Menge der ganzen p -adischen Zahlen mit \mathbb{Z}_p bezeichnet.

Definition 1.61 Für ein ganzes Gitter Λ im Vektorraum \mathbb{Q}^d sei

$$\Lambda_p := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$$

seine p -Komplettierung für eine Primzahl p .

Ist $\{b_1, \dots, b_d\}$ eine Basis von Λ und damit auch von \mathbb{Q}^d , dann ist $\{1 \otimes b_1, \dots, 1 \otimes b_d\}$ offenbar eine Basis von $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}^d$. Aber durch die Identifizierung von $1 \otimes x$ mit x (für $x \in \mathbb{Q}^d$) wird Λ_p zum \mathbb{Z}_p -Gitter $\mathbb{Z}_p \Lambda$ im Vektorraum \mathbb{Q}_p^d , d.h. $\Lambda_p = \langle b_1, \dots, b_d \rangle_{\mathbb{Z}_p}$.

Definition 1.62 Zwei ganze Gitter Λ und Λ' zählen zum selben Geschlecht, falls $\Lambda_p \cong \Lambda'_p$ für alle Primzahlen p gilt.

Bemerkung 1.63 Da im Rahmen dieser Arbeit nur Gitter im euklidischen Raum betrachtet werden, kann bei der obigen Definition auf die zusätzliche Bedingung $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda \cong \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda'$ verzichtet werden.

In der obigen Definition genügt es, die Lokalisierungen anstelle der Komplettierungen zu betrachten, d.h. $\mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Q}} \Lambda$, wobei $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid b \right\}$.

Bevor wir eine wesentliche Eigenschaft eines Geschlechtes angeben, formulieren wir einen Hilfssatz, der auch von eigenständigem Interesse ist und sich aus der Isomorphie der Diskriminantengruppen (als abelsche Gruppen) von je zwei Gittern in einem Geschlecht ergibt:

Lemma 1.64 Alle Gitter eines Geschlechtes haben die gleiche Determinante. Insbesondere haben ihre Gram-Matrizen (bezüglich beliebiger Basen) die gleichen Elementarteiler.

Satz 1.65 *Jedes Geschlecht \mathcal{G} besteht aus vollen Isometrieklassen, d.h. liegt ein Gitter Λ in einem Geschlecht \mathcal{G} , so ist $\Lambda' \in \mathcal{G}$ für alle $\Lambda' \in [\Lambda]$.*

Jedes Geschlecht besteht sogar aus nur endlich vielen Isometrieklassen, deren Anzahl die Klassenzahl eines Geschlechtes genannt wird.

Beweis. Der erste Teil der Aussage ergibt sich leicht aus der Tatsache, daß \mathbb{Z} in kanonischer Weise in \mathbb{Z}_p für jede Primzahl p eingebettet werden kann. Also gilt: Aus $\Lambda \cong \Lambda'$ folgt $\Lambda_p \cong \Lambda'_p$ für alle Primzahlen p .

Der zweite Teil beruht auf der Existenz nur endlich vieler Isometrieklassen ganzer Gitter für feste Dimension und Determinante (s. Satz 1.17). □

Proposition 1.66 *Die Gitter eines Geschlechtes sind entweder alle gerade oder alle ungerade.*

Beweis. Um dies zu zeigen, reicht es, Lokalisierungen über $\mathbb{Z}_{(2)}$ zu betrachten: Gehören Λ und Λ' einem Geschlecht an, so gilt $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Lambda \cong \mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Lambda'$. Die Abbildung $\mathbb{Z}_{(2)} \otimes \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}_{(2)}/2\mathbb{Z}_{(2)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $v \mapsto (v, v) + 2\mathbb{Z}_{(2)}$ ist linear und genau dann eine Nullabbildung, wenn Λ gerade ist. Dann ist auch Λ' gerade. □

Analog kann eine weitere Eigenschaft eines Geschlechtes gezeigt werden:

Proposition 1.67 *Ist ein gerades Gitter N -modular, so ist die Stufe aller Gitter in seinem Geschlecht gleich N .*

Mittels der eindeutigen Jordanschen Zerlegung für gerade Gitter (vgl. [24, §1]) läßt sich das Geschlecht von bestimmten Gittern folgendermaßen charakterisieren:

Proposition 1.68 *Alle geraden $2m$ -dimensionalen Gitter, deren Diskriminantengruppe isomorph zu $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$ für eine feste Primzahl p ist, d.h. deren Determinante gleich p^m ist, bilden ein Geschlecht.*

Dies läßt sich auf ein gerades $2m$ -dimensionales Gitter, das modular der Stufe p für eine Primzahl p ist, anwenden, z. B. auf das 3-modulare Coxeter-Todd-Gitter der Dimension 12:

Beispiel 1.69 *Das Geschlecht des Coxeter–Todd–Gitters besteht aus allen geraden 12-dimensionalen Gittern mit der Determinante 3^6 . Für eine genaue Darstellung der Isometrieklassen dieses Geschlechts siehe [23].*

Im Geschlecht eines modularen Gitters, mit Ausnahme der Geschlechter eines unimodularen Gitters, sind die Gitter, die den anderen Isometrieklassen angehören, im allgemeinen nicht modular. Sind aber alle Gitter in einem Geschlecht modular, dann natürlich modular der gleichen Stufe, wie sich aus dem Lemma 1.64 herleiten läßt.

Definition 1.70 *Für eine natürliche Zahl N heißt ein Geschlecht \mathcal{G} stark N -modular, falls für jedes $\Lambda \in \mathcal{G}$ sein t -partielles duales Gitter ${}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$ für alle $t \parallel N$ wieder in \mathcal{G} liegt.*

Bemerkung 1.71 *Alle im Rahmen dieser Arbeit behandelten Geschlechter sind stark modular.*

Eine allgemeine Methode zur Bestimmung aller Isometrieklassen eines Geschlechtes, also zur vollständigen Klassifikation eines Geschlechtes, gibt es nicht. Mit der Kneserschen Nachbarmethode können die meisten wichtigen Geschlechter vollständig klassifiziert werden, wie wir später sehen werden.

Bemerkung 1.72 *Alle (mit einer Ausnahme) im Rahmen dieser Arbeit behandelten Geschlechter wurden mithilfe der Kneserschen Nachbarmethode klassifiziert. Allerdings ist es derzeit von den verwendeten Algorithmen her noch nicht möglich, das Geschlecht des Leech–Gitters mit dieser Methode zu klassifizieren.*

Die Klassifikation wird auch dadurch erschwert, daß die Anzahl der Isometrieklassen in einem Geschlecht sehr schnell mit der Dimension wächst.

1.2.4 Siegelsche Modulformen und Theta-Reihen von Gittern

In der Gittertheorie sind hauptsächlich solche Gitter von Interesse, die die dichtesten Kugelpackungen liefern, d.h. solche, die das größte Minimum haben. Durch die Untersuchung der Theta-Reihe des Gitters als einer Siegelschen Modulform können oft nützliche Erkenntnisse darüber gewonnen werden.

Zur Abzählung von Gitterpunkten in einem geraden Gitter führen wir ein, beeinflusst durch [8, Kapitel I, §0]:

Definition 1.73 Die Theta-Reihe ϑ_Λ eines geraden Gitters Λ ist folgende Funktion in $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \vartheta_\Lambda(z) &:= \sum_{\lambda \in \Lambda} \exp\left(\pi\sqrt{-1}(\lambda, \lambda)z\right) = \\ &= \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t \geq 0, \text{ gerade}}} a_\Lambda(t) \exp(\pi\sqrt{-1}tz) = \sum_{\substack{t \in \mathbb{Z} \\ t \geq 0, \text{ gerade}}} a_\Lambda(t)q(t) \quad \text{mit } q(t) := \exp\left(\pi\sqrt{-1}tz\right). \end{aligned}$$

Hierbei ist $a_\Lambda(t) := |\{\lambda \in \Lambda \mid (\lambda, \lambda) = t\}|$ die Anzahl der Vektoren der Länge t in Λ für ein gerades nichtnegatives $t \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 1.74 In der obigen Definition ist $a_\Lambda(t)$ nach dem Lemma 1.24 endlich, also wohldefiniert. Dieses Lemma liefert darüber hinaus folgende Identität dafür:

$$a_\Lambda(t) = |\{s \in \mathbb{Z}^d \mid s^{tr}Gs = t\}|,$$

wobei G eine Gram-Matrix von Λ bezüglich einer beliebigen Basis ist.

In der Theorie der quadratischen Formen (in der Theta-Reihen erstmals untersucht wurden) wird $a_\Lambda(t)$ die Darstellungszahl der natürlichen Zahl t durch die quadratische Form, assoziiert mit einer beliebigen Gram-Matrix von Λ , genannt. Die Theta-Reihe kann dann als erzeugende Funktion der Darstellungszahlen aufgefaßt werden.

Bemerkung 1.75 Die Theta-Reihe ist offenbar periodisch, d.h. $\vartheta_\Lambda(z+1) = \vartheta_\Lambda(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$, da Λ gerade ist.

In [8, Bemerkung 0.2] wird gezeigt, daß die Reihe ϑ_Λ absolut und gleichmäßig konvergiert, in jedem Bereich der Art $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) \geq y_0\}$ für ein $y_0 > 0$.

Die Vereinigung all dieser Bereiche ist die obere Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}.$$

Damit ist ϑ_Λ holomorph auf \mathbb{H} .

Die Theta-Reihe genügt der folgenden Transformationsformel, die einen Zusammenhang mit der Theta-Reihe des dualen Gitters $\Lambda^\#$ beschreibt. Ein Nachweis der Transformationsformel kann hier nicht ausgeführt werden (siehe hierzu z. B. [7, Proposition 2.1]).

Satz 1.76 *Es gilt:*

$$\vartheta_{\Lambda^\#}(-z^{-1}) = \left(\sqrt{z/\sqrt{-1}} \right)^d \sqrt{\det \Lambda} \vartheta_\Lambda(z).$$

Dabei ist $\sqrt{z/\sqrt{-1}}$ eine eindeutig bestimmte analytische Funktion in \mathbb{H} , nämlich der sogenannte Hauptwert der (Quadrat-)Wurzelfunktion.

Folgerung 1.77 $\vartheta_{\Lambda^\#}(z) = \left(\sqrt{z/\sqrt{-1}} \right)^d \sqrt{\det \Lambda} \vartheta_\Lambda(-z^{-1}).$

Sei n eine natürliche Zahl. Für das n -Tupel $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ setzen wir $G(\lambda) := ((\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n}$.

Zur Abzählung der n -Tupel von Gittervektoren in einem geraden Gitter der Dimension d führen wir als eine Verallgemeinerung der Theta-Reihe ein:

Definition 1.78 *Die Siegelsche Theta-Reihe $\vartheta_\Lambda^{(n)}$ vom Grad n eines geraden Gitters Λ ist folgende Funktion in $Z \in \mathbb{C}_{\text{sym}}^{n \times n}$:*

$$\begin{aligned} \vartheta_\Lambda^{(n)}(Z) &:= \sum_{\lambda \in \Lambda^n} \exp\left(\pi\sqrt{-1}\text{Spur}(G(\lambda)Z)\right) = \sum_{\substack{T \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n} \\ T \geq 0, \text{ gerade}}} a_\Lambda(T) \exp\left(\pi\sqrt{-1}\text{Spur}(TZ)\right) = \\ &= \sum_{\substack{T \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n} \\ T \geq 0, \text{ gerade}}} a_\Lambda(T) q(T) \quad \text{mit } q(T) := \exp\left(\pi\sqrt{-1}\text{Spur}(TZ)\right). \end{aligned}$$

Hierbei ist $a_\Lambda(T) := |\{\lambda \in \Lambda^n \mid G(\lambda) = T\}|$ der sogenannte Fourier-Koeffizient der Reihe für eine positiv semidefinite symmetrische gerade (d.h. ganzzahlige mit geraden Diagonaleinträgen) $n \times n$ Matrix T .

Proposition 1.79 *Für den Fourier-Koeffizienten $a_\Lambda(T)$ gilt:*

$$a_\Lambda(T) = |\{S \in \mathbb{Z}^{d \times n} \mid S^{\text{tr}}GS = T\}|,$$

wobei G eine Gram-Matrix von Λ bezüglich einer beliebigen Basis ist.

Insbesondere ist $a_\Lambda(T)$ endlich, also wohldefiniert.

Beweis. Die Tatsache $a_\Lambda(T) = |\{S \in \mathbb{Z}^{d \times n} \mid S^{tr}GS = T\}|$ ist klar. Sie ist unabhängig von der Wahl der Gram-Matrix, denn, falls G' eine weitere Gram-Matrix von Λ ist, dann existiert, wie im Beweis des Lemmas 1.8 gezeigt wird, eine Matrix $U \in GL_d(\mathbb{Z})$ mit $G' = U^{tr}GU$ und damit die bijektive Abbildung zwischen den Mengen $\{S \mid S^{tr}GS = T\}$ und $\{S \mid S^{tr}G'S = T\}$ durch $S \mapsto U^{-1}S$.

Daß $a_\Lambda(T)$ für jedes $T = (T_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ in der Tat endlich ist, folgt aus der Endlichkeit von $a_\Lambda(T_{ii})$ (vgl. Bemerkung 1.74). Denn aus $S^{tr}GS = T$ folgt $s_i^{tr}Gs_i = T_{ii}$, wenn mit s_i die i -te Spalte von S bezeichnet wird. \square

Bemerkung 1.80 Die Siegelsche Theta-Reihe ist periodisch, d.h. $\vartheta_\Lambda^{(n)}(Z) = \vartheta_\Lambda^{(n)}(Z + K)$ für alle ganzen symmetrischen $n \times n$ Matrizen K und für alle $Z \in \mathbb{H}$, wegen

$$\text{Spur}(TZ) = \sum_{v=1}^n T_{vv}Z_{vv} + 2 \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq n} T_{\mu\nu}Z_{\mu\nu}.$$

Proposition 1.81 Ein Fourier-Koeffizient $a_\Lambda(T)$ kann nur dann von 0 verschieden sein, wenn der Rang von T nicht größer als d ist.

Beweis. Die vorherige Proposition 1.79 impliziert die Existenz einer Matrix $S \in \mathbb{Z}^{d \times n}$ mit $S^{tr}GS = T$, falls $a_\Lambda(T) \neq 0$. Wegen $\text{Rang}(T) = \text{Rang}(S)$ folgt damit die Ungleichung $\text{Rang}(T) \leq d$. \square

Folgerung 1.82 Im Falle $n > d$ gilt: Wenn $a_\Lambda(T) \neq 0$, dann ist $\det T = 0$.

In [8, Bemerkung 0.8] wird gezeigt, daß in Analogie zu ϑ_Λ die Reihe $\vartheta_\Lambda^{(n)}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, in jedem Bereich der Art $\{Z \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \mid \Im(Z) \geq Y_0\}$ für ein $Y_0 > 0$ ($Y \geq Y_0$ bedeutet hierbei wie üblich $Y - Y_0 \geq 0$).

Die Vereinigung all dieser Bereiche ist die Siegelsche (verallgemeinerte obere) Halbebene

$$\mathbb{H}_n := \{Z \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \mid \Im(Z) > 0\}.$$

Damit ist $\vartheta_\Lambda^{(n)}$ holomorph auf \mathbb{H}_n .

Bemerkung 1.83 Die Theta-Reihe ϑ_Λ ist die Siegelsche Theta-Reihe $\vartheta_\Lambda^{(1)}$ ersten Grades.

Wir definieren zusätzlich die Siegelsche Theta-Reihe vom Grad 0 als eine Konstante:

Definition 1.84 Die Siegelsche Theta-Reihe vom Grad 0 ist $\vartheta_\Lambda^{(0)} := 1$.

Eine zur Theta–Transformationsformel (vgl. Satz 1.76) analoge Formel gibt es für die Siegelschen Theta–Reihen, die wir ohne Beweis angeben (s. hierzu [8, Satz 0.11]):

Satz 1.85 *Es gilt:*

$$\vartheta_{\Lambda^\#}^{(n)}(-Z^{-1}) = \sqrt{(\det \Lambda)^n} \left(\sqrt{\det(Z/\sqrt{-1})} \right)^d \vartheta_{\Lambda}^{(n)}(Z).$$

Dabei ist $Z \mapsto \sqrt{\det(Z/\sqrt{-1})}$ die durch die zwei folgenden Eigenschaften eindeutig bestimmte stetige komplexwertige Funktion h auf \mathbb{H}_n : $h^2(Z) = \det(Z/\sqrt{-1})$ sowie $h(\sqrt{-1}Y) = \sqrt{\det Y} > 0$ für ein reelles Y .

Gemäß der folgenden Proposition können wir von Siegelschen Theta–Reihen, der Isometrie­klasse eines Gitters“ anstatt „eines Gitters“ sprechen.

Proposition 1.86 *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Siegelschen Theta–Reihen vom Grad n der isomorphen Gitter gleich.*

Beweis. Diese Aussage beruht auf der Bemerkung 1.18, bezeichnen wir nämlich mit G eine Gram–Matrix von Λ bezüglich einer beliebigen Basis, so gilt für den Fourier–Koeffizienten $a_\Lambda(T)$ nach der Proposition 1.79:

$$a_\Lambda(T) = |\{S \in \mathbb{Z}^{d \times n} \mid S^{tr}GS = T\}| = |\{S \in \mathbb{Z}^{d \times n} \mid S^{tr}(U^{tr}GU)S = T\}|$$

für alle Matrizen $U \in GL_d(\mathbb{Z})$. □

Die Siegelsche Theta–Reihe ist eine Siegelsche Modulform, sie ist also im höchsten Maße „symmetrisch“ (d.h. sie besitzt gewisse Transformationseigenschaften unter Variablen­substitutionen), für die wir im folgenden eine exakte Definition geben werden. Unsere Darstellung der Siegelschen Modulformen lehnen wir wieder an [8] an.

Definition 1.87 *Die reelle symplektische Gruppe sei erklärt durch*

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}) := \{M \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^{tr}J_nM = J_n\},$$

wobei $J_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ mit den $n \times n$ Einheits-, bzw. Nullmatrizen E_n und 0 ist.

Es läßt sich leicht verifizieren, daß $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ auf \mathbb{H}_n durch $M\langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ operiert.

Als nächstes definieren wir eine Operation von $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ auf dem Raum der auf \mathbb{H}_n holomorphen Funktionen:

Definition 1.88 Für eine ganze Zahl k und eine auf \mathbb{H}_n holomorphe Funktion f setze

$$f|_k M(Z) := \det(CZ + D)^{-k} f(M\langle Z \rangle) \quad \text{für } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2n}(\mathbb{R}), Z \in \mathbb{H}_n.$$

Aus der Tatsache, daß $M\langle M'\langle Z \rangle \rangle = (MM')\langle Z \rangle$ für alle $M, M' \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$ und für alle $Z \in \mathbb{H}_n$ gilt, ergibt sich:

Lemma 1.89 Es gilt für alle $M, M' \in Sp_{2n}(\mathbb{R})$:

$$(f|_k M)|_k M' = f|_k (MM').$$

Die damit definierte Operation $(M, f) \mapsto f|_k M$ wird die Strich-Operation genannt.

Definition 1.90 Die Gruppe $Sp_{2n}(\mathbb{Z}) = \{M \in GL_{2n}(\mathbb{Z}) \mid M^t J_n M = J_n\}$ wird die Siegel-sche Modulgruppe genannt und (aus Tradition) mit Γ_n bezeichnet.

Eine Untergruppe Γ von $Sp_{2n}(\mathbb{R})$ heißt mit der Siegel-schen Modulgruppe kommensurabel, falls der Durchschnitt $\Gamma \cap \Gamma_n$ sowohl in Γ als auch in Γ_n einen endlichen Index hat.

Beispiel 1.91 Ein wichtiges (und klassisches) Beispiel dafür ist die sogenannte Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_n(N)$ der Stufe $N \in \mathbb{N}$, die als der Kern des natürlichen Homomorphismus $Sp_n(\mathbb{Z}) \rightarrow Sp_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ definiert ist.

Die Gruppe

$$\Gamma_n^0(N) = \left\{ M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n \mid C \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

der sogenannten Modulmatrizen der Stufe N ist ebenfalls mit Γ_n kommensurabel, da sie $\Gamma_n(N)$ umfaßt.

In [17] wird eine weitere kommensurable Gruppe vorgestellt:

Beispiel 1.92 Der Normalisator von $\Gamma_n^0(N)$ in $Sp_n(\mathbb{R})$ enthält das Element

$$F_n(N) := \begin{pmatrix} 0 & (-1/\sqrt{N})E_n \\ \sqrt{N}E_n & 0 \end{pmatrix},$$

das die Fricke–Involution genannt wird.

Es erweitert die Gruppe $\Gamma_n^0(N)$ zur Fricke–Gruppe

$$\Gamma_n^*(N) := \Gamma_n^0(N) \cup \Gamma_n^0(N)F_n(N),$$

die ebenso mit Γ_n kommensurabel ist.

Definition 1.93 Für eine mit Γ_n kommensurable Gruppe Γ heißt ein Homomorphismus $\chi : \Gamma \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ein (abelscher) Charakter von Γ .

Der Charakter χ mit $\chi(\gamma) = 1$ für alle $\gamma \in \Gamma$ heißt der triviale Charakter von Γ .

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Hauptdefinition dieses Abschnittes:

Definition 1.94 Eine Siegelsche Modulform n -ten Grades vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ zur mit Γ_n kommensurablen Gruppe Γ und zum Charakter χ ist eine Funktion $f : \mathbb{H}_n \rightarrow \mathbb{C}$ mit den drei folgenden Eigenschaften:

1. f ist holomorph,
2. $f|_k M = \chi(M)f$ für alle $M \in \Gamma$,
3. $f|_k P$ ist für alle $P \in \Gamma_n$ beschränkt in jedem Bereich der Art $\{Z \in \mathbb{C}_{sym}^{n \times n} \mid \Im(Z) \geq Y_0\}$ (für $Y_0 > 0$).

Eine Siegelsche Modulform ersten Grades wird traditionellerweise als elliptische Modulform bezeichnet.

Bemerkung 1.95 Im Falle $n > 1$ folgt die dritte Bedingung an f bereits aus den beiden ersten nach dem Koecherprinzip (s. [8, Satz 3.5]).

In der obigen Definition ist es außerdem ausreichend, wenn P ein Vertretersystem aller Linksnebenklassen ΓP , $P \in \Gamma_n$, durchläuft, da $f|_k P$ nur von der Nebenklasse ΓP , $P \in \Gamma_n$, abhängt. Es ist klar, daß die Anzahl dieser Nebenklassen endlich ist, nämlich gleich dem Index $[\Gamma_n : \Gamma \cap \Gamma_n]$.

Definition 1.96 Die Gesamtheit aller Modulformen n -ten Grades vom Gewicht k zu Γ und χ bildet offenbar einen \mathbb{C} -Vektorraum, der mit $\mathcal{M}_k^{(n)}(\Gamma, \chi)$ bezeichnet wird.

Modulformen zur Gruppe Γ und Charakteren χ_k, χ_l können miteinander multipliziert werden, nämlich: $\mathcal{M}_k^{(n)}(\Gamma, \chi_k) \cdot \mathcal{M}_l^{(n)}(\Gamma, \chi_l) \subset \mathcal{M}_{k+l}^{(n)}(\Gamma, \chi_k \cdot \chi_l)$, da für die Strich-Operation gilt: $(f|_k M)(g|_l M) = (f \cdot g)|_{k+l} M$ für alle $M \in \Gamma$.

Bemerkung 1.97 Für jede Familie von Charakteren $\chi_k : \Gamma \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $k \leq 0$, mit $\chi_k \cdot \chi_l = \chi_{k+l}$ ist der Raum $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k^{(n)}(\Gamma, \chi_k)$ ein graduierter Ring.

Proposition 1.98 Ist $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}(\Gamma, \chi)$ und $P \in \Gamma_n$, so besitzt $f|_k P$ eine Fourier-Entwicklung der Form:

$$f|_k P(Z) = \sum_{\substack{T \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n} \\ T \geq 0, \text{ gerade}}} a_f(T, P) q(T)$$

mit den eindeutig bestimmten Fourier-Koeffizienten $a_f(T, P)$, die $a_f(T, MP) = \chi(M) a_f(T, P)$ für alle $M \in \Gamma$ erfüllen.

Definition 1.99 Sei $\Gamma|\Phi$ die Gruppe aller symplektischer $(2n-2) \times (2n-2)$ Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_{2n-2}(\mathbb{R})$, sodaß $\tilde{M} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$ in Γ enthalten ist, wobei $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$, $\tilde{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sowie $\tilde{D} = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$.

Definition 1.100 Der Siegelsche Φ -Operator ist eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{M}_k^{(n)}(\Gamma, \chi) \rightarrow \mathcal{M}_k^{(n-1)}(\Gamma|\Phi, \chi)$ gemäß (vgl. [8, Bemerkung 3.7])

$$(f|\Phi)(Z) := \lim_{t \rightarrow \infty} f \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \end{pmatrix} \quad \text{für } Z \in \mathbb{H}_{n-1}.$$

Daß der Wertebereich dieser Abbildung tatsächlich $\mathcal{M}_k^{(n-1)}(\Gamma|\Phi, \chi)$ ist, folgt aus dem folgenden Lemma, das z. B. in [8, Hilfssatz 3.6] gezeigt wird:

Lemma 1.101 Für den Siegelschen Φ -Operator gilt:

$$(f|_k P)|\Phi(Z) = \sum_{\substack{T \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{(n-1) \times (n-1)} \\ T \geq 0, \text{ gerade}}} a_f \left(\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, P \right) q(T).$$

Definition 1.102 Eine Modulform $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}(\Gamma, \chi)$ heißt Spitzenform, falls $(f|_k P)|\Phi = 0$ für alle $P \in \Gamma_n$.

Bemerkung 1.103 Die Bedingung in der obigen Definition ist nach dem vorangehenden Lemma äquivalent zu: Ist $a_f(T, P) \neq 0$ für alle $P \in \Gamma_n$, dann ist $\det T \neq 0$.

Hierbei ist es ausreichend, wie bei der Definition einer Modulform (s. Definition 1.94), wenn P ein Vertretersystem der Linksnebenklassen ΓP , $P \in \Gamma_n$, durchläuft.

Es sei erwähnt, daß die Siegelschen Theta-Reihen keine Spitzenformen sind.

Wir wenden uns nun den Siegelschen Theta-Reihen von geraden Gittern zu. Im folgenden sei die Dimension d des Gitters eine gerade Zahl, etwa $d = 2m$.

Satz 1.104 Für ein unimodulares gerades Gitter der Dimension $2m$ ist die Siegelsche Theta-Reihe n -ten Grades für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Modulform vom Gewicht m zur vollen Modulgruppe Γ_n und zum trivialen Charakter.

Beweis. Vergleiche hierzu [8, Kapitel I, §3, Beispiel 1].

Aufgrund des Lemmas 1.89 genügt es, die wesentliche zweite Bedingung in der Definition von Modulformen nur für die Erzeugenden von Γ_n nachzuprüfen, und zwar für

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E_n & K \\ 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad K \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n}.$$

Das ist gleichbedeutend mit $\vartheta_{\Lambda}^{(n)}(-Z^{-1}) = \vartheta_{\Lambda}^{(n)}(Z)$ sowie $\vartheta_{\Lambda}^{(n)}(Z + K) = \vartheta_{\Lambda}^{(n)}(Z)$ für alle $K \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{n \times n}$, für alle $Z \in \mathbb{H}_n$. Das ist aber in diesem Fall nach der Theta-Transformationsformel (s. Satz 1.85) bzw. wegen der Periodizität der Theta-Reihe (s. Bemerkung 1.80) erfüllt. \square

Ein allgemeineres Ergebnis für modulare Gitter läßt sich aus dem folgenden Satz (zum Beweis s. [8, Satz A 2.9]) mühelos herleiten:

Satz 1.105 Die Siegelsche Theta-Reihe n -ten Grades eines geraden $2m$ -dimensionalen Gitters der Stufe N und der Determinante N^m ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Modulform vom Gewicht m zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_n^0(N)$ (vgl. Beispiel 1.91) und zum Charakter χ^0 , der folgendermaßen definiert ist:

$$\chi^0(M) := \left(\frac{-N}{|\det D|} \right)^m \quad \text{für} \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n^0(N),$$

wobei $(-)$ das Legendresymbol bezeichnet.

Wegen der Invarianz der Siegelschen Theta-Reihe $\vartheta_{\Lambda}^{(n)}$ des N -modularen Gitters Λ unter der Fricke-Involution $F_n(N)$, genauer genommen wegen der Identität $\vartheta_{\Lambda}^{(n)}|_m F_n(N) = (\sqrt{-1})^{-m} \vartheta_{(N)\Lambda^{\#}}^{(n)} = (\sqrt{-1})^{-m} \vartheta_{\Lambda}^{(n)}$, die sich mittels der Theta-Transformationsformel zeigen läßt, gilt sogar:

Satz 1.106 *Die Siegelsche Theta-Reihe n -ten Grades eines N -modularen geraden $2m$ -dimensionalen Gitters ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Modulform vom Gewicht m zur Fricke-Gruppe $\Gamma_n^*(N)$ (vgl. Beispiel 1.92) und zum Charakter χ^* , der folgendermaßen definiert ist:*

$$\chi^*(M) := \left(\frac{-N}{|\det D|} \right)^m \text{ für } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n^0(N) \quad \text{und} \quad \chi^*(F_n(N)) := (\sqrt{-1})^{-m}.$$

In [18] wird gezeigt, daß für $N \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ ³ die Theta-Reihe eines stark N -modularen geraden Gitters für jedes n eine Modulform zu einer größeren Gruppe als der Fricke-Gruppe ist, nämlich:

Satz 1.107 *Für $N \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ ist die Theta-Reihe ϑ_{Λ} eines stark N -modularen geraden Gitters der Dimension $2m$ für jedes n eine Modulform vom Gewicht m zur Gruppe $\langle \Gamma_1^0(N), W_t \mid t \parallel N \rangle$ und zu einem gewissen Charakter, den wir hier nicht angeben.*

Hierbei ist W_t eine sogenannte Atkin-Lehner-Involution:

$$W_t := W \begin{pmatrix} \sqrt{t} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{t} \end{pmatrix}, \text{ wobei } W = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_1^0(N/t) \text{ mit } d \equiv 0 \pmod{t}.$$

Bemerkung 1.108 *Es gilt: $F_1(N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{N} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{N} \end{pmatrix} = J_1 W_N$.*

Satz 1.109 *Ist die Siegelsche Theta-Reihe vom Grad n eines geraden Gitters Λ der Dimension $2m$ eine Modulform zur Gruppe Γ und zum Charakter χ , so besitzen die Fourier-Koeffizienten der Reihe das Transformationsverhalten*

$$a_{\Lambda}(U^{tr} T U) = (\det U)^{-m} \chi(M_U) a_{\Lambda}(T)$$

für alle $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ mit $M_U := \begin{pmatrix} U^{tr} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma$.

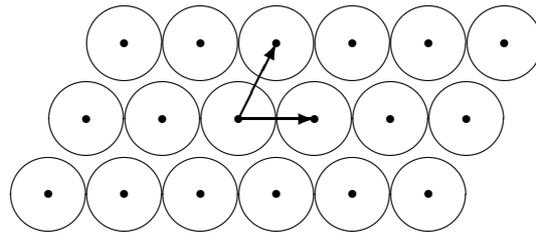
³Auf diese Menge \mathcal{N} werden wir später in der Definition 1.114 genauer eingehen.

Beweis. Es gilt: $\vartheta_\Lambda(U^{tr}ZU) = \vartheta_\Lambda(M_U(Z)) = \det(U^{-1})^m(\vartheta_\Lambda|_m M_U)(Z) = (\det U)^{-m}\chi(M_U)\vartheta_\Lambda(Z)$. Andererseits erhalten wir wegen $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ für beliebige Matrizen A, B : $\vartheta_\Lambda(U^{tr}ZU) = \sum_T a_\Lambda(T)q(UTU^{tr})$. Da mit T auch UTU^{tr} alle positiv semidefiniten symmetrischen geraden Matrizen T durchläuft, folgt hieraus die Behauptung. \square

Korollar 1.110 *Ist m gerade und $\chi(M_U) = 1$, so gilt wegen $\det U = \pm 1$ im obigen Satz: $a_\Lambda(U^{tr}TU) = a_\Lambda(T)$ für alle $U \in GL_n(\mathbb{Z})$ mit $M_U \in \Gamma$.*

1.2.5 Extremale Gitter

Eines der Hauptziele der Gittertheorie (das ursprünglich aus der Informationstheorie stammt) ist, die dichtesten Gitter zu bestimmen, d.h. solche mit größtmöglicher Dichte der zugehörigen Kugelpackung. Dabei werden gleich große Kugeln im Raum so angeordnet, daß ihre Mittelpunkte gerade die Gitterpunkte sind und daß sie dabei den größtmöglichen Raum einnehmen, wie auf der folgenden Zeichnung für den 2-dimensionalen Raum skizziert ist:



Eine solche Anordnung ist offensichtlich am effizientesten, wenn der Durchmesser der Kugeln gleich dem minimalen Abstand zwischen den Gitterpunkten ist, also gleich der Quadratwurzel aus dem Minimum des zugrundeliegenden Gitters.

Das Verhältnis des Volumens des von den Kugeln eingenommenen Raumes zum Volumen des ganzen Raumes, ist offenbar ein Qualitätsmaß für eine Kugelpackung:

Definition 1.111 Die Dichte $\delta(\Lambda)$ eines Gitters Λ in \mathbb{R}^d ist die Dichte der auf diesem Gitter konstruierten Kugelpackung, nämlich das Verhältnis des Volumens einer Kugel mit dem Radius $\frac{1}{2}\sqrt{\min \Lambda}$ zum Volumen des Fundamentalbereiches von Λ .

Die Dichte ist also als Anteil des durch Kugeln überdeckten Raumes innerhalb des Fundamentalbereiches zu verstehen. Dafür ergibt sich unmittelbar:

$$\delta(\Lambda) = \frac{V_d \left(\frac{1}{2}\sqrt{\min \Lambda}\right)^d}{\sqrt{\det \Lambda}} = \frac{V_d}{2^d} \sqrt{\frac{(\min \Lambda)^d}{\det \Lambda}},$$

wobei V_d das Volumen der d -dimensionalen Einheitskugel ist, und schließlich:

Folgerung 1.112 Die Dichte ist nach dem Satz 1.30 eine Invariante der Isometrieklassen von Gittern.

Die bisher bekannten dichtesten Gitter in den Dimensionen 1, 2, 4, 8, 12, 16, 24, 48 und 56 sind alle modular (s. [6]). Deshalb ist es sinnvoll zu versuchen, das dichteste modulare Gitter in einer gegebenen Dimension als ein lokales Maximum der Dichtefunktion zu bestimmen.

Vor kurzem wurde in [4] bewiesen, daß das Leech-Gitter das (bis auf Isomorphie) dichteste Gitter in \mathbb{R}^{24} ist.

Die Dichte eines unimodularen geraden d -dimensionalen Gitters ist nach einem klassischen Ergebnis nach oben beschränkt, da die Determinante solcher Gitter (nach dem Lemma 1.48) genau 1 ist und ihr Minimum höchstens $2\lfloor d/24 \rfloor + 2$ sein kann, wobei d durch 8 teilbar ist (s. Satz 1.42).

Es ist klar, daß die Gitter, deren Minima die obere Schranke annehmen, dann die dichtestmöglichen unimodularen geraden Gitter sind.

Definition 1.113 *Die unimodularen geraden d -dimensionalen Gitter, deren Minima die obere Schranke $2\lfloor \frac{d}{24} \rfloor + 2$ annehmen, heißen extremal.*

Dies läßt sich auf stark N -modulare gerade $2m$ -dimensionale Gitter übertragen. Ihre Determinante ist N^m und mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann ihr Minimum für gewisse N nach oben beschränkt werden, wie im folgenden dargestellt wird, angelehnt an [14, Abschnitt 6].

Für ein $N \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\sigma_1(N) := \sum_{\substack{s|N \\ s>0}} s \quad \text{sowie} \quad \sigma_0(N) := \sum_{\substack{s|N \\ s>0}} 1$$

die Summe der positiven Teiler von N , beziehungsweise die (stets gerade) Anzahl dieser Teiler.

Definition 1.114 *Zu einem $N \in \mathbb{N}$ sei die Menge*

$$\mathcal{N} := \{N \in \mathbb{N} \mid \sigma_1(N) \text{ teilt } 24\}$$

gegeben.

Die Elemente dieser Menge lassen sich genau angeben:

Lemma 1.115 *Es gilt: $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$.*

Beweis. Aus $\sigma_1(N) \mid 24$ folgt $N \mid 24$, da N trivialerweise ein Summand von $\sigma_1(N)$ ist. Also $N \leq 24$ und durch direktes Nachprüfen für alle natürlichen Zahlen N im Bereich $\{1, \dots, 24\}$ folgt die Behauptung. \square

Es sei hierzu bemerkt, daß ein $N \in \mathcal{N}$ entweder prim oder zusammengesetzt aus zwei verschiedenen Primzahlen ist.

Im folgenden sei N aus \mathcal{N} und Λ ein stark N -modulares gerades Gitter minimaler Dimension $2d_N$.

Seien $\Gamma(N)$ und $\chi_m(N)$ so gewählt, daß die Theta-Reihen der stark N -modularen geraden $2m$ -dimensionalen Gitter elliptische Modulformen zu $\Gamma(N)$ und $\chi_m(N)$ sind (vgl. Satz 1.107). Sei ϑ_Λ die Theta-Reihe von Λ , dann ist $\vartheta_\Lambda \in \mathcal{M}_{d_N}(\Gamma(N), \chi_{d_N}(N))$.

Die nachfolgenden Aussagen werden in [18] gezeigt.

Proposition 1.116 *Die Funktion Δ_N , definiert durch*

$$\Delta_N(z) := \prod_{s \mid N} \eta(sz)^{24/\sigma_1(N)} \quad \text{für } z \in \mathbb{H},$$

wobei $\eta := q^{1/12} \prod_{j=1}^{\infty} (1 - q^{2j})$ die Dedekindsche η -Funktion ist, ist eine Spitzenform vom Gewicht $m_N := \frac{12\sigma_0(N)}{\sigma_1(N)}$.

Diese Funktion ist bereits durch die Stufe N bestimmt.

Satz 1.117 *Ist Λ^l ein stark N -modulares gerades Gitter, das zum Geschlecht von $\bigoplus_{i=1}^l \Lambda$ für ein l gehört, so liegt seine Theta-Reihe im Ring*

$$\mathcal{M}(N) := \langle \vartheta_\Lambda, \Delta_N \rangle_{\mathbb{C}} \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k^{(1)}(\Gamma(N), \chi_k(N)).$$

Bemerkung 1.118 *Vom Geschlecht des gewählten Gitters Λ , das für $N \neq 6$ durch d_N eindeutig festgelegt ist, hängen die Theta-Reihe ϑ_Λ und der Charakter $\chi_m(N)$ ab. Dadurch hängt auch $\mathcal{M}(N)$ vom Geschlecht ab.*

Die Fourier-Entwicklung von Δ_N beginnt mit $q(2)$ und die von ϑ_Λ mit 1.

Lemma 1.119 Sei Λ' ein $2m$ -dimensionales Gitter mit den Voraussetzungen aus dem vorangehenden Satz. Ist N zusammengesetzt, so sei zusätzlich m gerade.

Seien d_N und m_N wie folgt gegeben:

N	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$2d_N$	8	4	2	4	4	2	2	4	4	2
$2m_N$	24	16	12	8	8	6	4	4	4	2

Dann ist die Dimension von $\mathcal{M}_m^{(1)}(\Gamma(N), \chi_k(N))$ gleich $1 + \left\lfloor \frac{m}{m_N} \right\rfloor$.

Satz 1.120 Ist Λ' wie im vorangehenden Satz gegeben, so läßt sich die Theta-Reihe von Λ' als folgende Linearkombination schreiben:

$$\sum_{i=0}^c \zeta_i \Delta_N^i \vartheta_\Lambda^j,$$

wobei $m_N i + d_N j = m$ und $c = \left\lfloor \frac{m}{m_N} \right\rfloor$, der ganzzahlige Anteil von $\frac{m}{m_N}$.

Hierbei sind d_N und m_N wie in der obigen Tabelle gegeben.

Korollar 1.121 Der Ring $\mathcal{M}(N)$ enthält genau eine Modulform f_N mit der Fourier-Entwicklung:

$$f_N = 1 + 0 \cdot q(2) + \dots + 0 \cdot q(2c) + a(2c+2)q(2c+2) + \dots$$

Sie heißt die extremale Modulform vom Gewicht m .

Bereits C. L. Siegel zeigte in [25], daß für $N = 1$ der Koeffizient $a(2c+2)$ von f_N positiv ist. In [24] wird gezeigt, daß für $N > 1$ der Koeffizient $a(2c+2)$ positiv ist und darüber hinaus alle Koeffizienten $a(t)$ für $t \geq 1$ gerade sind.

Hieraus ergibt sich sofort:

Folgerung 1.122 Das Minimum eines stark N -modularen geraden $2m$ -dimensionalen Gitters ist kleiner oder gleich $2 + 2 \left\lfloor \frac{m}{m_N} \right\rfloor$.

Definition 1.123 Ein stark N -modulares gerades $2m$ -dimensionales Gitter Λ (für ein $N \in \mathcal{N}$) heißt extremal, falls sein Minimum den Wert der oberen Schranke annimmt, d.h. falls $\min \Lambda = 2 + 2 \left\lceil \frac{m}{m_N} \right\rceil$.

Die Dimension $2m_N$ ist also die erste Dimension, in der ein extremales, stark N -modulares gerades Gitter das Minimum 4 haben kann. In [19] wird für jedes N die Existenz und Eindeutigkeit eines solchen Gitters der Dimension $2m_N$ nachgewiesen. Es wird dort konstruiert als das Fixgitter eines Elementes der Ordnung N in der Mathieu-Gruppe M_{23} , einer Untergruppe der Automorphismengruppe des Leech-Gitters L , wie folgt:

Die Menge \mathcal{N} ist genau die Menge der quadratfreien Ordnungen der Elemente von M_{23} und es gibt für alle $N \in \mathcal{N}$ (bis auf Konjugation) genau eine zyklische Untergruppe $\langle g \rangle \leq M_{23}$ der Ordnung N . Das zugehörige Fixgitter $\Lambda(N) := \{l \in L \mid lg = l\}$ ist gerade, stark N -modular und extremal. Seine Dimension ist $2m_N$.

Beispielsweise ist $\Lambda(2)$ das Barnes-Wall-Gitter der Dimension 16 und $\Lambda(3)$ das Coxeter-Todd-Gitter der Dimension 12.

In [24] wird der Begriff „extremales Gitter“ etwas weiter gefaßt:

Definition 1.124 Sei $\mathcal{M}_m(\Gamma, \chi)$ der endlich dimensionale \mathbb{C} -Vektorraum der elliptischen Modulformen vom Gewicht m zu einer mit der Siegelschen Modulgruppe kommensurablen Gruppe Γ und zu einem Charakter χ von Γ .

Sei \mathcal{M} ein Teilraum von $\mathcal{M}_m(\Gamma, \chi)$ der Dimension d . Sei die Projektion $P : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^d$ definiert für die ersten d Koeffizienten der Fourier-Entwicklung in $q = \exp(\pi iz)$ von $f \in \mathcal{M}$ durch:

$$f = \sum_{t=0}^{\infty} a(t)q(t) \mapsto (a(0), a(1), \dots, a(d-1))^{tr}.$$

Falls die Abbildung P injektiv ist, dann existiert genau ein Element $E_{\mathcal{M}}$ in \mathcal{M} der Form

$$E_{\mathcal{M}} = 1 + \sum_{t=d}^{\infty} a(t)q(t),$$

das die extremale Modulform in \mathcal{M} genannt wird. In diesem Fall heißt \mathcal{M} extremalisierbar.

Hierbei stellt sich die Frage, ob $E_{\mathcal{M}}$ die Theta-Reihe eines geraden Gitters ist. Dafür ist notwendig, daß die Fourier-Koeffizienten $a(t)$ von $E_{\mathcal{M}}$ für $t \geq 1$ gerade sind.

Definition 1.125 Sei Λ ein stark N -modulares gerades $2m$ -dimensionales Gitter, so daß seine Theta-Reihe ϑ_Λ in einem extremalisierbaren \mathcal{M} liegt. Falls $\vartheta_\Lambda = E_{\mathcal{M}}$ gilt, dann heißt Λ extremal bezüglich \mathcal{M} .

Proposition 1.126 Für ein extremales Gitter Λ gilt:

$$\vartheta_\Lambda = 1 + 0 \cdot q(1) + \dots + 0 \cdot q(d-1) + a(d) \cdot q(d) + \dots$$

Folglich ist $\min \Lambda \geq d$. Ist $a(d)$ ungleich Null, so ist sogar $\min \Lambda = d$.

Außerdem gilt wegen der Injektivität der Projektion P für alle stark N -modularen geraden $2m$ -dimensionalen Gitter Λ' mit $\vartheta_{\Lambda'} \in \mathcal{M}$: $\min \Lambda' \leq \min \Lambda$.

Damit besitzt das extremale Gitter Λ das größte Minimum unter allen bestimmten stark N -modularen geraden Gittern und ist damit das dichteste Gitter unter ihnen.

Kapitel 2

Methoden

In diesem Kapitel stellen wir die Methoden vor, die zur Beantwortung der dieser Arbeit zugrundeliegenden Fragestellung notwendig sind.

2.1 Filtrierung

Sei \mathcal{G} ein Geschlecht der Gitter im $2m$ -dimensionalen euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^{2m}, (\cdot, \cdot))$. Die Isometrieklasse in \mathcal{G} , die vom Element Λ repräsentiert wird, bezeichnen wir mit $[\Lambda]$.

Aufgrund des Satzes 1.65 können wir das Geschlecht \mathcal{G} als eine disjunkte Vereinigung der Isometrieklassen schreiben: $\mathcal{G} = [\Lambda_1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [\Lambda_h]$, wobei h seine Klassenzahl ist.

Definition 2.1 Sei

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{G}) := \langle [\Lambda_1], \dots, [\Lambda_h] \rangle_{\mathbb{C}}$$

der h -dimensionale \mathbb{C} -Vektorraum, erzeugt von $[\Lambda_1], \dots, [\Lambda_h]$.

Die Basis $\{[\Lambda_1], \dots, [\Lambda_h]\}$ von \mathcal{V} sei von nun an fixiert.

Wir machen \mathcal{V} zu einem Hilbert-Raum, indem wir eine hermitesche Form darauf definieren:

Definition 2.2 Setze für die Basisvektoren von \mathcal{V}

$$\mathfrak{h}([\Lambda_i], [\Lambda_j]) := |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij} \quad \text{für } i, j = 1, \dots, h,$$

wobei δ das Kronecker-Symbol ist.

Setzen wir diese Zuordnung linear auf \mathcal{V} fort, so erhalten wir die Abbildung $\mathfrak{h} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$, $(v, v') \mapsto \mathfrak{h}(v, v')$.

Für $v = \sum_{i=1}^h c_i [\Lambda_i] \in \mathcal{V}$ und $v' = \sum_{j=1}^h c'_j [\Lambda_j] \in \mathcal{V}$ gilt dann:

$$\mathfrak{h}(v, v') = \sum_{i=1}^h c_i c'_i |\text{Aut}(\Lambda_i)|.$$

Direktes Nachrechnen bestätigt den

Satz 2.3 *Die Abbildung \mathfrak{h} ist eine positiv definite hermitesche Form auf \mathcal{V} .*

Wir führen nun in ähnlicher Weise eine Multiplikation auf \mathcal{V} ein:

Definition 2.4 *Setze für die Basisvektoren von \mathcal{V}*

$$[\Lambda_i] \circ [\Lambda_j] := |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij} [\Lambda_i] \quad \text{für } i, j = 1, \dots, h.$$

Setzen wir die obige Zuordnung auch linear auf \mathcal{V} fort, so erhalten wir die Abbildung $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $(v, v') \mapsto v \circ v'$.

Für $v = \sum_{i=1}^h c_i [\Lambda_i] \in \mathcal{V}$ und $v' = \sum_{j=1}^h c'_j [\Lambda_j] \in \mathcal{V}$ gilt dann:

$$v \circ v' = \sum_{i=1}^h c_i c'_i |\text{Aut}(\Lambda_i)| [\Lambda_i].$$

Der folgende Satz läßt sich natürlich auch direkt verifizieren:

Satz 2.5 *Der Vektorraum (\mathcal{V}, \circ) ist eine assoziative und kommutative \mathbb{C} -Algebra mit dem Einselement*

$$\mathbf{e} := \sum_{k=1}^h |\text{Aut}(\Lambda_k)|^{-1} [\Lambda_k].$$

Proposition 2.6 *Es gilt die Vertauschungsregel:*

$$\mathfrak{h}([\Lambda_i] \circ [\Lambda_j], [\Lambda_k]) = \mathfrak{h}([\Lambda_i], [\Lambda_j] \circ [\Lambda_k]) \quad \text{für alle } i, j, k \in \{1, \dots, h\}.$$

Beweis. Für die linke Seite der Gleichung, die zu zeigen ist, erhalten wir durch Ausrechnen: $\mathfrak{h}([\Lambda_i] \circ [\Lambda_j], [\Lambda_k]) = |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij} \mathfrak{h}([\Lambda_i], [\Lambda_k]) = |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij} \cdot |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ik}$. Dies ist gleich $|\text{Aut}(\Lambda_i)|^2$, falls $i = j = k$, und gleich 0 sonst.

Für die rechte Seite gilt aber: $\mathfrak{h}([\Lambda_i], [\Lambda_j] \circ [\Lambda_k]) = |\text{Aut}(\Lambda_j)| \delta_{jk} \mathfrak{h}([\Lambda_i], [\Lambda_j]) = |\text{Aut}(\Lambda_j)| \delta_{jk} \cdot |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij}$, was ebenfalls gleich $|\text{Aut}(\Lambda_i)|^2$, falls $i = j = k$, und gleich 0 sonst ist. \square

Im folgenden sei \mathcal{G} das Geschlecht des extremalen stark N -modularen geraden Gitters \mathcal{E}_N für ein $N \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$.

Proposition 1.67 liefert zusammen mit Satz 1.105 die folgende Tatsache:

Satz 2.7 *Die Siegelsche Theta-Reihe n -ten Grades jedes Gitters im Geschlecht von \mathcal{E}_N ist für jedes $n \in \{0, 1, 2, \dots, 2m\}$ eine Modulform vom Gewicht m zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_n^0(N)$ und zum Charakter χ^0 .*

Die Siegelsche Theta-Reihe $\mathfrak{v}_{\Lambda_i}^{(n)}$ vom Grad n des Gitters Λ_i induziert die lineare Abbildung $\Theta^{(n)} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{M}_m^{(n)}(\Gamma_n^0(N), \chi^0)$, die sogenannte „Bildung der Siegelschen Theta-Reihe“:

Definition 2.8 *Sei*

$$\Theta^{(n)} \left(\sum_{i=1}^h c_i [\Lambda_i] \right) := \sum_{i=1}^h c_i \mathfrak{v}_{\Lambda_i}^{(n)} \quad \text{für } \sum_{i=1}^h c_i [\Lambda_i] \in \mathcal{V}.$$

Wegen $\mathfrak{v}_{\Lambda_i}^{(n)} | \Phi = \mathfrak{v}_{\Lambda_i}^{(n-1)}$ für alle $i = 1, \dots, h$ hat die Funktion $\Theta^{(n)}$ folgende Eigenschaft:

Lemma 2.9 *Der Siegelsche Φ -Operator bildet $\Theta^{(n)}(\mathcal{V})$ auf $\Theta^{(n-1)}(\mathcal{V})$ ab.*

Bemerkung 2.10 *Die Abbildung $\Theta^{(n)}$ ist mit dem Siegelschen Φ -Operator vertauschbar, d.h. $\Theta^{(n)} | \Phi = \Theta^{(n-1)}$.*

Definition 2.11 *Für ein $n \in \mathbb{N}$ sei*

$$\mathcal{V}_n := \text{Kern}(\Theta^{(n)})$$

der Kern von $\Theta^{(n)}$.

Offensichtlich enthält jedes \mathcal{V}_h nur solche Linearkombinationen der Isometrieklassen, die die triviale Theta-Reihe vom Grad n bilden.

Die folgende Identität läßt sich leicht nachweisen:

Proposition 2.12 *Es gilt:*

$$\Theta^{(n)}(\mathcal{V}_{n-1}) = \left\{ \sum_{i=1}^h c_i \vartheta_{[\Lambda_i]}^{(n)} \mid \sum_{i=1}^h c_i \vartheta_{[\Lambda_i]}^{(n-1)} = 0 \right\}$$

Dies hat zusammen mit dem vorangehenden Lemma zur Folge (vgl. [2, Satz 8.1]):

Korollar 2.13 *Die Menge $\Theta^{(n)}(\mathcal{V}_{n-1})$ ist der Kern des Siegelschen Φ -Operators.*

Insbesondere sind die Elemente von $\Theta^{(n)}(\mathcal{V}_{n-1})$ die Spitzenformen in $\Theta^{(n)}(\mathcal{V})$.

Satz 2.14 *Die Kerne $\mathcal{V}_n := \text{Kern}(\Theta^{(n)})$ bewirken die folgende Filtrierung (auch Fahne genannt) von \mathcal{V} :*

$$\mathcal{V} =: \mathcal{V}_{-1} \supseteq \mathcal{V}_0 \supseteq \mathcal{V}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{V}_{2m} = \{0\}.$$

Beweis. Die Inklusion $\mathcal{V}_{n-1} \supseteq \mathcal{V}_n$ ist aufgrund des Lemmas 2.9 klar.

Zum Nachweis von $\mathcal{V}_{2m} = \{0\}$ (am Ende der obigen Fahne) zeigen wir, daß der Kern von $\Theta^{(2m)}$ nur aus den trivialen Linearkombination der Isometrieklassen besteht.

Ein nichtverschwindender Fourier-Koeffizient der Siegelschen Theta-Reihe $\vartheta_{[\Lambda_i]}^{(2m)}$ ist $a_{\Lambda_i}(G_i) = |\text{Aut}(\Lambda_i)|$, wobei G_i eine Gram-Matrix von Λ_i ist. Diese Tatsache ist aber enthalten in:

$$a_{\Lambda_i}(G_j) = |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij},$$

beruhend auf dem folgenden:

Sind x_1, \dots, x_{2m} Gittervektoren von Λ_i , so daß $((x_i, x_j))_{i,j=1, \dots, 2m} = G_j$ gilt, dann ist offenbar $\langle x_1, \dots, x_{2m} \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \Lambda_j$. Aber $\langle x_1, \dots, x_{2m} \rangle_{\mathbb{Z}} \leq \Lambda_i$. Daher gilt nach der Determinanten-Index-Formel (s. Satz 1.12): $[\Lambda_i : \Lambda_j]^2 = (\det \Lambda_i)(\det \Lambda_j)^{-1}$. Da Λ_i und Λ_j demselben Geschlecht angehören, haben sie dieselbe Determinante (vgl. Beweis des Satzes 1.65) und somit ist $[\Lambda_i : \Lambda_j] = 1$. Also $\Lambda_j \cong \Lambda_i$ und nach der Proposition 1.86 $\vartheta_{[\Lambda_j]}^{(2m)} = \vartheta_{[\Lambda_i]}^{(2m)}$. Das beweist, daß $a_{\Lambda_i}(G_j) = |\text{Aut}(\Lambda_i)| \delta_{ij}$. Insbesondere ist $a_{\Lambda_i}(G_i) \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, h$.

Daher folgt $c_1 = \dots = c_h = 0$ aus

$$0 = \sum_{i=1}^h c_i \vartheta_{[\Lambda_i]}^{(2m)} \ni \sum_{i=1}^h c_i a_{\Lambda_i}(G_i) q(G_i).$$

□

Aus der Definition der Siegelschen Theta-Reihe für den Grad 1 folgt direkt:

Proposition 2.15 Für den Teilraum \mathcal{V}_0 gilt:

$$\mathcal{V}_0 = \left\{ \sum_{i=1}^h c_i [\Lambda_i] \mid \sum_{i=1}^h c_i = 0 \right\} = \langle [\Lambda_{i+1}] - [\Lambda_i] \mid i = 1, \dots, 2m-1 \rangle.$$

Insbesondere ist seine Dimension gleich $2m-1$.

Folgerung 2.16 Für das Einselement ϵ bezüglich der Multiplikation \circ gilt: $\epsilon \notin \mathcal{V}_0$.

Definition 2.17 Sei $\mathcal{W}_n := \mathcal{V}_n^\perp$ der Orthogonalraum von \mathcal{V}_n (für $n = -1, 0, 1, \dots, 2m$).

Mittels der Orthogonalräume erhalten wir die zweite, diesmal die aufsteigende, Filtrierung von \mathcal{V} als eine Folgerung des Satzes 2.14:

Korollar 2.18 Es gilt:

$$\{0\} = \mathcal{W}_{-1} \subseteq \mathcal{W}_0 \subseteq \mathcal{W}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{W}_{2m} = \mathcal{V}$$

Um zwei sehr nützliche Eigenschaften der Orthogonalräume zu bestimmen, beweisen wir zunächst den

Hilfssatz 2.19 Für jedes $n = -1, 0, 1, \dots, 2m$ wird \mathcal{W}_n erzeugt von

$$b_{T_n} := \sum_{i=1}^h |\text{Aut}(\Lambda_i)|^{-1} a_{\Lambda_i}(T_n) [\Lambda_i]$$

für alle positiv definiten, symmetrischen, geraden, komplexwertigen $n \times n$ Matrizen T_n , wobei die Definition des Fourier-Koeffizienten $a_{\Lambda_i}(T_n)$ von $\mathfrak{D}_{[\Lambda_i]}^{(n)}$ linear auf \mathcal{V} fortgesetzt wird. D.h.

$$\mathcal{W}_n = \langle b_{T_n} \mid T_n \in \mathbb{C}_{\text{sym}}^{n \times n}, T_n > 0, \text{ gerade} \rangle.$$

Beweis. Es ist klar, daß für alle positiv definiten, symmetrischen, geraden, komplexwertigen $n \times n$ Matrizen T_n gilt: $\mathfrak{h}(v, b_{T_n}) = a_v(T_n)$ für alle $v \in \mathcal{V}$, insbesondere verschwindet $\mathfrak{h}(v, b_{T_n})$ für alle $v \in \mathcal{V}_n$. Daher liegt b_{T_n} in \mathcal{W}_n für alle T_n .

Wir haben damit die Relation $\mathcal{W}_n \supseteq \langle b_{T_n} \mid T_n \in \mathbb{C}_{\text{sym}}^{n \times n}, T_n > 0, \text{ gerade} \rangle$ bewiesen.

Andererseits ist der Durchschnitt von \mathcal{W}_n mit dem Orthogonalraum des Erzeugnisses von allen b_{T_n} ein Nullraum. Denn gälte für ein $w \in \mathcal{W}_n$ mit $w \neq 0$ die Bedingung $\mathfrak{h}(w, b_{T_n}) = 0$ für alle T_n , so wäre $a_w(T_n) = 0$ für alle T_n und damit läge w in \mathcal{V}_n . Aber $\mathcal{W}_n \cap \mathcal{V}_n = \{0\}$, da \mathcal{W}_n eben der Orthogonalraum von \mathcal{V}_n ist. \square

Die zwei folgenden Inklusionsregeln gelten auf \mathcal{V} :

Satz 2.20

$$\mathcal{W}_n \circ \mathcal{W}_l \subseteq \mathcal{W}_{n+l} \text{ für alle } n, l \in \{-1, \dots, 2m\}$$

$$\mathcal{W}_i \circ \mathcal{V}_j \subseteq \mathcal{V}_{j-i} \text{ für alle } i, j \in \{-1, \dots, 2m\} \text{ mit } j > i$$

Beweis. Die zweite Regel ist eine Folgerung aus der ersten, denn aus $\mathcal{W}_i \circ \mathcal{W}_{j-i} \subseteq \mathcal{W}_j$ folgt $\mathcal{V}_j = \mathcal{W}_j^\perp \subseteq (\mathcal{W}_i \circ \mathcal{W}_{j-i})^\perp$ und weiter $\mathcal{W}_i \circ \mathcal{V}_j \subseteq (\mathcal{W}_{j-i})^\perp = \mathcal{V}_{j-i}$ aufgrund der Vertauschungsregel (s. Proposition 2.6).

Um die erste Inklusionsregel zu beweisen, reicht es nach dem vorangehenden Hilfssatz zu zeigen, daß für alle möglichen Matrizen T_n und T_l das Produkt $b_{T_n} \circ b_{T_l}$ eine Linearkombination einiger $b_{T_{n+l}}$ ist.

Es gilt:

$$b_{T_n} \circ b_{T_l} = \sum_{i=1}^h |\text{Aut}(\Lambda_i)|^{-1} a_{\Lambda_i}(T_n) a_{\Lambda_i}(T_l) [\Lambda_i]$$

und daher gilt nach einer wohlbekanntenen Eigenschaft der Fourier-Koeffizienten der Theta-Reihen:

$$a_{\Lambda_i}(T_n) a_{\Lambda_i}(T_l) = \sum_T a_{\Lambda_i}(T),$$

wobei die Summe über alle positiv definiten, symmetrischen, geraden, komplexwertigen $(n+l) \times (n+l)$ Matrizen der Form $T = \begin{pmatrix} T_n & * \\ * & T_l \end{pmatrix}$ läuft. \square

Bemerkung 2.21 *Da die Koeffizienten aller Theta-Reihen ganz und daher rational sind, sind die beiden Filtrierungen rational, d.h. $\mathcal{V}_n = \mathbb{C} \otimes (\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_{\mathbb{Q}})$ und entsprechend ist \mathcal{W}_n die Komplexifizierung von $\mathcal{W}_n \cap \mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$. Hierbei ist $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}} = \langle [\Lambda_1], \dots, [\Lambda_h] \rangle_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^h$ das rationale Erzeugnis von $\{[\Lambda_1], \dots, [\Lambda_h]\}$.*

2.2 Konstruktion einer Spitzenform nach der Methode von Borcherds, Freitag und Weissauer

In der Arbeit [3] von R. E. Borcherds, E. Freitag und R. Weissauer wird eine Methode zur Konstruktion einer Spitzenform der Ordnung m mithilfe eines $2m$ -dimensionalen unimodularen geraden Gitters vorgestellt. Ausgehend vom Leech-Gitter wurde damit eine nichtverschwindende Spitzenform der Ordnung 12 zur Siegelschen Modulgruppe erhalten.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde diese Methode ausgedehnt und erfolgreich auf die Gitter \mathcal{E}_N der Dimension $24\sigma_0(N)/\sigma_1(N)$, außer im Falle $N = 7$, angewandt und damit eine nichtverschwindende Spitzenform der Ordnung $12\sigma_0(N)/\sigma_1(N)$ zur entsprechenden Untergruppe der Modulgruppe konstruiert.

In diesem Abschnitt stellen wir die verallgemeinerte Methode vor.

Sei Λ ein $2m$ -dimensionales gerades Gitter im euklidischen Vektorraum \mathbb{R}^{2m} mit einem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) . Eine Primzahl p sei so gewählt, daß sie die Determinante von Λ nicht teilt.

Wir machen den $2m$ -dimensionalen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Vektorraum $\Lambda/p\Lambda$ zu einem quadratischen Raum gemäß:

Definition 2.22 Auf dem $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Vektorraum $\Lambda/p\Lambda$ sei eine Abbildung $q_p : \Lambda/p\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ definiert durch

$$q_p(x + p\Lambda) := \frac{1}{2}(x, x) + p\mathbb{Z} \quad \text{für } x + p\Lambda \in \Lambda/p\Lambda$$

sowie eine Abbildung $b_p : \Lambda/p\Lambda \times \Lambda/p\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ durch

$$b_p(x + p\Lambda, y + p\Lambda) := (x, y) + p\mathbb{Z} \quad \text{für } x + p\Lambda, y + p\Lambda \in \Lambda/p\Lambda.$$

Aus der Symmetrie und der Linearität des Skalarproduktes folgt sofort:

Proposition 2.23 Die Abbildung b_p ist eine symmetrische Bilinearform auf $\Lambda/p\Lambda$, d.h. $b_p(v, w)$ ist linear in v (bzw. in w) bei festem w (bzw. bei festem v) und $b_p(v, w) = b_p(w, v)$.

Ebenso unmittelbar aus den Eigenschaften des Skalarproduktes folgt:

Proposition 2.24 Die Abbildung q_p besitzt folgende Eigenschaften:

$$q_p(\alpha v) = \alpha^2 q_p(v) \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ und } v \in \Lambda/p\Lambda$$

$$q_p(v+w) = q_p(v) + q_p(w) + b_p(v,w) \quad \text{für alle } v, w \in \Lambda/p\Lambda.$$

Daher ist q_p eine quadratische Form auf $\Lambda/p\Lambda$ mit der assoziierten Bilinearform b_p .

Korollar 2.25 Für die mit q_p assoziierte Bilinearform b_p gilt: $b_p(v,v) = 2q_p(v)$ für alle $v \in \Lambda/p\Lambda$.

Beweis. In der vorangehenden Proposition setzen wir $\alpha = 2$ und $w = v$ und erhalten $4q_p(v) = q_p(2v) = q_p(v+v) = q_p(v) + q_p(v) + b_p(v,v) = 2q_p(v) + b_p(v,v)$. \square

Hierzu sei bemerkt, daß falls 2 eine Einheit in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ist, so ist damit $q_p = 2^{-1}b_p$ und folglich ist die quadratische Form q_p eindeutig durch die Bilinearform b_p bestimmt. Dies trifft offenbar genau dann zu, wenn $p \neq 2$ ist.

Folgerung 2.26 Im Falle $p = 2$ ist die Bilinearform b_p alternierend, d.h. $b_p(v,v) = 0$ für alle $v \in \Lambda/p\Lambda$.

Proposition 2.27 Der Orthogonalraum von $\Lambda/p\Lambda$ bezüglich b_p

$$\Lambda/p\Lambda^\perp := \{v \in \Lambda/p\Lambda \mid b_p(v,w) = 0 \text{ für alle } w \in \Lambda/p\Lambda\}$$

ist ein Nullraum.

Beweis. Sind $v = \sum_{i=1}^{2m} \zeta_i b_i$ und $w = \sum_{i=1}^{2m} \xi_i b_i$ die Vektoren des Gitters Λ mit einer Basis $B = \{b_1, \dots, b_{2m}\}$, so können wir offenbar das Skalarprodukt (v, w) schreiben als

$$(v, w) = (\zeta_1, \dots, \zeta_{2m}) \text{Gram}(B) (\xi_1, \dots, \xi_{2m})^{tr}.$$

Weiter können wir die ganzzahligen $2m$ -Tupel $(\zeta_1, \dots, \zeta_{2m})$ und (ξ_1, \dots, ξ_{2m}) als Vektoren in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m}$ sowie die ganzzahlige Matrix $\text{Gram}(B)$ als eine Matrix in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m \times 2m}$ auffassen.

Wegen $p \nmid \det \Lambda$ ist jede Gram-Matrix von Λ über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ invertierbar. Aus $(v, w) \in p\mathbb{Z}$ für alle $w \in \Lambda$ folgt: $(\zeta_1, \dots, \zeta_{2m})$ ist ein Nullvektor in $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m}$ und somit $v \in p\Lambda$. \square

Folgerung 2.28 Die Bilinearform b_p ist nicht ausgeartet (bzw. b_p ist regulär), d.h. aus $b_p(v, w) = 0$ für alle $w \in \Lambda/p\Lambda$ stets folgt: v ist das Nullelement in $\Lambda/p\Lambda$.

Somit ist q_p ebenfalls nicht ausgeartet.

Als nächstes führen wir die orthogonale Gruppe von $(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ ein (vgl. hierzu Definition 1.14).

Definition 2.29 Die Gruppe

$$O(\Lambda/p\Lambda, q_p) := \{f : \Lambda/p\Lambda \rightarrow \Lambda/p\Lambda \text{ linear} \mid q_p(f(v)) = q_p(v) \text{ für alle } v \in \Lambda/p\Lambda\}$$

heißt die orthogonale Gruppe von $\Lambda/p\Lambda$ bezüglich der quadratischen Form q_p .

Lemma 2.30 Die Elemente von $O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ haben die Determinante ± 1 .

Der Beweis dieses Lemmas ist z. B. in [26, Kapitel 11] zu finden.

Definition 2.31 Die Gruppe

$$SO(\Lambda/p\Lambda, q_p) := \{f \in O(\Lambda/p\Lambda, q_p) \mid \det f = 1\}$$

heißt die spezielle orthogonale Gruppe von $\Lambda/p\Lambda$ bezüglich der quadratischen Form q_p .

Im Falle $p \neq 2$ wird in [26, Kapitel 11] gezeigt, daß $SO(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ den Index 2 in $O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ hat.

Lemma 2.32 Die orthogonale Gruppe $O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ erhält auch b_p , d.h.

ist $f \in O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$, so gilt: $b_p(f(v), f(w)) = b_p(v, w)$ für alle $v, w \in \Lambda/p\Lambda$.

Beweis. Wir wenden die Proposition 2.24 auf $b_p(f(v), f(w))$ an, wie folgt: Für alle $f \in O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ gilt: $b_p(f(v), f(w)) = q_p(f(v) + f(w)) - q_p(f(v)) - q_p(f(w)) = q_p(v + w) - q_p(v) - q_p(w) = b_p(v, w)$ für alle $v, w \in \Lambda/p\Lambda$. \square

Folgerung 2.33 Im Falle $p = 2$ ist die orthogonale Gruppe $O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ eine Untergruppe der symplektischen Gruppe $Sp_{2m}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Insbesondere ist $SO(\Lambda/2\Lambda, q_2) = O(\Lambda/2\Lambda, q_2)$.

Beweis. Die symplektische Gruppe bezüglich einer alternierenden Bilinearform auf einem Vektorraum ist per definitionem die Gruppe der Vektorraum–Automorphismen, die diese Bilinearform erhalten (vgl. [26, Kapitel 8]). Hieraus und aus der Folgerung 2.26 folgt die Behauptung. \square

Im Falle $p = 2$ wird damit der Determinanten–Homomorphismus zu einer trivialen Abbildung, aber durch die Einführung der sogenannten Dickson–Invariante erhalten wir ein Analogon dazu:

Definition 2.34 Sei die Abbildung $D : O(\Lambda/2\Lambda, q_2) \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ definiert durch

$$D(f) := \dim \text{Bild}(id - f) + 2\mathbb{Z},$$

wobei id die Identität von $\Lambda/2\Lambda$ ist.

In [26, Satz 11.43] wird gezeigt, daß D ein Homomorphismus ist, wobei $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ als eine additive Gruppe aufgefaßt wird.

Im folgenden setzen wir voraus, daß die Determinante aller Elemente der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Lambda)$ des Gitters Λ gleich 1 ist. Anderenfalls verschwinden alle Funktionen $\text{BFW}^{(n)}(\Lambda, p)$, die wir später definieren. Diese Voraussetzung ist erfüllt, falls Λ keinen Vektor der Länge 2 enthält.

Da die Komposition des natürlichen Homomorphismus $\text{Aut}(\Lambda) \rightarrow O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ mit $(-1)^D$ eben der Determinanten–Homomorphismus auf $\text{Aut}(\Lambda)$ ist, erhalten wir mit der obigen Voraussetzung das folgende Ergebnis:

Proposition 2.35 Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Lambda)$ erhält die Dickson–Invariante D .

Definition 2.36 Ein Vektor $x \in \Lambda/p\Lambda$ heißt *singulär*, falls $q_p(x) = 0$.

Definition 2.37 Ein Teilraum $E \subseteq \Lambda/p\Lambda$ heißt *total singulär*, falls q_p , eingeschränkt auf E , die Nullabbildung ist, d.h. falls $q_p(x) = 0$ für alle $x \in E$.

Ein Teilraum $E \subseteq \Lambda/p\Lambda$ heißt *total asingulär*, falls er keine singuläre Vektoren enthält, d.h. falls $q_p(x) \neq 0$ für alle $x \in E$.

Bemerkung 2.38 Für einen total singulären Teilraum $E \subseteq \Lambda/p\Lambda$ gilt: $b_p(x, y) = 0$ für alle $x, y \in E$, wegen $b_p(x, y) = q_p(x + y) - q_p(x) - q_p(y)$ nach Proposition 2.24.

Lemma 2.39 *Ist die Dimension eines Teilraumes von $\Lambda/p\Lambda$ größer oder gleich 3, so enthält er einen singulären Vektor.*

Der Beweis dieses Lemmas ist z. B. in [26, Theorem 11.2] zu finden.

Definition 2.40 *Die größtmögliche Dimension von total singulären Teilräumen in einem quadratischen Raum heißt der Witt-Index der quadratischen Form.*

Bemerkung 2.41 *Der Witt-Index von $(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ ist kleiner oder gleich m , da für einen total singulären Teilraum E von $\Lambda/p\Lambda$ gilt: $E \subseteq E^\perp$ und $\Lambda/p\Lambda = E \oplus E^\perp$.*

Definition 2.42 *Ein total singulärer Teilraum $E \subseteq \Lambda/p\Lambda$ heißt ein maximaler total singulärer Teilraum von $\Lambda/p\Lambda$, falls es keinen total singulären Teilraum F von $\Lambda/p\Lambda$ mit $E \subsetneq F \subsetneq \Lambda/p\Lambda$ gibt.*

Ziehen wir den klassischen Satz von Witt heran (siehe z. B. [26, Theorem 7.4]), so folgt

Proposition 2.43 *Je zwei maximale total singuläre Teilräume von $\Lambda/p\Lambda$ haben die gleiche Dimension.*

Definition 2.44 *Zwei Vektoren v und w mit den Eigenschaften*

$$q_p(v) = q_p(w) = 0 \text{ und } b_p(v, w) = 1$$

heißen ein hyperbolisches Paar.

Ein Teilraum, der von einem hyperbolischen Paar erzeugt wird, heißt eine hyperbolische Ebene.

Wir wenden die Aussage (11.3) aus [26] auf $\Lambda/p\Lambda$ an und erhalten:

Satz 2.45 *Der quadratische Raum $\Lambda/p\Lambda$ über dem Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ kann als folgende orthogonale direkte Summe geschrieben werden:*

$$\Lambda/p\Lambda = \mathcal{A} \perp \mathcal{H}_1 \perp \dots \perp \mathcal{H}_w,$$

wobei \mathcal{A} ein asingulärer Teilraum ist und $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_w$ hyperbolische Ebenen sind.

Hieraus entnehmen wir nach den vorherigen Aussagen zum Witt-Index:

Folgerung 2.46 *Im obigen Satz ist der Witt-Index von $(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ gleich w .*

Bemerkung 2.47 Da $\Lambda/p\Lambda$ ein $2m$ -dimensionaler Vektorraum ist, liefert die Aussage des Lemmas 2.39, daß die Dimension von \mathcal{A} entweder gleich 0 oder gleich 2 ist.

Korollar 2.48 Verschwindet \mathcal{A} , so ist der Witt-Index der quadratischen Form q_p gleich m und es existieren Basisvektoren $g_1, \dots, g_m, h_1, \dots, h_m$ von $\Lambda/p\Lambda$, sodaß für q_p gilt:

$$q_p \left(\sum_{i=1}^m \alpha_i g_i + \beta_i h_i \right) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Definition 2.49 Im obigen Fall, d.h. falls $\mathcal{A} = \{0\}$ gilt, heißt $(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ hyperbolisch und die quadratische Form q_p ist von der sogenannten Art „+“.

Die Folgerung 2.46 impliziert den folgenden Satz, der zur Überprüfung des quadratischen Raumes auf Hyperbolität benutzt werden kann.

Satz 2.50 Der quadratische Raum $(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ ist genau dann hyperbolisch, wenn ein total singulärer Teilraum von $\Lambda/p\Lambda$ der Dimension m existiert.

Ab jetzt nehmen wir an, daß $\Lambda/p\Lambda$ hyperbolisch ist.

Damit ist es zum einen sichergestellt, daß der Witt-Index von q_p gleich m ist und es so nur zwei Familien von maximalen total singulären Teilräumen gibt, wobei je zwei Teilräume zur selben Familie gehören, falls die Dimension ihres Durchschnitts gerade ist. Vergleiche hierzu [5, Kapitel 2, §4].

Zum anderen operiert die orthogonale Gruppe $O(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ transitiv auf der Menge solcher Teilräume. Aber unter dem Kern der Dickson-Invariante gibt es zwei Bahnen, die genau die Familien von maximalen total singulären Teilräumen sind.

Es sei nebenbei bemerkt, daß die Gesamtzahl der maximalen total singulären Teilräume das Produkt $2(p+1)(p^2+1)\cdots(p^{m-1}+1)$ ist (s. hierzu [26, Aufgabe 11.3]).

Definition 2.51 Für einen maximalen total singulären Teilraum E von $\Lambda/p\Lambda$ sei

$$\rho^{-1}(E) := \{x \in \Lambda \mid x + p\Lambda \in E\}$$

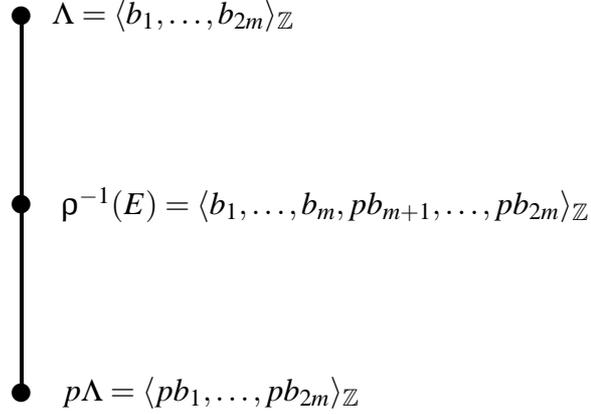
das Urbild von E in Λ unter dem natürlichen Epimorphismus $\rho : \Lambda \rightarrow \Lambda/p\Lambda$.

Satz 2.52 Für einen maximalen total singulären Teilraum E von $\Lambda/p\Lambda$ ist die Konstruktion

$$\Lambda_E := \left(\frac{1}{p}\right) \rho^{-1}(E) = \frac{1}{\sqrt{p}} \rho^{-1}(E)$$

ein $2m$ -dimensionales gerades Gitter mit $\det \Lambda_E = \det \Lambda$, das die Perestroika von Λ mithilfe von E genannt wird.

Beweis. Für eine Basis $\{b_1 + p\Lambda, \dots, b_m + p\Lambda\}$ von $E \subset \Lambda/p\Lambda$ kann leicht nachgewiesen werden, daß $b_1, \dots, b_m \in \Lambda$ linear unabhängig sind. Ergänze diese Vektoren zu einer Basis $B := \{b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_{2m}\}$ von Λ . Dann ist $\{b_1, \dots, b_m, pb_{m+1}, \dots, pb_{2m}\}$ eine Basis von $\rho^{-1}(E)$ und daher ist $B_E := \{\frac{1}{\sqrt{p}}b_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}b_m, \sqrt{p}b_{m+1}, \dots, \sqrt{p}b_{2m}\}$ eine Basis von Λ_E . Die folgende Zeichnung veranschaulicht diese Situation:



Es ist klar, daß das $2m$ -dimensionale Gitter Λ_E ganz ist, da $(b_i, b_j) \in p\mathbb{Z}$ für alle $i, j = 1, \dots, m$ gilt, wegen $b_p(b_i + p\Lambda, b_j + p\Lambda) = 0$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ nach der Bemerkung 2.38.

Es ist außerdem ein gerades Gitter, da Λ gerade ist und da $(b_i, b_i) \in 2p\mathbb{Z}$ für alle $i \in \{1, \dots, m\}$ gilt, wegen $q_p(b_i + p\Lambda) = 0$ nach der Definition 2.37.

Für die Gram-Matrix $\text{Gram}_{\Lambda_E}(B_E)$ von Λ_E gilt:

$$\text{Gram}_{\Lambda_E}(B_E) = \begin{pmatrix} (1/p)E_m & 0 \\ 0 & E_m \end{pmatrix} \cdot \text{Gram}_{\Lambda}(B) \cdot \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & pE_m \end{pmatrix}.$$

Daher ist $\det \Lambda_E = \det \text{Gram}_{\Lambda_E}(B_E) = (1/p)^m \cdot \det \text{Gram}_{\Lambda}(B) \cdot p^m = \det \text{Gram}_{\Lambda}(B) = \det \Lambda$. □

Bemerkung 2.53 *Im obigen Beweis wurde zudem gezeigt, daß die Übergangsmatrix von Λ zu Λ_E in der folgenden Menge liegt:*

$$\text{GL}_{2m}(\mathbb{Z}) \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}, \sqrt{p}, \dots, \sqrt{p} \right) \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z}).$$

Korollar 2.54 *Die Perestroika Λ_E des Gitters Λ mit Hilfe eines maximalen total singulären Teilraumes E von $\Lambda/p\Lambda$ gehört sogar dem Geschlecht von Λ an, falls die Stufe von Λ eine quadratfreie Zahl N ist und falls $\det \Lambda = N^m$ gilt.*

Beweis. Ist N prim, so folgt die Behauptung aufgrund der Proposition 1.68 sofort aus dem vorangehenden Satz. Ansonsten folgt die Behauptung aufgrund der eindeutigen Jordanschen Zerlegung für Λ , da dann $p \nmid N$. \square

Wir wählen einen beliebigen, von nun an fixierten, maximalen total singulären Teilraum F und definieren damit die Funktion ε auf der Menge der Teilräume von $\Lambda/p\Lambda$:

Definition 2.55 Sei $\varepsilon : \{E \subset \Lambda/p\Lambda\} \rightarrow \{0, \pm 1\}$ gemäß

$$\varepsilon(E) := \begin{cases} (-1)^{\dim(E \cap F)}, & \text{falls } E \text{ maximal total singulär ist,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da diese Funktion auf der Familie von F den Wert 1 und auf der anderen Familie von maximalen total singulären Teilräumen den Wert -1 annimmt, ist sie bis auf das Vorzeichen wohldefiniert.

Definition 2.56 Zu einem gegebenen n -Tupel $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ definieren wir zuerst eine sogenannte reskalierte Gram-Matrix durch

$$S(\lambda) := \left(\left(\frac{1}{\sqrt{p}} \lambda_i, \frac{1}{\sqrt{p}} \lambda_j \right) \right)_{i,j=1,\dots,n} = \frac{1}{p} ((\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}_{sym}^{n \times n}.$$

Wir setzen dann weiter

$$E(\lambda) := (\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle_{\mathbb{Z}} + p\Lambda) / p\Lambda \cong \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle_{\mathbb{Z}} / (\langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle_{\mathbb{Z}} \cap p\Lambda)$$

als das Bild des von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ erzeugten Teilraumes in $\Lambda/p\Lambda$ unter dem natürlichen Epimorphismus $\rho : \Lambda \rightarrow \Lambda/p\Lambda$.

Das folgende Lemma untersucht die Bedingungen dafür, daß $E(\lambda)$ maximal total singulär ist.

Lemma 2.57 Der Teilraum $E(\lambda)$ ist genau dann maximal total singulär, wenn $S(\lambda)$ eine gerade Matrix ist (d.h. ganzzahlig mit geraden Diagonaleinträgen) und $\dim E(\lambda) = m$.

Beweis. Ist x eine ganzzahlige Linearkombination von $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, etwa $x = \sum_{i=1}^n c_i \lambda_i$, so gilt:

$$\begin{aligned} q_p(x + p\Lambda) &= \frac{1}{2}(x, x) + p\mathbb{Z} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^n c_i c_j (\lambda_i, \lambda_j) \right) + p\mathbb{Z} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 (\lambda_i, \lambda_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_i c_j (\lambda_i, \lambda_j) + p\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Damit ist $q_p(x + p\Lambda) = 0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für alle $x \in E(\lambda)$ genau dann, wenn $(\lambda_i, \lambda_i) \in 2p\mathbb{Z}$ sowie $(\lambda_i, \lambda_j) \in p\mathbb{Z}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Dies ist aber äquivalent dazu, daß $S(\lambda)$ gerade ist. Damit ist bewiesen, daß $E(\lambda)$ genau dann total singulär ist, wenn $S(\lambda)$ eine gerade Matrix ist.

Nach Korollar 2.48 ist der Teilraum $E(\lambda)$ genau dann maximal, wenn seine Dimension m ist. \square

Wir führen nun die sogenannte Spitzenform von Borcherds, Freitag und Weissauer der Ordnung m ein, angelehnt an [3]:

Definition 2.58 Sei für $n \in \{1, \dots, m\}$

$$(\text{BFW}^{(n)}(\Lambda, p))(Z) := \sum_{\lambda \in \Lambda^n} \varepsilon(E(\lambda)) \exp\left(\pi\sqrt{-1}\text{Spur}(S(\lambda)Z)\right), \quad Z \in \mathbb{H}_n.$$

Bemerkung 2.59 Offenbar verschwindet $\text{BFW}^{(n)}(\Lambda, p)$ für alle $n < m$.

Die folgende Eigenschaft der Funktion $\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)$ ist das Hauptergebnis dieses Abschnittes:

Satz 2.60 Es gilt:

$$\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p) = \sum_E \varepsilon(E) \vartheta_{\Lambda_E}^{(m)} = \vartheta^{(m)}\left(\sum_E \varepsilon(E)[\Lambda_E]\right),$$

wobei über alle Teilräume E von $\Lambda/p\Lambda$ zu summieren ist, welche maximal total singulär sind.

Folgerung 2.61 Da $\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)$ eine Linearkombination der Theta-Reihen m -ten Grades der Gitter im Geschlecht von Λ ist, ist es eine Siegelsche Modulform vom Gewicht m .

Beweis. Zum Nachweis der Behauptung des obigen Satzes zeigen wir, daß die Differenz

$$\sum_{\lambda \in \Lambda^m} \varepsilon(E(\lambda)) \exp\left(\pi\sqrt{-1}\text{Spur}(S(\lambda)Z)\right) - \sum_{E \subset \Lambda/p\Lambda \text{ max. total singulär}} \varepsilon(E) \vartheta_{\Lambda_E}^{(m)}$$

verschwindet. Diese Differenz ist aber offenbar folgende Summe über alle maximalen total singulären Teilräume E :

$$\sum_E \varepsilon(E) \sum_{\substack{\lambda \in \Lambda^m \\ E(\lambda) \subsetneq E, \text{ total singulär}}} \exp\left(\pi\sqrt{-1}\text{Spur}(S(\lambda)Z)\right).$$

Wir zeigen, daß die partielle Summe für jedes feste λ verschwindet, d.h. für jeden nicht-maximalen total singulären Teilraum E gilt:

$$\sum_{\substack{E \text{ max. total singulär} \\ E' \subsetneq E}} \varepsilon(E) = 0.$$

Zu einem asingulären Vektor a aus dem Orthogonalraum $(E)^\perp$ von E' sei die sogenannte Spiegelung φ_a definiert auf $\Lambda/p\Lambda$ gemäß:

$$\varphi_a(v) := v - (q_p(a))^{-1} b_p(v, a) v \quad \text{für } v \in \Lambda/p\Lambda.$$

In [20, Lemma 4.11] wird gezeigt, daß $\varphi_a \in \mathcal{O}(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ und $D(\varphi_a) \neq 0$ gilt.

Da zudem offenbar $\varphi_a(E') = E'$ gilt, ist $\varphi_a(E)$ auch maximal total singulär mit $E' \subset \varphi(E)$. Aber $\varphi_a(E)$ gehört einer anderen Familie als der von E an und damit $\varepsilon(E) + \varepsilon(\varphi_a(E)) = 0$. \square

Korollar 2.62 *Im obigen Beweis wurde sogar gezeigt, daß $\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)$ eine Spitzenform ist. Denn für ihre Fourier-Entwicklung der Form*

$$(\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p))(Z) = \sum_{\substack{T \in \mathbb{Z}_{\text{sym}}^{m \times m} \\ T \geq 0, \text{ gerade}}} a_{\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)}(T) q(T),$$

mit den positiv semidefiniten, symmetrischen, geraden $m \times m$ Matrizen T gilt:

Ist $a_{\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)}(T) \neq 0$, so ist $\det T \neq 0$.

Definition 2.63 *Wir bezeichnen die Summe im vorangehenden Satz als*

$$\text{Per}(\Lambda, p) := \sum_E \varepsilon(E) [\Lambda_E] \in \mathcal{V},$$

die bis auf das Vorzeichen wohldefiniert ist.

Korollar 2.64 *Es gilt:*

$$\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p) = \vartheta^{(m)}(\text{Per}(\Lambda, p)).$$

Die Fourier-Koeffizienten $a_{\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)}(T)$ lassen sich folgendermaßen berechnen:

$$a_{\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)}(T) = \sum_{\lambda} \varepsilon(E(\lambda)),$$

wobei λ über alle m -Tupel $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ läuft, so daß $E(\lambda)$ ein maximaler total singulärer Teilraum von $\Lambda/p\Lambda$ ist und $S(\lambda)$ gleich T ist.

Wir geben hier den Algorithmus zur Berechnung eines Fourier-Koeffizienten von $\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)$ an. Durch Berechnung eines Koeffizienten ungleich Null mithilfe des Computers kann schnell und sofort nachgewiesen werden, daß die Spitzenform nicht verschwindet. In [3] wird für das Leech-Gitter auch ein Beweis ohne Computereinsatz erbracht.

Die oben beschriebene Konstruktionsmethode wurde im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt, um den Operator H_p , der im nächsten Abschnitt beschrieben wird, explizit (d.h. in einer Matrixdarstellung) zu berechnen. Im folgenden geben wir den Algorithmus dazu.

Eingabe : Ein gerades $2m$ -dimensionales Gitter Λ der quadratfreien Stufe N und der Determinante N^m , sodaß $\det(\text{Aut}(\Lambda)) = \{1\}$. Die kleinste Primzahl p mit $p \nmid N$, sodaß $\Lambda/p\Lambda$ hyperbolisch ist.

Eine positiv definite, symmetrische, gerade $m \times m$ Matrix T .

Ausgabe : Der Fourier-Koeffizient von $\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)$ für T .

sum \leftarrow 0

fix \leftarrow false

// Ein maximaler total singulärer Teilraum von $\Lambda/p\Lambda$ ist noch nicht fixiert.

```

forall  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda^m$  do
  | sing  $\leftarrow$  true
  | forall  $x, y \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$  do
    | if  $(x, x) \notin 2p\mathbb{Z}$  then
      | | sing  $\leftarrow$  false
    | end
    | if  $(x, y) \notin p\mathbb{Z}$  then
      | | sing  $\leftarrow$  false
    | end
  | end
  | if sing then
    | |  $\Omega \leftarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m}$  // Der quadratische Raum  $\Lambda/p\Lambda$ 
    | |  $E \leftarrow$  Bild von  $\langle \lambda_1, \dots, \lambda_m, p\Lambda \rangle$  in  $\Omega$ 
    | | if  $\dim E = m$  then
      | | | if not fix then
        | | | |  $F \leftarrow E$ 
        | | | | fix  $\leftarrow$  true
      | | | end
      | | |  $d \leftarrow \dim(E \cap F)$ 
      | | |  $\varepsilon \leftarrow (-1)^d$ 
      | | | sum  $\leftarrow$  sum +  $\varepsilon$ 
    | | end
  | end
end

```

Algorithmus 2.1 : Berechnung eines Fourier-Koeffizienten von $\text{BFW}^{(m)}(\Lambda, p)$

Eingabe : Ein gerades $2m$ -dimensionales Gitter Λ der quadratfreien Stufe N und der Determinante N^m , sodaß $\det(\text{Aut}(\Lambda)) = \{1\}$. Die kleinste Primzahl p mit $p \nmid N$, sodaß $\Lambda/p\Lambda$ hyperbolisch ist.

Ein vollst'andiges Repr'esentantensystem der Isometrieklassen des Geschlechtes von Λ , in einer fixierten Reihenfolge aufgelistet: $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$.

Ausgabe : Matrixdarstellung von H_p bzgl. der Basis $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$, n'amlich die Matrix $H = (H_{ij}) \in \mathbb{Z}^{h \times h}$ mit $H_{ij} = |\{\Upsilon \text{ eine Perestroika von } \Lambda_i \mid \Upsilon \cong \Lambda_j\}|$.

$H \leftarrow 0$ // Initialisiere die Matrix H

for $i = 1$ **to** h **do**

$\Lambda \leftarrow \Lambda_i$

forall $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \Lambda^m$ **do**

$\text{sing} \leftarrow \text{true}$

forall $x, y \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ **do**

if $(x, x) \notin 2p\mathbb{Z}$ **then**

$\text{sing} \leftarrow \text{false}$

end

if $(x, y) \notin p\mathbb{Z}$ **then**

$\text{sing} \leftarrow \text{false}$

end

end

if sing **then**

$\Omega \leftarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{2m}$ // Der quadratische Raum $\Lambda/p\Lambda$

$E \leftarrow \text{Bild von } \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m, p\Lambda \rangle \text{ in } \Omega$

if $\dim E = m$ **then**

$R \leftarrow \langle \lambda_1, \dots, \lambda_m, p\Lambda \rangle$

$B \leftarrow \text{Basis von } R$

$\Upsilon \leftarrow \text{zur Gram-Matrix } \frac{1}{p} \text{Gram}_R(B) \text{ geh'origes Gitter}$

for $j = 1$ **to** h **do**

if $\Upsilon \cong \Lambda_j$ **then**

$H_{ij} \leftarrow H_{ij} + 1$

break j

end

end

end

end

end

end

Algorithmus 2.2 : Berechnung von H_p

2.3 Knesersche Nachbarmethode

Die Knesersche Nachbarmethode ist ein mächtiges Hilfsmittel zur vollständigen Klassifikation einer Vielzahl von Geschlechtern ganzer Gitter. Es wurde im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt, um den Operator K_p , der im nächsten Abschnitt beschrieben wird, explizit (d.h. in einer Matrixdarstellung) zu berechnen. Im folgenden geben wir den Algorithmus dazu, basierend auf dem Algorithmus zur Konstruktion eines geraden Nachbargitters (siehe hierzu z. B. [9]).

Definition 2.65 *Zwei ganze Gitter Λ und Λ' der gleichen Dimension heißen p -Nachbarn, falls*

$$\Lambda / (\Lambda \cap \Lambda') \cong \Lambda' / (\Lambda \cap \Lambda') \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Aus der Determinanten-Index-Formel (s. Satz 1.12), angewandt auf diese Gitter, folgt:

Proposition 2.66 *Für zwei ganze Gitter Λ und Λ' gilt:*

$$\det(\Lambda \cap \Lambda') = [\Lambda : (\Lambda \cap \Lambda')]^2 \det \Lambda = [\Lambda' : (\Lambda \cap \Lambda')]^2 \det \Lambda'.$$

Folgerung 2.67 *Zwei benachbarte Gitter besitzen dieselbe Determinante.*

Sei p die kleinste Primzahl, die die Determinante von Λ nicht teilt.

Dann kann ein p -Nachbar von Λ mithilfe eines Gittervektors mit bestimmten Eigenschaften folgendermaßen konstruiert werden:

Satz 2.68 *Sei $v \in \Lambda$, aber $v \notin p\Lambda$, mit $(v, v) \in p^2\mathbb{Z}$.*

Zudem sei $\Lambda_v := \{\lambda \in \Lambda \mid (\lambda, v) \in p\mathbb{Z}\} \subseteq \Lambda$. Dann ist

$$\Lambda(v) := \langle \Lambda_v, \frac{1}{p}v \rangle_{\mathbb{Z}}$$

ein p -Nachbar von Λ , der das p -Nachbargitter von Λ bezüglich des Nachbarvektors v genannt wird.

Bemerkung 2.69 *Ist Λ gerade, so folgt aus dem in [9] angegebenen Algorithmus zur Berechnung einer Basis des geraden p -Nachbargitters von Λ bezüglich eines Nachbarnvektors v , daß die Übergangsmatrix von Λ zu $\Lambda(v)$ in der folgenden Menge liegt:*

$$\mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}) \mathrm{diag} \left(\frac{1}{p}, 1, \dots, 1, p \right) \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z}).$$

Korollar 2.70 Ist Λ ein gerades Gitter, so ist $\Lambda(v)$ ebenfalls gerade genau dann, wenn $(v, v) \in 2p^2\mathbb{Z}$ gilt.

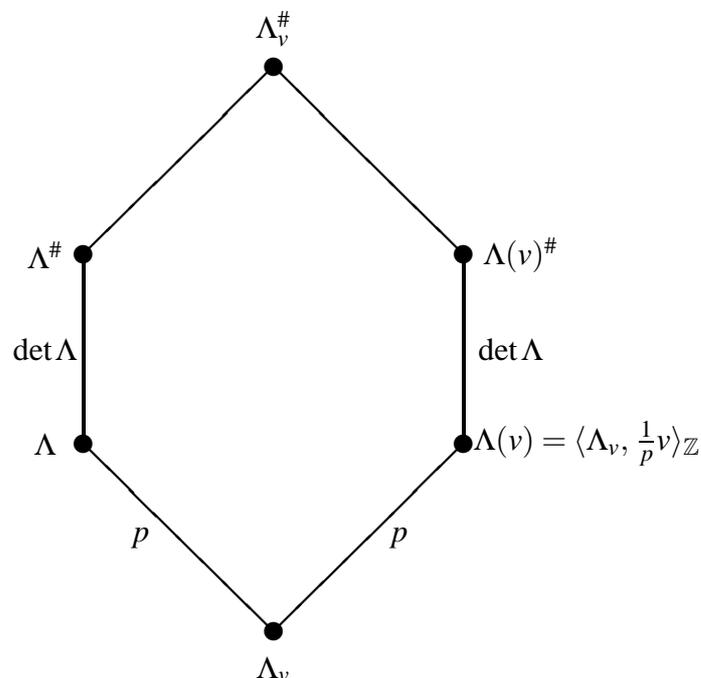
Bemerkung 2.71 Im Falle $p \neq 2$ ist die obige Bedingung an v stets erfüllt, da $(v, v) \in p^2\mathbb{Z}$ notwendig für die Nachbarbildung ist.

Die Umkehrung des vorangehenden Satzes ist:

Satz 2.72 Jeder p -Nachbar ist von der Form $\Lambda(v)$ bezüglich eines Nachbarvektors v , d.h. falls Λ' ein p -Nachbar von Λ ist, dann existiert ein $w \in \Lambda'$, aber $w \notin \Lambda$, so daß $\Lambda' = \Lambda(pw)$ gilt.

Der Beweis der beiden Sätze ist z. B. in [10, Satz 28.5] zu finden.

Die Situation für ein ganzes Gitter Λ mit dem p -Nachbarn $\Lambda(v)$ bezüglich eines Nachbarvektors v wird auf der folgenden Skizze verdeutlicht, beruhend auf der Proposition 1.36 und der Bemerkung 1.38. Hierbei erhalten wir die Indizes: $[\Lambda : \Lambda_v] = [\Lambda(v) : \Lambda_v] = p$ und $[\Lambda^\# : \Lambda] = [\Lambda(v) : \Lambda(v)^\#] = \det \Lambda$.



Für jedes $v \in \Lambda$ gilt offensichtlich: $\Lambda_v = \Lambda \Leftrightarrow v \in p\Lambda^\# \cap \Lambda$.

Wir heben hervor, daß die Voraussetzung $p \nmid \det \Lambda$ für die Nachbarbildung notwendig ist, weil damit Λ_v für jeden Nachbarvektor v ein echtes Untergitter von Λ ist. Sonst (d.h. falls $\Lambda_v = \Lambda$) wäre $\Lambda(v)$ ein ganzes echtes Obergitter von Λ und damit würde die Nachbarbildung bezüglich des Nachbarvektors v fehlschlagen.

Ausnahmsweise ist für den Fall, daß Λ das Barnes–Wall–Gitter ist, die Konstruktion eines 2–Nachbarn auch möglich, obwohl seine Determinante gerade ist und damit die oben erwähnte Voraussetzung nicht erfüllt ist, denn für viele Vektoren $v \in \Lambda$ ist $\Lambda_v \neq \Lambda$. Die Vorgehensweise für solche Gitter wird in [9, Abschnitt 2.6] dargestellt.

Proposition 2.73 *Die Nachbarvektoren, die in der gleichen Bahn unter der Automorphismengruppe von Λ liegen, erzeugen isomorphe Nachbargitter.*

Beweis. Für jedes $f \in \text{Aut}(\Lambda)$ und für jedes $v \in \Lambda$, $v \notin p\Lambda$ mit $(v, v) \in p\mathbb{Z}$ ist $\Lambda(f(v)) = f(\Lambda(v))$, was sich aus der folgenden Argumentenkette ergibt: $x \in \Lambda_{f(v)} \Leftrightarrow (x, f(v)) \in p\mathbb{Z} \Leftrightarrow (f^{-1}(x), v) \in p\mathbb{Z} \Leftrightarrow f^{-1}(x) \in \Lambda_v \Leftrightarrow x \in f(\Lambda_v)$. \square

Die folgende Aussage läßt sich mühelos verifizieren:

Proposition 2.74 *Die Nachbarvektoren, die in der gleichen Nebenklasse von $\Lambda/p\Lambda$ liegen, erzeugen gleiche Nachbargitter.*

Im folgenden arbeiten wir am besten mit einer Fallunterscheidung:

Satz 2.75 *Im Falle $p = 2$ gilt für ein gerades Gitter Λ mit ungerader Determinante: Für jeden Vektor $v \in \Lambda$, $v \notin 2\Lambda$, mit $(v, v) \in 4\mathbb{Z}$ existiert ein Basisvektor b (für jede gegebene Basis von Λ) mit $(v, b) \notin 2\mathbb{Z}$, sodaß für $v' := v + 2b$ gilt: $(v', v') \in 8\mathbb{Z}$. Dann ist v' ein Element der Nebenklasse $v + 2\Lambda \in \Lambda/2\Lambda$.*

In allen anderen Fällen (d.h. falls $p \neq 2$) läßt sich analog zeigen (zum Beweis siehe [21]):

Satz 2.76 *Im Falle $p \neq 2$ gilt für ein gerades Gitter Λ mit gerader Determinante: Für jeden Vektor $v \in \Lambda$, $v \notin p\Lambda$, mit $(v, v) \in 2p\mathbb{Z}$ existiert ein Basisvektor b (für jede gegebene Basis von Λ) mit $(v, b) \notin p\mathbb{Z}$ und damit ein $s \in (2 \cdot (v, b) + p\mathbb{Z})^{-1} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, sodaß für $v' := v - s(v, v)b$ gilt: $(v', v') \in 2p^2\mathbb{Z}$. Dann ist v' ein Element der Nebenklasse $v + p\Lambda \in \Lambda/p\Lambda$.*

Die beiden Sätze implizieren, daß wir uns bei der Auswahl von Nachbarvektoren auf diejenige Gittervektoren beschränken können, die in den verschiedenen Nebenklassen modulo $p\Lambda$ liegen.

Folgerung 2.77 *Ein Gitter Λ besitzt für jedes mögliche p bis auf Isomorphie höchstens $(p^d - 1)$ p -Nachbarn.*

Beweis. Es genügt, nur die Vertreter der von Null verschiedenen Nebenklassen von $\Lambda/p\Lambda \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ als Nachbarvektoren zu wählen, um alle Nachbargitter von Λ zu konstruieren. \square

Bemerkung 2.78 *Bei einem geraden Gitter mit gerader Determinante ist die Bildung eines 2-Nachbarn ebenso unabhängig von der Wahl eines Vertreters der Nebenklasse modulo 2Λ , da sich für diesen Fall ein Analogon zur Proposition 2.74 zeigen läßt. Die Existenz eines Basisvektors mit den im Satz 2.75 beschriebenen Eigenschaften ist dabei allerdings nicht gesichert.*

Die vorhergehenden Überlegungen ermöglichen die Konstruktion sämtlicher (bis auf Isomorphie) Nachbargitter eines geraden Gitters mittels eines besonders einfachen und effizienten Verfahrens:

Setze zuerst eine Basis von Λ fest und berechne die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Lambda)$ von Λ bezüglich dieser Basis. Identifiziere $\Lambda/p\Lambda$ mit $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^d$ und berechne darauf die Bahnen der projizierten Automorphismengruppe (d.h. der Matrixgruppe, die durch Projektion der ganzzahligen Einträge der Erzeugenden von $\text{Aut}(\Lambda)$ in kanonischer Weise in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ entsteht). Wähle einen Vertreter aus jeder Bahn, finde ein beliebiges Urbild davon in Λ und konstruiere bezüglich dessen einen geraden Nachbarn, sofern möglich.

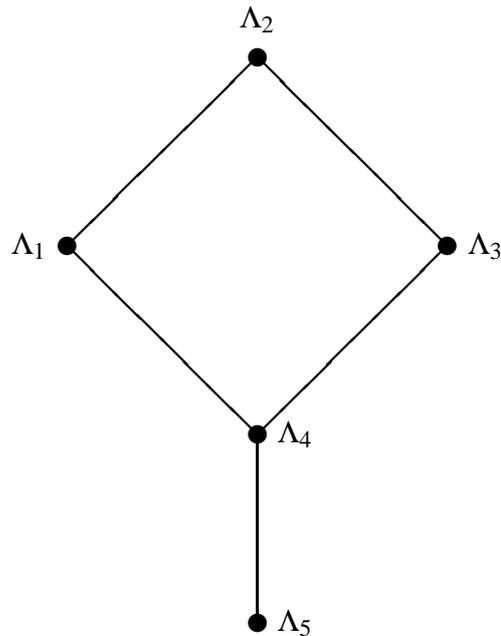
Durch die Nutzung der Automorphismengruppe wird dabei die Rechenzeit deutlich verringert. Allerdings wird in höheren Dimensionen die Automorphismengruppe schnell sehr groß, z. B. beim Barnes–Wall–Gitter. Dann ist sie aus technischen Gründen derzeit noch nicht einsetzbar.

Durch die wiederholte Anwendung dieses Verfahrens auf dabei gewonnene, bis auf Isomorphie neue Gitter können meistens sämtliche Gitter des Geschlechts \mathcal{G} von Λ erhalten werden.

Definition 2.79 Sei $C := \{[\Lambda] \mid \Lambda \in \mathcal{G}\}$ die endliche Menge der sogenannten Ecken und $K := \{([\Lambda_1], [\Lambda_2]) \in C \times C \mid \Lambda_1 \text{ und } \Lambda_2 \text{ sind Nachbarn}\}$ die Menge der sogenannten ungerichteten Kanten.

Der Graph (C, K) heißt der Nachbarschaftsgraph von \mathcal{G} .

Die folgende Zeichnung zeigt den Nachbarschaftsgraphen von \mathcal{E}_5 .



Ist der Graph (C, K) zusammenhängend, was bei allen im Rahmen dieser Arbeit behandelten Gittern der Fall ist, kann er, ausgehend von einem Gitter in \mathcal{G} , mit den Methoden der Graphentheorie (z. B. „Depth-First-Search“) ganz durchlaufen werden, um die vollständige Klassifizierung von \mathcal{G} als Ergebnis zu bekommen.

Beim Sonderfall des Geschlechtes eines geraden Gitters mit gerader Determinante ist anschließend die Verifikation des Ergebnisses auf Korrektheit und Vollständigkeit mit dem Maß dieses Geschlechtes (das die Summe der reziproken Ordnungen der Automorphismengruppen aller Gitter im Geschlecht ist) notwendig. Siehe hierzu [21, Abschnitt 2.8].

Im folgenden geben wir den Algorithmus zur expliziten Berechnung des Operators K_2 an (vgl. [21]), der im Rahmen dieser Arbeit für die überwiegende Anzahl der behandelten Geschlechter eingesetzt wurde. Zudem geben wir den Algorithmus zur Berechnung des Operators K_p für eine ungerade Primzahl p , der im wesentlichen mit dem für K identisch ist, der Hauptunterschied liegt in der inneren **foreach**-Schleife.

In höheren Dimensionen ist es geschickter, die Überprüfung der Isomorphie auf eine andere Art durchzuführen. Dazu wird zuerst eine Tabelle mit genügend Invarianten der Isometrieklassen aufgestellt. Meistens reichen dabei die folgenden aus: Das Minimum und die Kußzahl des Gitters, sowie die Dimension und die Determinante des von den kürzesten, von Null verschiedenen, Gittervektoren aufgespannten Untergitters. Zur Prüfung der Isomorphie werden einfach die Invarianten des konstruierten Gitters mit den Tabellenwerten verglichen.

Eingabe : Ein Geschlecht der geraden Gitter mit ungerader
Determinante der Dimension d .

Ein vollständiges Repräsentantensystem der Isometrieklassen des
Geschlechtes von Λ , in einer fixierten Reihenfolge aufgelistet:
 $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$.

Ausgabe : Matrixdarstellung von K_2 bzgl. der Basis $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$,
nämlich die Matrix $K = (K_{ij}) \in \mathbb{Z}^{h \times h}$ mit
 $K_{ij} = |\{\Pi \text{ ein 2-Nachbar von } \Lambda_i \mid \Pi \cong \Lambda_j\}|$.

$K \leftarrow 0$ //Initialisiere die Matrix K

for $i = 1$ **to** h **do**

$\Lambda \leftarrow \Lambda_i$, mit der fixierten Basis e_1, \dots, e_d (Standardbasis von \mathbb{R}^d)

 //Berechne die Automorphismengruppe bzgl. dieser Basis

$A \leftarrow \text{Aut}(\Lambda)$

 //Berechne die projizierte Automorphismengruppe

$G \leftarrow A$ mit dem Basisring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\mathcal{B} \leftarrow$ Bahnen von G auf $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^d$

foreach B **in** \mathcal{B} **do**

 wähle einen Vertreter von B und finde sein Urbild v in Λ

if $(v, v) \in 4\mathbb{Z}$ **then**

if $(v, v) \notin 8\mathbb{Z}$ **then**

 wähle einen Basisvektor e_k mit $(v, e_k) \notin 2\mathbb{Z}$

$v \leftarrow v + 2e_k$

end

 //Konstruiere den geraden 2-Nachbarn für jede Bahn

$\Pi \leftarrow \Lambda(v)$

for $j = 1$ **to** h **do**

if $\Pi \cong \Lambda_j$ **then**

$K_{ij} \leftarrow K_{ij} + |B|$

break j

end

end

end

end

end

Algorithmus 2.3 : Berechnung von K_2

Eingabe : Ein Geschlecht der geraden Gitter mit gerader Determinante der Dimension d .

Ein vollständiges Repräsentantensystem der Isometrieklassen des Geschlechtes von Λ , in einer fixierten Reihenfolge aufgelistet:

$\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$.

Ausgabe : Matrixdarstellung von K_p bzgl. der Basis $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$, nämlich die Matrix $K = (K_{ij}) \in \mathbb{Z}^{h \times h}$ mit $K_{ij} = |\{\Pi \text{ ein } p\text{-Nachbar von } \Lambda_i \mid \Pi \cong \Lambda_j\}|$.

```

K ← 0 //Initialisiere die Matrix K
for i = 1 to h do
    Λ ← Λi, mit der fixierten Basis e1, ..., ed (Standardbasis von ℝd)
    //Berechne die Automorphismengruppe bzgl. dieser Basis
    A ← Aut(Λ)
    //Berechne die projizierte Automorphismengruppe
    G ← A mit dem Basisring ℤ/pℤ
    ℬ ← Bahnen von G auf (ℤ/pℤ)d
    foreach B in ℬ do
        wähle einen Vertreter von B und finde sein Urbild v in Λ
        if (v, v) ∈ 2pℤ then
            if (v, v) ∉ 2p2ℤ then
                wähle einen Basisvektor ek mit (v, ek) ∉ pℤ
                wähle s ∈ (2 · (v, ek) + pℤ)-1 ∈ ℤ/pℤ
                v ← v - s(v, v)ek
            end
            //Konstruiere den geraden p-Nachbarn für jede Bahn
            Π to Λ(v)
            for j = 1 to h do
                if Π ≅ Λj then
                    Kij ← Kij + |B|
                    break j
                end
            end
        end
    end
end

```

Algorithmus 2.4 : Berechnung von K_p für ungerades p

2.4 Hecke–Operatoren

In diesem Abschnitt stellen wir das Konzept der Hecke–Operatoren, orientiert an [8, Kapitel IV], in einer für die Zwecke dieser Arbeit geeigneten Weise vor. Und zwar geben wir nur die Operation der sogenannten Hecke–Operatoren $T(p)$ und $T_1(p^2)$ auf die Siegelschen Theta–Reihen von geraden Gittern an. Für eine genaue Einführung der Hecke–Operatoren verweisen wir auf [1]. Es sei jedoch erwähnt, daß unter ihnen Modulformen wieder auf Modulformen und Spitzenformen wieder auf Spitzenformen abgebildet werden. Außerdem bilden sie eine kommutative Algebra, die sogenannte Hecke–Algebra.

Auf dem \mathbb{C} –Vektorraum \mathcal{V} , dessen Basis die Menge der Isometrieklassen eines bestimmten Geschlechts ist, definieren wir zwei Familien von linearen Operatoren, die sich aufgrund der Konstruktionsmethode einer Spitzenform nach Borcherds, Freitag und Weissauer sowie aufgrund der Kneserschen Nachbarmethode von selbst anbieten. Darüber hinaus definieren wir, falls das Geschlecht stark modular ist, eine weitere Familie von linearen Operatoren, nämlich die Atkin–Lehner–Involutionen.

Unsere Absicht ist, die Filtrierung auf \mathcal{V} , die durch die Siegelschen Theta–Reihen der Isometrieklassen des Geschlechts gegeben wird, zu untersuchen. Sämtliche eingeführte Operatoren erhalten aber diese Filtrierung und können zudem mit einem vernünftigen Zeitaufwand explizit berechnet werden. Damit ist es für uns vorteilhafter, die Bilder der Filtrierung unter ihnen zu untersuchen.

Definition 2.80 *Ist Λ ein stark N –modulares gerades Gitter im $2m$ –dimensionalen euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^{2m}, (\cdot, \cdot))$, so setze für eine Primzahl p mit $p \nmid N$*

$$H_p([\Lambda]) := \sum_{\substack{E \subset \Lambda/p\Lambda \\ \text{max. total singular}}} [\Lambda_E],$$

falls der quadratische Raum $(\Lambda/p\Lambda, q_p)$ hyperbolisch ist, und $H_p([\Lambda]) := 0$ sonst.

Hierbei ist Λ_E die Perestroika von Λ mithilfe von E und q_p die im vorherigen Abschnitt eingeführte quadratische Form.

Setze ferner

$$K_p([\Lambda]) := \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{G}(\Lambda) \\ p\text{-Nachbar von } \Lambda}} [\Pi],$$

wobei $\mathcal{G}(\Lambda)$ das Geschlecht von Λ ist.

Bemerkung 2.81 *Offensichtlich sind diese Zuordnungen wohldefiniert (d.h. unabhängig vom gewählten Repräsentanten der Isometrieklasse) sowie miteinander vertauschbar.*

Seien die Voraussetzungen aus dem Abschnitt 2.1. „Filtrierung“ gegeben. Mit den dort eingeführten Bezeichnungen sei $\mathcal{V} = \langle [\Lambda_1], \dots, [\Lambda_h] \rangle_{\mathbb{C}}$, wie in der Definition 2.1 vorgestellt.

Aufgrund der obigen Definition führen wir auf \mathcal{V} die Abbildungen H_p und K_p durch lineares Fortsetzen ein.

Wir werden nun etwas allgemeinere symplektische Matrizen benötigen:

Definition 2.82 *Eine ganzzahlige symplektische Ähnlichkeitsmatrix $M \in \mathrm{GL}_{2m}(\mathbb{Z})$ ist durch die folgende Bedingung charakterisiert:*

$$M^{\mathrm{tr}} J_m M = s J_m \quad \text{für ein positives } s \in \mathbb{R},$$

$$\text{wobei } J_m = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ -E_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Sei mit $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{Z})$ die Gruppe solcher Matrizen bezeichnet. Sie operiert auf der Siegel-schen Halbebene \mathbb{H}_m wie üblich durch

$$M\langle Z \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 2.83 *Für die Operation von $\mathrm{GSp}_{2m}(\mathbb{Z})$ auf \mathbb{H}_m gilt: $M\langle Z \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{s}}M\right)\langle Z \rangle$. Allerdings kommen dadurch wegen $\frac{1}{\sqrt{s}}M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ keine neuen Substitutionen $Z \mapsto M\langle Z \rangle$ hinzu.*

Der folgenden Darstellung der Hecke-Operatoren $T(p)$ sowie $T_1(p^2)$ liegt die Abhandlung [27] zugrunde. Darin wird vorausgesetzt, daß m eine gerade natürliche Zahl ist.

Sei N eine natürliche Zahl und $\Gamma_m^{\theta}(N)$ die Gruppe der sogenannten $2m \times 2m$ Modulmatrizen der Stufe N (für die Definition siehe Beispiel 1.91), die wir im folgenden mit Γ bezeichnen.

Eine Primzahl p sei so gewählt, daß $p \nmid N$.

Für die symplektische Ähnlichkeitsmatrix $\text{diag}(1, \dots, 1, p, \dots, p)$ enthält die Doppelnebenklasse $\Gamma \text{diag}(1, \dots, 1, p, \dots, p) \Gamma$ endlich viele Linksnebenklassen, so daß wir schreiben können:

$$\Gamma \text{diag}(1, \dots, 1, p, \dots, p) \Gamma = \bigcup_{\tau=1}^t \Gamma M_{\tau}$$

mit den disjunkten Linksnebenklassen ΓM_{τ} für ein $M_{\tau} \in \text{GSp}_{2m}(\mathbb{Z})$.

Satz 2.84 *Bilden $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Isometrieklassen in \mathcal{G} , so operiert $T(p)$ folgendermaßen auf den Theta-Reihen von $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ vom Grad n :*

$$T(p) \vartheta_{\Lambda_i}^{(n)}(Z) = \sum_{\tau=1}^t \vartheta_{\Lambda_i}^{(n)}|_n M_{\tau}(Z), \quad Z \in \mathbb{H}_n.$$

Hierbei wird die Bezeichnung $(f|_k M)(Z) := f(M(Z)) \det(CZ + D)^{-k}$ verwendet.

In einer ähnlichen Weise operiert der lineare Operator $T_1(p^2)$ (in der Bezeichnung von [27] der Operator $T^{n-1}(p^2)$) auf den Theta-Reihen vom Grad n von $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$, wie folgt:

Hierfür schreibe für die symplektische Ähnlichkeitsmatrix $\text{diag}(1, p, \dots, p, p^2, p, \dots, p)$ die Doppelnebenklasse als

$$\Gamma \text{diag}(1, p, \dots, p, p^2, p, \dots, p) \Gamma = \bigcup_{\kappa=1}^k \Gamma M'_{\kappa}$$

disjunkte Vereinigung der endlich vielen Linksnebenklassen $\Gamma M'_{\kappa}$ für ein $M'_{\kappa} \in \text{GSp}_{2m}(\mathbb{Z})$.

Satz 2.85 *Analog zum vorangehenden Satz gilt:*

$$T_1(p^2) \vartheta_{\Lambda_i}^{(n)}(Z) = \sum_{\kappa=1}^k \vartheta_{\Lambda_i}^{(n)}|_n M'_{\kappa}(Z), \quad Z \in \mathbb{H}_n.$$

In [27] wird gezeigt, daß die Operation von H_p und K_p auf den Theta-Reihen von $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ vom Grad m mit der Operation des $T(p)$, respektive des $T_1(p^2)$, im wesentlichen übereinstimmt.

Um diese Aussage zu erläutern, bezeichnen wir für $i = 1, \dots, h$ eine Basis von \mathbb{A} mit B_i und die Gram-Matrix $\text{Gram}(B_i)$ mit G_i und betrachten für ein $j \in \{1, \dots, h\}$ die Menge der ganzzahligen $2m$ -reihigen Matrizen X mit den Elementarteilern $1, p, \dots, p, p^2$, für die $X^tr G_i X = p^2 G_j$ gilt.

Definition 2.86 Für ein i und j aus $\{1, \dots, h\}$ sei die Menge

$$\mathcal{A}_{ij}(p^2) := \{X \in \mathbb{Z}^{2m \times 2m} \text{ mit den Elementarteilern } 1, p, \dots, p, p^2 \mid X^{tr} G_i X = p^2 G_j\}$$

und $\alpha_{ij}(p^2) := |\mathcal{A}_{ij}(p^2)|$ die Anzahl ihrer Elemente.

Satz 2.87 Es gilt:

$$\alpha_{ij}(p^2) = |\mathcal{N}_{ij}| \cdot |\text{Aut}(\Lambda_j)|,$$

wobei $\mathcal{N}_{ij} := \{\Pi \text{ ein } p\text{-Nachbar von } \Lambda_i \mid \Pi \cong \Lambda_j\}$ die Menge der p -Nachbarn von Λ_i , die zu Λ_j isomorph sind.

Beweis. Nach dem Elementarteiler-Satz existieren für jedes $X \in \mathcal{A}_{ij}(p^2)$ zwei Matrizen W und W' aus $\text{GL}_{2m}(\mathbb{Z})$, so daß $X = W \text{diag}(1, p, \dots, p, p^2) W'$. Damit ist $\frac{1}{p} X \in \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z}) \text{diag}\left(\frac{1}{p}, 1, \dots, 1, p\right) \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z})$ eine Übergangsmatrix von Λ_i zu einem p -Nachbar, der zu Λ_j isomorph ist (vgl. Bemerkung 2.69).

Dieses Nachbargitter ist aber nur bis auf die Multiplikation mit einem Element aus der Automorphismengruppe von Λ_j eindeutig bestimmt. Denn für jedes $g \in \text{Aut}(\Lambda_j)$ erfüllt auch Xg die Voraussetzungen an X und $\frac{1}{p} Xg$ ist eine Übergangsmatrix von Λ_i zum selben Gitter, wie im Falle X .

Umgekehrt, sei Π ein p -Nachbar von Λ_i , der zu Λ_j isomorph ist. Dann gibt es eine Matrix $U \in \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z})$ mit $U^{tr} G U = G_j$, wobei G eine Gram-Matrix von Π ist, sowie eine Übergangsmatrix T von Π zu Λ_i . Dabei ist $T \in \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z}) \text{diag}\left(\frac{1}{p}, 1, \dots, 1, p\right) \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z})$. Dann erfüllt TU^{-1} die Gleichung $X^{tr} G_i X = p^2 G_j$.

Aber es gibt $|\text{Aut}(\Lambda_j)|$ Möglichkeiten für U , so daß die Zuordnung $T \mapsto TU^{-1}$ von \mathcal{N}_{ij} in $\mathcal{A}_{ij}(p^2)$ eine „1 auf $|\text{Aut}(\Lambda_j)|$ “-Zuordnung ist, deren Bild die Ordnung $|\text{Aut}(\Lambda_j)| \cdot |\mathcal{N}_{ij}|$ hat. Und wie wir es oben gesehen haben, kann jedes $X \in \mathcal{A}_{ij}$ auf diese Weise erhalten werden. \square

Korollar 2.88 Aus der offensichtlichen Tatsache, daß

$$K_p(\Lambda_i) = \sum_{j=1}^h |\mathcal{N}_{ij}| \Lambda_j$$

gilt, folgt:

$$K_p(\Lambda_i) = \sum_{j=1}^h \frac{\alpha_{ij}(p^2)}{|\text{Aut}(\Lambda_j)|} \Lambda_j.$$

Proposition 2.89 *Der Operator K_p ist selbstadjungiert bezüglich der hermiteschen Form \mathfrak{h} auf \mathcal{V} (s. Definition 2.2).*

Beweis. Im Beweis des vorherigen Satzes wurde gezeigt, daß die Abbildung $\mathfrak{A}_{ij}(p^2) \rightarrow \mathfrak{A}_{ji}(p^2), X \mapsto p^2 X^{-1}$ bijektiv ist. Daher gilt für die hermitesche Form \mathfrak{h} auf \mathcal{V} :

$$\mathfrak{h}(K_p(\Lambda_i), \Lambda_j) = \alpha_{ij}(p^2) = |\mathfrak{A}_{ij}(p^2)| = |\mathfrak{A}_{ji}(p^2)| = \alpha_{ji}(p^2) = \mathfrak{h}(\Lambda_i, K_p(\Lambda_j)).$$

□

Bemerkung 2.90 *Da dieser Beweis der Selbstadjungiertheit von K_p auch im Falle $p \mid N$ richtig ist, ist K_p bei jeder Wahl von p selbstadjungiert.*

Als nächstes betrachten wir die ganzzahligen $2m$ -reihigen Matrizen X , für die $X^tr G_i X = p G_j$ gilt und gewinnen damit ähnliche Erkenntnisse für \mathfrak{H} .

Definition 2.91 *Für ein i und j aus $\{1, \dots, h\}$ sei die Menge*

$$\mathfrak{A}_{ij}(p) := \{X \in \mathbb{Z}^{2m \times 2m} \mid X^tr G_i X = p G_j\}$$

und $\alpha_{ij}(p) := |\mathfrak{A}_{ij}(p)|$ die Anzahl ihrer Elemente.

Satz 2.92 *Es gilt:*

$$\alpha_{ij}(p) = |\mathcal{P}_{ij}| \cdot |\text{Aut}(\Lambda_j)|,$$

wobei $\mathcal{P}_{ij} := \{\Upsilon \text{ eine Perestroika von } \Lambda_i \mid \Upsilon \cong \Lambda_j\}$ die Menge der Perestroikas von Λ_i ist, die zu Λ_j isomorph sind.

Beweis. Offensichtlich können nur 1 und p als Elementarteiler für jedes $X \in \mathfrak{A}_{ij}(p)$ auftreten. Damit existiert eine Übergangsmatrix aus $\text{GL}_{2m}(\mathbb{Z}) \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{p}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p}}, \sqrt{p}, \dots, \sqrt{p} \right) \text{GL}_{2m}(\mathbb{Z})$ von Λ_i zu einer Perestroika, die zu Λ_j isomorph ist (vgl. Bemerkung 2.53).

Analog zu $\alpha_{ij}(p^2)$ läßt sich zeigen, daß $\alpha_{ij}(p)$ gleich der Anzahl der Perestroikas von Λ_i ist, die zu Λ_j isomorph sind, multipliziert mit der Ordnung der Automorphismengruppe von Λ_j . □

Korollar 2.93 Aus der offensichtlichen Tatsache, daß

$$H_p(\Lambda_i) = \sum_{j=1}^h |\mathcal{P}_{ij}| \Lambda_j$$

gilt, folgt:

$$H_p(\Lambda_i) = \sum_{j=1}^h \frac{\alpha_{ij}(p)}{|\text{Aut}(\Lambda_j)|} \Lambda_j.$$

Der Beweis der Selbstadjungiertheit von H_p verläuft analog zum Beweis der Selbstadjungiertheit von K_p (vgl. Proposition 2.89):

Proposition 2.94 Der Operator H_p ist selbstadjungiert bezüglich der hermiteschen Form \mathfrak{h} auf \mathcal{V} .

Beweis. Im Beweis des vorherigen Satzes wurde gezeigt, daß die Abbildung $\mathcal{A}_{ij}(p) \rightarrow \mathcal{A}_{ji}(p), X \mapsto pX^{-1}$ bijektiv ist. Daher gilt für die hermitesche Form \mathfrak{h} auf \mathcal{V} :

$$\mathfrak{h}(H_p(\Lambda_i), \Lambda_j) = \alpha_{ij}(p) = \alpha_{ji}(p) = \mathfrak{h}(\Lambda_i, H_p(\Lambda_j)).$$

□

In [27] wird in der Proposition 1.9 (vgl. hierzu auch [8, Satz IV.5.10]) und in der Proposition 1.10 gezeigt, daß das Bild der Theta-Reihe $\vartheta_{\Lambda_i}^{(m)}$ unter $T(p)$, bzw. unter $T_1(p^2)$, als eine bestimmte Linearkombination der Theta-Reihen geschrieben werden kann, sodaß es mit dem Bild dieser Theta-Reihe unter H_p , bzw. unter K_p identisch ist, allerdings bis auf einen skalaren Faktor, bzw. bis auf einen Summanden, der ein Vielfaches der Identität ist, und einen skalaren Faktor:

$$T(p)\vartheta_{\Lambda_i}^{(m)} = \sum_{j=1}^h \frac{1}{p^{(m^2-m)/2}\gamma_j} \alpha_{ij}(p) \vartheta_{\Lambda_j}^{(m)},$$

$$T_1(p^2)\vartheta_{\Lambda_i}^{(m)} = \sum_{j=1}^h \frac{1}{p^{m^2}\gamma_j} (p\alpha_{ij}(p^2) + (p^m - 1)|\text{Aut}(\Lambda_j)|\delta_{ij}) \vartheta_{\Lambda_j}^{(m)},$$

mit gewissen natürlichen Zahlen γ_j , auf die hier nicht näher eingegangen wird.

Definition 2.95 Sei

$$\mathcal{H} := \langle H_p, K_q \mid p, q \text{ prim}, p \nmid N \rangle$$

die von den Operatoren H_q und K_p für alle möglichen Primzahlen q und p erzeugte Algebra.

Entscheidend für alles weitere ist das folgende Lemma, das sich leicht verifizieren läßt:

Lemma 2.96 *Die Operatoren H_p und K_q (für alle Primzahlen p, q mit $p \nmid N$) sind miteinander vertauschbar, d.h.*

$$H_p K_q = K_q H_p.$$

Zusammen mit den Propositionen 2.89 und 2.94 ergibt sich hieraus:

Satz 2.97 *Die Algebra \mathcal{H} ist eine kommutative Unter algebra des Vektorraumes $\text{End}^s(\mathcal{V})$ der selbstadjungierten Endomorphismen von \mathcal{V} .*

Korollar 2.98 *Der Vektorraum \mathcal{V} besitzt eine orthogonale Basis, die aus den gemeinsamen Eigenvektoren von \mathcal{H} besteht.*

Bemerkung 2.99 *Diese Eigenvektoren sind explizite Beispiele für die Siegelschen Spitzenformen.*

Bei der praktischen Umsetzung ist es im allgemeinen schneller, K_p (mithilfe der Kneserschen Nachbarmethode) als H_p zu berechnen, da es dabei möglich ist, die Automorphismengruppe zu nutzen. Falls K_p auch noch genau h verschiedene Eigenwerte besitzt, ist es auch ausreichend, nur diesen Operator zu berechnen.

Falls das Geschlecht \mathcal{G} stark N -modular ist, dies bedeutet (vgl. Definition 1.70), daß für jedes $i \in \{1, \dots, h\}$ gilt: ${}^{(t)}\Lambda_i^{\#,t} \in \mathcal{G}$ für alle $t \parallel N$, dann können wir weitere selbstadjungierte Operatoren auf \mathcal{V} einführen, die sogenannten Atkin–Lehner–Involutionen:

Definition 2.100 *Ist das Geschlecht eines Gitters Λ stark N -modular, so sei für jedes $t \parallel N$*

$$W_t([\Lambda]) := [{}^{(t)}\Lambda^{\#,t}].$$

Durch lineares Fortsetzen definieren wir damit die Abbildung W_t auf \mathcal{V} .

Definition 2.101 *Ist \mathcal{G} stark N -modular, so erweitere die Algebra \mathcal{H} zu:*

$$\check{\mathcal{H}} := \langle \mathcal{H}, W_t \mid t \parallel N \rangle.$$

Bemerkung 2.102 *Da alle im Rahmen dieser Arbeit behandelten Geschlechter stark modular sind, sind diese Definitionen für sie sinnvoll.*

Lemma 2.103 Die Operatoren K_q und W_t (für alle Primzahlen q mit $q \nmid N$ und für alle exakten Teiler t von N) sind miteinander vertauschbar, d.h.

$$K_q W_t = W_t K_q.$$

Falls alle Gitter in \mathcal{G} stark N -modular sind (für ein $N \in \mathbb{N}$), d.h. falls $\Lambda \cong {}^{(t)}\Lambda^{\#,t}$ für alle $\Lambda \in \mathcal{G}$ und für alle $t \parallel N$ gilt, sind alle W_t offensichtlich die Identität auf \mathcal{V} und damit ist $\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}$ eine kommutative Algebra.

An dieser Stelle geben wir den Algorithmus zur Berechnung von W_t an, basierend auf der Tatsache, daß jedes Gitter in \mathcal{G} von der Stufe N ist. Denn dann gilt nach der Proposition 1.51: NG^{-1} ist eine gerade Matrix, wobei G eine Gram-Matrix des Gitters ist.

Eingabe : Ein gerades $2m$ -dimensionales Gitter Λ der Stufe N aus einem stark N -modularen Geschlecht. Ein exakter Teiler t von N .

Ein vollständiges Repräsentantensystem der Isometrieklassen des Geschlechtes von Λ , in einer fixierten Reihenfolge aufgelistet:
 $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$.

Ausgabe : Matrixdarstellung von W_t bzgl. der Basis $\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_h\}$, nämlich die Matrix $W = (W_{ij}) \in \mathbb{Z}^{h \times h}$ mit
 $W_{ij} = |\{\mathcal{S} \text{ eine Atkin-Lehner-Involution von } \Lambda_i \mid \mathcal{S} \cong \Lambda_j\}|$.

```

W ← 0 // Initialisiere die Matrix W
t' ← N/t
for i = 1 to h do
    Λ ← Λi
    G ← Gram-Matrix von Λ
    I ← ⟨tNG-1, t'E2m⟩
    ℳ ← zur Gram-Matrix  $\frac{1}{N}I$  gehöriges Gitter
    for j = 1 to h do
        if ℳ ≅ Λj then
            Wij ← Wij + 1
            break j
        end
    end
end
end

```

Algorithmus 2.5 : Berechnung von W_t

Unter der linearen Abbildung „Bildung der Siegelschen Theta-Reihe“ werden die Operationen auf \mathcal{V} aller vorher definierten Operatoren eben auf entsprechende Operationen auf dem Raum der Modulformen abgebildet.

Im folgenden bezeichnen wir mit $\{d_1, \dots, d_h\}$ die Menge der (paarweise verschiedenen) gemeinsamen Eigenvektoren von \mathcal{H} , wobei h die Klassenzahl des Geschlechts \mathcal{G} ist.

Definition 2.104 Für jedes $i \in \{1, \dots, h\}$ sei

$$v(i) := \max \{k \mid d_i \in \mathcal{V}_k\} \in \{-1, \dots, 2m-1\}$$

und ferner

$$w(i) := \min \{k \mid d_i \in \mathcal{W}_k\} \in \{0, \dots, 2m\}.$$

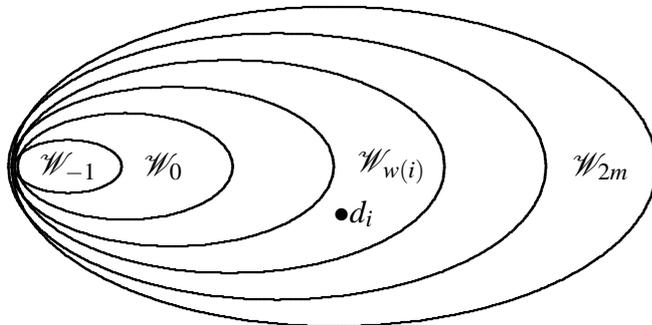
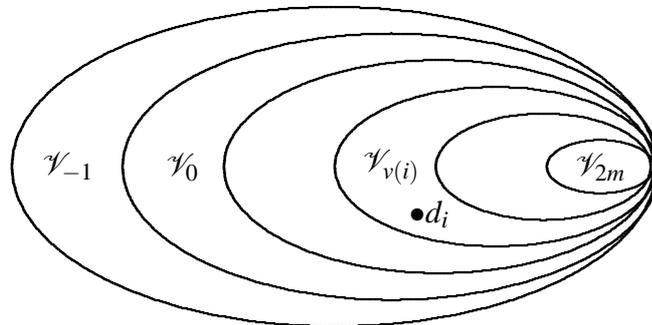
Bemerkung 2.105 Die obige Definition bedeutet:

$$d_i \in \mathcal{V}_{v(i)} \text{ und } d_i \notin \mathcal{V}_{v(i)+1},$$

respektive

$$d_i \in \mathcal{W}_{w(i)} \text{ und } d_i \notin \mathcal{W}_{w(i)-1}.$$

Der Teilraum $\mathcal{V}_{v(i)}$ ist also der kleinste Teilraum in der absteigenden Filtrierung von \mathcal{V} , in dem d_i liegt. Der Teilraum $\mathcal{W}_{w(i)}$ ist ebenfalls der kleinste Teilraum in der aufsteigenden Filtrierung von \mathcal{V} , in dem d_i liegt. Die beiden folgenden Zeichnungen sollen dies illustrieren:



Also gilt: $\mathcal{V}_k = \langle d_i \mid 1 \leq i \leq h, v(i) \geq k \rangle$ und $\mathcal{W}_k = \langle d_i \mid 1 \leq i \leq h, w(i) \leq k \rangle$.

Definition 2.106 Für ein $k \in \{-1, 0, \dots, 2m-1\}$ sei

$$\mathcal{D}_k := \langle d_i \mid 1 \leq i \leq h, v(i) = k \rangle.$$

Damit erhalten wir sofort eine Zerlegung des Raumes \mathcal{V} :

Proposition 2.107 Es gilt:

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{v=-1}^{2m-1} \mathcal{D}_v.$$

Definition 2.108 Liegt der Eigenvektor d_i in \mathcal{D}_k , so wird der Index k die Ordnung von d_i genannt.

Bei den späteren Anwendungen werden wir den folgenden wichtigen Satz über den Zusammenhang zwischen $v(i)$ und $w(i)$ brauchen:

Satz 2.109 Erzeugt d_i den zugehörigen Eigenraum von \mathcal{H} für jedes $i \in \{1, \dots, h\}$, d.h. sind alle Eigenräume eindimensional, so ist $w(i) = v(i) + 1$ für jedes $i \in \{1, \dots, h\}$.

Beweis. Wegen $d_i \notin \mathcal{W}_{w(i)-1}$ wird $\mathcal{W}_{w(i)-1}$ von denjenigen Eigenvektoren erzeugt, die alle orthogonal zu d_i sind, und daher $d_i \in \mathcal{W}_{w(i)-1}^\perp = \mathcal{W}_{w(i)-1}$. Weiter gilt $d_i \notin \mathcal{W}_{w(i)}$, weil sonst wäre $\langle d, d_i \rangle = 0$ (wegen der Annahme $d_i \in \mathcal{W}_{w(i)} = \mathcal{W}_{w(i)}^\perp$), was ein Widerspruch ist. Damit ist $v(i) = w(i) - 1$ bewiesen. \square

Sind alle Eigenräume von \mathcal{H} eindimensional, so erhalten wir außerdem:

Jede halbeinfache Algebra \mathcal{A} mit $\mathcal{H} \leq \mathcal{A} \leq \text{End}(\mathcal{V})$, unter der die Filtrierung von \mathcal{V} invariant ist, erhält die Zerlegung von \mathcal{V} in der Proposition 2.107.

Im folgenden geben wir an, wie das Produkt $d_i \circ d_j$ berechnet wird.

Satz 2.110 Sei für $i \in \{1, \dots, h\}$ der Eigenvektor $d_i = \sum_{k=1}^h a_{i,k} [\Lambda_k]$ gegeben. Schreiben wir das Produkt $d_i \circ d_j$ als die Linearkombination

$$d_i \circ d_j = \sum_{l=1}^h c_{j,l}^{(i)} d_l,$$

so gilt:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h,1} & \dots & a_{h,h} \end{pmatrix}^{tr} \cdot \begin{pmatrix} c_{j,1}^{(i)} \\ \vdots \\ c_{j,h}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i,1} a_{j,1} |\text{Aut}(\Lambda_1)| \\ \vdots \\ a_{i,h} a_{j,h} |\text{Aut}(\Lambda_h)| \end{pmatrix}.$$

Korollar 2.111 Die obigen Koeffizienten $c_{j,l}^{(i)}$ lassen sich durch Lösen des folgenden linearen Gleichungssystems berechnen:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,h} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{h,1} & \dots & a_{h,h} \end{pmatrix}^{tr} \cdot x = \begin{pmatrix} a_{i,1} a_{j,1} |\text{Aut}(\Lambda_1)| \\ \vdots \\ a_{i,h} a_{j,h} |\text{Aut}(\Lambda_h)| \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem ist offenbar eindeutig lösbar.

Kapitel 3

Ergebnisse

Sämtliche für diese Arbeit notwendigen Berechnungen wurden mit der Software MAGMA [13] (Version 2.11–2) durchgeführt.

3.1 Vorgehensweise

In diesem Abschnitt beschreiben wir zunächst das Vorgehen, das auf alle behandelten Geschlechter angewandt werden kann. Danach geben wir einige Möglichkeiten der praktischen Umsetzung und stellen anschließend die damit erzielten Ergebnisse für die zehn leechartigen, extremalen, stark modularen, geraden Gitter vor.

3.1.1 Allgemein angewandte Verfahren

Für ein $N \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ sei mit \mathcal{E}_N wieder ein extremales stark N -modulares gerades Gitter der Dimension $2m_N$ bezeichnet, wobei $m_N = 12c(N)/\sigma(N)$.

Seien $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_h$ die Repräsentanten der Isometrieklassen im Geschlecht von \mathcal{E}_N , wobei $\Lambda_1 := \mathcal{E}_N$.

In allen zehn behandelten Fällen der Geschlechter ergaben die expliziten Berechnungen der Operatoren K_2 und K_3 , daß $\mathcal{H} = \langle K_2, K_3 \rangle \cong \mathbb{C}^h$, wobei h die Klassenzahl des Geschlechtes ist.

Daher ist \mathcal{H} eine maximale kommutative Unter algebra von \mathcal{V} . Hieraus folgt, daß die gemeinsamen Eigenräume alle eindimensional sind und damit nach Satz 2.109

$v(i) = w(i) - 1$ für jedes $i \in \{1, \dots, h\}$.

Eine orthogonale Basis $\{d_1, \dots, d_h\}$ von \mathcal{V} , die aus den Eigenvektoren von \mathcal{H} besteht, ist somit relativ einfach zu berechnen.

Die nachfolgend beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung der Ordnungen von d_1, \dots, d_h wurde zum ersten Mal in [16] für $N = 1$ angewandt.

Für $n = 0, 1, \dots, 2m$ berechnen wir die Fourier-Koeffizienten der Siegelschen Theta-Reihen $\vartheta_{\Lambda_1}^{(n)}, \dots, \vartheta_{\Lambda_h}^{(n)}$ für einige mögliche Matrizen und berechnen damit die Fourier-Koeffizienten von $\Theta^{(n)}(d_1), \dots, \Theta^{(n)}(d_h)$ für diese Matrizen. Ist dabei ein Fourier-Koeffizient ungleich Null, so erhalten wir eine obere Schranke für $v(i)$ und auch für $w(i) = v(i) + 1$. Wir können damit sogar eine Vermutung für den genauen Wert von $v(i)$ aufstellen.

Proposition 3.1 *Ist $\Theta^{(n)}(d_i) \neq 0$, so ist $\Theta^{(l)}(d_i) \neq 0$ für alle $n \leq l \leq 2m$.*

Beweis. Die Tatsache $\Theta^{(n)}(d_i) \neq 0$ bedeutet, daß mindestens ein Fourier-Koeffizient ungleich Null ist, etwa $a_{d_i}(T)$ für eine positiv semidefinite symmetrische gerade $n \times n$ Matrix T . Also existiert ein n -Tupel $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda^n$ mit $G(\lambda) = T$. Erweitern wir ihn auf $\lambda' := (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{l-n}) \in \Lambda^l$, so ist $G(\lambda')$ eine positiv semidefinite symmetrische gerade $l \times l$ Matrix, für die der Fourier-Koeffizient von $\Theta^{(l)}(d_i)$ offenbar ungleich Null ist. Also ist $\Theta^{(l)}(d_i) \neq 0$ für alle $n \leq l \leq 2m$. \square

Bemerkung 3.2 *Die vorherige Proposition kann zur Verifikation der Ergebnisse benutzt werden.*

Wenn in jedem Schritt mindestens ein weiteres $\Theta^{(n)}(d_i)$ ungleich Null wird, ist dies vorteilhaft, da die Rechenzeit mit dem Grad n ansteigt. Sobald alle $\Theta^{(n)}(d_1), \dots, \Theta^{(n)}(d_h)$ für ein n ungleich Null sind, kann die Berechnung abgebrochen werden.

Dabei stellt sich heraus:

Proposition 3.3 *Es gilt: $\dim \mathcal{V}_{m_N-1} \leq 1$ und $\dim \mathcal{V}_{m_N} = 0$. Insbesondere ist die Abbildung $\Theta^{(m_N)}$ injektiv.*

Dies führt auf den folgenden Satz:

Satz 3.4 Die Filtrierung von \mathcal{V} ist durch:

$$\mathcal{V} =: \mathcal{V}_{-1} \supseteq \mathcal{V}_0 \supseteq \mathcal{V}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathcal{V}_{m_N} = \{0\}$$

gegeben.

In der praktischen Ausführung können wir durch geschicktes Festlegen von zwei Eigenvektoren ihre Ordnungen wie folgt sofort bestimmen:

Satz 3.5 Wähle als d_1 die Linearkombination $\sum_{i=1}^h |\text{Aut}(\Lambda_i)|^{-1} [\Lambda_i]$. Dann ist $v(1) = -1$. Insbesondere gilt: $\mathcal{W}_0 = \langle d_1 \rangle$.

Beweis. Die Summe $\sum_{i=1}^h |\text{Aut}(\Lambda_i)|^{-1} [\Lambda_i]$ ist das multiplikative Einselement ϵ auf \mathcal{V} . Damit ist $d_1 \notin \mathcal{V}_0$ und folglich $v(1) = -1$.

Aufgrund der Proposition 2.15 ist die Dimension von $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0^\perp$ gleich 1 und wegen $w(1) = 0$ gilt: $\mathcal{W}_0 = \langle d_1 \rangle$. \square

Lemma 3.6 Es gilt: $\dim \mathcal{V}_1 = 2m - 2$.

Beweis. Nach Lemma 1.119 ist $\dim \mathcal{M}_m^{(1)}(\Gamma(N), \chi_m(N)) = 2$, wobei die Gruppe $\Gamma(N)$ und der Charakter $\chi_m(N)$ wie dort definiert sind. Da $\text{Bild}(\Theta^{(1)}) \subseteq \mathcal{M}_m^{(1)}(\Gamma(N), \chi_m(N))$ und sich stets zwei Eigenvektoren finden lassen, sodaß ihre Bilder unter $\Theta^{(1)}$ linear unabhängig sind, ist $\text{Bild}(\Theta^{(1)}) = \mathcal{M}_m^{(1)}(\Gamma(N), \chi_m(N))$. Insbesondere ist $\dim \text{Bild}(\Theta^{(1)}) = 2$. Wegen $\mathcal{V}_1 = \text{Kern} \Theta^{(1)}$ folgt hieraus die Behauptung. \square

Satz 3.7 Wähle als d_2 einen Eigenvektor aus \mathcal{W}_1 , der nicht in \mathcal{W}_0 liegt. Dann ist $v(2) = 0$. Insbesondere gilt: $\mathcal{W}_1 = \langle d_1, d_2 \rangle$.

Beweis. Aufgrund des vorangehenden Lemmas ist $\dim \mathcal{W}_1 = 2$, da \mathcal{W}_n der Orthogonalraum von \mathcal{V}_n ist. Also wird \mathcal{W}_1 von d_1 und einem anderen Eigenvektor erzeugt, den wir als d_2 wählen. Dann ist $d_2 \in \mathcal{W}_1$, aber $d_2 \notin \mathcal{W}_0$ nach Satz 3.5. Folglich ist $w(2) = 1$ und damit $v(2) = 0$. \square

Im obigen Beweis wurde auch gezeigt:

Korollar 3.8 Für alle $i > 2$ gilt: $w(i) \geq 2$ und damit $v(i) \geq 1$.

Im folgenden sei $N \neq 7$, der Fall $N = 7$ wird ausführlich später im entsprechenden Abschnitt behandelt.

Sei p die kleinste Primzahl mit $p \nmid N$. Durch Berechnen eines von Null verschiedenen Fourier-Koeffizienten von $\text{BFW}^{(m_N)}(\mathcal{E}_N, p)$ erhalten wir:

Lemma 3.9 Die Spitzenform $\text{BFW}^{(m_N)}(\mathcal{E}_N, p)$ ist ungleich Null.

Satz 3.10 Wähle als d_h die Linearkombination $\text{Per}(\mathcal{E}_N, p)$, nämlich:

$$d_h := \sum_{\substack{E \subset \Lambda/p\Lambda \\ \text{max. total singular}}} \varepsilon(E)[\Lambda_E].$$

Dann ist $v(h) = m_N - 1$. Insbesondere ist $\mathcal{V}_{m_N-1} = \langle d_h \rangle$.

Beweis. Aufgrund der Bemerkung 2.59 und des Satzes 2.60 ist $\Theta^{(k)}(\text{Per}(\mathcal{E}_N, p)) = 0$ für alle $1 \leq k < m_N$. Das vorangehende Lemma ergibt zudem: $\Theta^{(m_N)}(\text{Per}(\mathcal{E}_N, p)) \neq 0$. Daher ist $v(h) = m_N - 1$.

Weiter ist nach Proposition 3.3 $\dim \mathcal{V}_{m_N-1} \leq 1$. Wegen $\text{Per}(\mathcal{E}_N, p) \in \mathcal{V}_{m_N-1}$ ist $\mathcal{V}_{m_N-1} = \langle \text{Per}(\mathcal{E}_N, p) \rangle$. \square

Bezeichne für $i = 1, \dots, h$ mit $ev_p(i)$ den zu d_i gehörenden Eigenwert des Operators K_p .

Bemerkung 3.11 Für den oben definierten Eigenvektor d_h gilt: Der Eigenwert $ev_2(h)$ ist stets der kleinste Eigenwert des Operators K_2 . Zudem gilt die Identität:

$$ev_2(h) = -\frac{1}{2} \varkappa(\mathcal{E}_N),$$

wobei $\varkappa(\mathcal{E}_N)$ die Kußzahl von \mathcal{E}_N ist.

Die erste Inklusionsregel für die Räume $\mathcal{W}_{w(i)}$ und $\mathcal{W}_{w(j)}$ (vgl. Satz 2.20) impliziert, daß das Produkt $d_i \circ d_j$ in $\mathcal{W}_{w(i)+w(j)}$ enthalten ist. Berechnen wir dieses Produkt als Linearkombination von d_1, \dots, d_h (s. Satz 2.110), so erhalten wir, falls der Koeffizient von d_h ungleich Null ist, eine untere Schranke für die Summe $w(i) + w(j)$.

Dies liefert gute untere Schranken für $w(3), \dots, w(h-1)$ und ermöglicht sogar, für eine überwiegende Anzahl ihren genauen Wert zu bestimmen.

Das Geschlecht von \mathcal{E}_5 ist beispielhaft für diese Vorgehensweise, da in diesem Fall ohne größere Komplikationen genaue Werte von $v(i)$ für alle $i = 1, \dots, h$ bestimmt werden können.

3.1.2 Praktische Umsetzung der Berechnung der Fourier-Koeffizienten

Aufgrund des Korollars 1.110 können wir uns bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten auf die Isometrieklassen der positiv (semi-)definiten Matrizen beschränken. Dafür wählen wir geschickterweise positiv definite Matrizen aus dem Minkowskischen Fundamentalbereich. Allerdings ist dies für $n \geq 4$ nicht realisierbar, da der Minkowskische Fundamentalbereich in diesen Fällen nicht explizit darstellbar ist. Für solche n können wir symmetrische gerade Matrizen $T = (T_{ij})$ mithilfe anderer Kriterien wählen, nämlich

1. $T_{ii} > 0$ und gerade (wegen $T_{ii} = (\lambda_i, \lambda_i)$) und nach oben beschränkt, z. B. $T_{ii} \leq 4$;
2. $|T_{ij}| \leq T_{ii} \cdot T_{jj}$ (wegen Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $T_{ij} = (\lambda_i, \lambda_j)$).

Eine Möglichkeit, die Auswahl weiter einzuschränken, besteht darin, Matrizen der folgenden Form zu betrachten:

$$T := \left(\begin{array}{c|c} 4 & * \\ \hline * & T_0 \end{array} \right) \in \mathbb{Z}_{sym}^{n \times n}.$$

Hierbei bedeutet „*“ eine $1 \times n$ (bzw. $n \times 1$) Blockmatrix, sodaß ihre Elemente nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (vgl. oben) betragsmäßig durch $4 \cdot 2 = 8$ nach oben beschränkt sind. Weiter ist T_0 eine Gram-Matrix eines Wurzelgitters der Dimension $n - 1$. Zur Bestimmung dieser (endlich vielen) Wurzelgitter benutzen wir [7, Theorem 1.2]. Beispielsweise ist für $n = 6$ die Matrix T_0 eine Gram-Matrix der folgenden neun Gitter der Dimension 5:

$$A_1 \oplus A_4, A_1 \oplus D_4, A_1 \oplus A_1 \oplus A_3, A_1 \oplus A_2 \oplus A_2, \bigoplus_{i=1}^3 A_1 \oplus A_2, \bigoplus_{i=1}^5 A_1, A_2 \oplus A_3, A_5, D_5.$$

Um die Rechenzeit zu verkürzen, benutzen wir, besonders in höheren Dimensionen, die Automorphismengruppen der Gitter. Dazu bezeichne für $l \in 2\mathbb{N}$

$$\Lambda_l := \{x \in \Lambda \mid (x, x) = l\}$$

die Menge der Gittervektoren in Λ mit der Länge l . Bei der Operation von $\text{Aut}(\Lambda)$ auf Λ bleibt Λ_l fest. Sei (da $T_{11} = 4$ gesetzt wird) $\Lambda_4 = B_1 \dot{\cup} B_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_r$ die Partition von Λ_4 unter $\text{Aut}(\Lambda)$ mit dem Vertretersystem $\{v_1, \dots, v_r\}$. Dann gilt:

$$a_\Lambda(T) = \sum_{k=1}^r |\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{v_k\} \times \Lambda^{n-1} \mid ((\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,n} = T\}| \cdot |B_k|.$$

Die Ersparnis an Rechenschritten bei diesem Verfahren ist $\frac{\Lambda_4}{r}$.

Für eine weitere Verkürzung der Rechenzeit können wir den Stabilisator von v_k in $\text{Aut}(\Lambda)$ benutzen. Sei dafür $\mathfrak{S}_k := \text{Stab}_{\text{Aut}(\Lambda)} v_k$ für $k = 1, \dots, r$. Dann können wir für jedes k schreiben (da $T_{22} = 2$ wegen der Verwendung der Wurzelgitter): $\Lambda_2 = y_{1,k} S_k \dot{\cup} y_{2,k} S_k \dot{\cup} \dots \dot{\cup} y_{s,k} S_k$. Daher gilt für den Summanden in der obigen Summe:

$$\begin{aligned} & |\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{v_k\} \times \Lambda^{n-1} \mid ((\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,n} = T\}| \cdot |B_k| = \\ & = |B_k| \cdot \left(\sum_{q=1}^s |\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \{v_k\} \times \{y_{q,k}\} \times \Lambda^{n-2} \mid ((\lambda_i, \lambda_j))_{i,j=1,\dots,n} = T\}| \cdot |y_{q,k} S_k| \right). \end{aligned}$$

Darüberhinausgehendes Rechnen mit dem Stabilisator von v_k und y_q in der Automorphismengruppe lohnt sich im allgemeinen vom Rechenaufwand her nicht, da die Automorphismengruppen sehr schnell wachsen und dabei auch der zur Berechnung der Bahnen und der Stabilisatoren notwendige Aufwand im gleichen Maße wächst.

3.2 Das Geschlecht des Leech–Gitters der Dimension 24

Die Klassenzahl dieses Geschlechtes ist 24.

Die Funktionswerte $v(1), \dots, v(24)$ sind im folgenden Satz angegeben. Für einen Beweis hierzu siehe Arbeit [16].

Satz 3.12 *Für die Funktion v gilt:*

i	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	8390655	-1
2	4192830	0
3	2098332	1
4	1049832	2
5	533160	3
6	519120	3
7	268560	4
8	244800	4
9	145152	5
10	126000	5
11	99792	5
12	91152	5, 6
13	89640	5-7
14	69552	6
15	51552	5-7
16	45792	6
17	35640	7
18	21600	7
19	17280	6-8
20	5040	8
21	-7920	7-9
22	-16128	9
23	-48528	10
24	-98280	11

Korollar 3.13 (\mathcal{E}_1 -Theorem) *Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 4, sind:*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	1	1	2	2	3	3-4	4-6	1-3	1-2	1	1

Dabei vermuten die Autoren der oben erwähnten Arbeit, daß $v(21) = 9$. Bestätigt sich diese Vermutung, dann gelten für die obigen Dimensionen die folgenden genauen Werte:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	1	1	2	2	3	3	4	2	2	1	1

3.3 Das Geschlecht des Barnes–Wall–Gitters der Dimension 16

Dieses Geschlecht ist in [22] vollständig klassifiziert. Seine Klassenzahl ist 24.

Durch Berechnungen von K_2 und K_3 erhalten wir:

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2, K_3 \rangle \cong \mathbb{Q}^{13} \oplus F_1 \oplus F_2 \oplus F_3,$$

wobei die Körper $F_i \cong \mathbb{Q}[x]/(f_i(x))$ durch

$$f_1 = x^3 - 11496x^2 + 41722560x - 47249837568$$

$$f_2 = x^3 - 1704x^2 + 400320x + 173836800$$

$$f_3 = x^5 - 11544x^4 + 42868800x^3 - 53956108800x^2 + 1813238784000x + 20094119608320000$$

gegeben sind.

Satz 3.14 *Es gilt: $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2, K_3, W_2 \rangle$*

Beweis. Nach Lemma 2.96 und Lemma 2.103 liegen alle H_p , K_q und W_t aus $\check{\mathcal{H}}$ im Zentralisator von $\langle K_2, K_3, W_2 \rangle$ in $\text{End}(\mathcal{V})$. Aus Dimensionsgründen folgt damit die Behauptung. \square

Seien α_i , bzw. β_i , für $i = 1, 2, 3$ die (verschiedenen) komplexen Wurzeln des Polynoms f_1 , bzw. des Polynoms f_2 . Ferner seien γ_j für $j = 1, \dots, 5$ die (verschiedenen) komplexen Wurzeln des Polynoms f_3 .

Bezeichne ε_i (für $i = 1, 2, 3$) die primitiven Idempotenten von $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ mit $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}\varepsilon_i \cong F_i$.

Da das Bild von $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ unter $\Theta^{(n)}$ nur rationale Fourier-Koeffizienten hat, sind die Funktionen v und w konstant auf den Eigenräumen $E_i = \mathcal{V}\varepsilon_i$ ($i = 1, 2, 3$). Daher geben wir ihre Werte in einer Zeile in der Tabelle im folgenden Satz an.

Satz 3.15 *Für die Funktion v gilt:*

i	$ev_2(i)$	$ev_3(i)$	$v(i)$
1	34560	7176640	-1
2	16200	2389440	0
3	8760	792000	1
4	7128	804288	1
E_1	α_j	266688	2
8	2664	90048	3
9	1320	77760	3
E_3	γ_j	100800	3
15	1320	8640	3, 4
E_2	β_j	31680	4
19	1080	-45120	3-5
20	312	4032	3-5
21	-216	8640	5
22	-216	20928	5
23	-936	13248	6
24	-2160	39360	7

Beweis. Berechnen wir das Produkt $d_i \circ d_j$ als Linearkombination von d_1, \dots, d_{24} , so erhalten wir:

$$d_i \circ d_j = C_{ij}d_{24} + \sum_{k=1}^{23} c_{j,k}^{(i)}d_k$$

mit einem Koeffizienten C_{ij} , der ungleich Null für folgende Paare (i, j) ist:

$$(23, 2), (22, 3), (21, 4), (E_1, E_2), (E_3, E_3), (8, 8), (9, 9)$$

Hierbei bedeutet (E_1, E_2) , daß ein Vektor in E_1 und ein Vektor in E_2 existiert, so daß dieser Koeffizient ungleich Null ist. Analoges gilt für (E_3, E_3) .

Die Annahme der Ungleichung $w(i) + w(j) \leq 7$ führt wegen $G_j \neq 0$ zu einem Widerspruch, da $d_k \in \mathscr{W}_7$ für alle $k \leq 23$, aber $d_{24} \notin \mathscr{W}_7$. Damit ist $w(i) + w(j) \geq 8$ für alle obigen Paare (i, j) . Das liefert die Gleichheit für alle Tabellenwerte $v(i)$ und $v(j)$ dieser Paare.

In einer ähnlichen Weise erhalten wir $v(i) \geq 3$ für $i = 15, 19$ und 20 , wegen $G_i \neq 0$ für diese i . □

Wir vermuten, daß $v(19) = 5$ und $v(20) = 5$.

Denn wegen $d_{15} \circ d_2 = \sum_{k=1}^{18} c_{2,k}^{(15)}d_k + C_1d_{19} + C_2d_{20}$ mit $C_1 \neq 0$ und auch $C_2 \neq 0$ bekommen wir $\max(w(19), w(20)) \leq w(15) + 1$.

Korollar 3.16 (\mathcal{E}_2 -Theorem) *Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 4, sind:*

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	2	3	7-10	3-5	2-4	1	1

Wenn die obige Vermutung zutrifft, dann ist $v(15) = 4$ und somit sieht die obige Tabelle folgendermaßen aus:

k	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	2	3	7	4	4	1	1

3.4 Das Geschlecht des Coxeter–Todd–Gitters der Dimension 12

Die Klassifikation dieses Geschlechtes ist in [23] zu finden.

Seine Klassenzahl ist 10. Da alle seine Gitter 3–modular sind, gilt: $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$. Die explizite Berechnung von K_2 ergab: $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2 \rangle \cong \mathbb{Q}^{10}$.

Lemma 3.17 *Durch Berechnen einiger Fourier–Koeffizienten von $\Theta^{(n)}(d_1), \dots, \Theta^{(n)}(d_{10})$ für den Grad $n = 1, \dots, 6$ erhalten wir folgende Tabelle, wobei der Eintrag „*“ ungleich Null bedeutet und der Eintrag „0“ eine Vermutung für $\Theta^{(n)}(d_i)$ ist:*

i	$ev_2(i)$	$\Theta^{(0)}(d_i)$	$\Theta^{(1)}(d_i)$	$\Theta^{(2)}(d_i)$	$\Theta^{(3)}(d_i)$	$\Theta^{(4)}(d_i)$	$\Theta^{(5)}(d_i)$	$\Theta^{(6)}(d_i)$
1	2079	*	*	*	*	*	*	*
2	1026	0	*	*	*	*	*	*
3	594	0	0	*	*	*	*	*
4	432	0	0	*	*	*	*	*
5	288	0	0	0	*	*	*	*
6	234	0	0	0	0	*	*	*
7	126	0	0	0	0	*	*	*
8	–36	0	0	0	0	*	*	*
9	–144	0	0	0	0	0	*	*
10	–378	0	0	0	0	0	0	*

Die Konstruktion der nichtverschwindenden Spitzenform BFW($\mathcal{E}_1, 2$) der Ordnung 6 liefert zusammen mit den Sätzen 3.5, 3.7 und 3.10 sowie dem Korollar 3.8:

Lemma 3.18 *Es gilt:*

$$\mathcal{V}_{-1} = \langle d_1, \dots, d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_0 = \langle d_2, \dots, d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_1 = \langle d_3, \dots, d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_2 \subseteq \langle d_5, \dots, d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_3 \subseteq \langle d_6, \dots, d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_4 \subseteq \langle d_9, d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_5 = \langle d_{10} \rangle$$

$$\mathcal{V}_6 = \{0\}$$

Insbesondere ist $v(1) = -1$, $v(2) = 0$, $v(3) = 1$, $v(4) = 1$, $v(5) \leq 2$, $v(6) \leq 3$, $v(7) \leq 3$, $v(8) \leq 3$, $v(9) \leq 4$ und $v(10) = 5$.

Satz 3.19 Für die Funktion v gilt:

i	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	2079	-1
2	1026	0
3	594	1
4	432	1
5	288	2
6	234	$3 - a$
7	126	3
8	-36	3
9	-144	4
10	-378	5

In der Zeile für $i = 6$ ist $a \in \{0, 1\}$.

Beweis. Aufgrund des vorangehenden Lemmas bleibt nur noch, die Gleichheit in den folgenden Inklusionen zu zeigen: $\mathcal{V}_2 \subseteq \langle d_5, \dots, d_{10} \rangle$, $\mathcal{V}_3 \subseteq \langle d_6, \dots, d_{10} \rangle$ und $\mathcal{V}_4 \subseteq \langle d_9, d_{10} \rangle$.

Dies ist aber gleichbedeutend mit dem Nachweis der Gleichheit in den Ungleichungen für $v(5), \dots, v(9)$, nämlich in $v(5) \leq 2$, $v(6) \leq 3$, $v(7) \leq 3$, $v(8) \leq 3$ und $v(9) \leq 4$.

Dafür berechnen wir das Produkt $d \circ d_j$ bezüglich der Basis $\{d_1, \dots, d_{10}\}$ für die folgenden Paare (i, j) :

$$(2, 9), (3, 7), (4, 8), (5, 5) \text{ und } (6, 6)$$

und erhalten, daß der Koeffizient für d_0 ungleich Null ist.

Nach Satz 2.20 folgt hieraus

1. $d_{10} \in \mathcal{W}_{w(2)+w(9)}$ und folglich $w(10) \leq w(2) + w(9)$. Wegen $w(i) = v(i) + 1$ gilt: $w(9) \leq 5$. Die Annahme von $w(9) < 5$ führt wegen $w(10) = 6$ (nach Satz 3.10) und $w(2) = 1$ (nach Satz 3.7) zu einem Widerspruch. Also ist $w(9) = 5$ und damit $v(9) = 4$.
2. $d_{10} \in \mathcal{W}_{w(3)+w(7)}$ und folglich $w(10) \leq w(3) + w(7)$. Wegen $w(i) = v(i) + 1$ gilt: $w(7) \leq 4$. Die Annahme von $w(7) < 4$ führt wegen $w(10) = 6$ (nach Satz 3.10) und $w(3) = 1$ (nach Korollar 3.8) zu einem Widerspruch. Also ist $w(7) = 4$ und damit $v(7) = 3$.

3. $d_{10} \in \mathcal{W}_{w(4)+w(8)}$ und folglich $w(10) \leq w(4) + w(8)$. Wegen $w(i) = v(i) + 1$ gilt: $w(8) \leq 4$. Die Annahme von $w(7) < 4$ führt wegen $w(10) = 6$ (nach Satz 3.10) und $w(4) = 1$ (nach Korollar 3.8) zu einem Widerspruch. Also ist $w(8) = 4$ und damit $v(8) = 3$.
4. $d_{10} \in \mathcal{W}_{w(5)+w(5)}$ und folglich $w(10) \leq w(5) + w(5)$. Wegen $w(i) = v(i) + 1$ gilt: $w(5) \leq 3$. Die Annahme von $w(5) < 3$ führt wegen $w(10) = 6$ (nach Satz 3.10) zu einem Widerspruch. Also ist $w(5) = 3$ und damit $v(5) = 2$.
5. $d_{10} \in \mathcal{W}_{w(6)+w(6)}$ und folglich $w(10) \leq w(6) + w(6)$. Wegen $w(i) = v(i) + 1$ gilt: $w(6) \leq 4$. Die Annahme von $w(6) < 3$ führt wegen $w(10) = 6$ (nach Satz 3.10) zu einem Widerspruch. Also ist $3 \leq w(6) \leq 4$ und damit $2 \leq v(6) \leq 3$.

□

Korollar 3.20 (\mathcal{E}_3 -Theorem) *Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 6, sind:*

k	-1	0	1	2	3	4	5
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	2	$1+a$	$3-a$	1	1

Hier ist wieder $a \in \{0, 1\}$.

Wir vermuten, daß $a = 0$, konnten es aber nicht mittels der Standardmethode beweisen.

3.5 Das Geschlecht der 5-modularen geraden Gitter der Dimension 8

Die Klassenzahl dieses Geschlechtes ist 5.

Da alle seine Gitter 5-modular sind, gilt: $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$. Durch Berechnungen von K_2 erhalten wir: $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2 \rangle \cong \mathbb{Q}^5$.

Lemma 3.21 *Durch Berechnen einiger Fourier-Koeffizienten von $\Theta^{(n)}(d_1), \dots, \Theta^{(n)}(d_5)$ für den Grad $n = 1, \dots, 4$ erhalten wir folgende Tabelle, wobei der Eintrag „*“ ungleich Null bedeutet und der Eintrag „0“ eine Vermutung für $\Theta^{(n)}(d_i)$ ist:*

i	$ev_2(i)$	$\Theta^{(0)}(d_i)$	$\Theta^{(1)}(d_i)$	$\Theta^{(2)}(d_i)$	$\Theta^{(3)}(d_i)$	$\Theta^{(4)}(d_i)$
1	135	*	*	*	*	*
2	70	0	*	*	*	*
3	42	0	0	*	*	*
4	-8	0	0	0	*	*
5	-60	0	0	0	0	*

Bemerkung 3.22 *In dieser Tabelle ist auffällig, daß in jedem Schritt genau ein weiteres $\Theta^{(n)}(d_i)$ ungleich Null wird. Dies erleichtert den Beweis der Vermutungen für $v(i)$ wesentlich.*

Die Konstruktion der nichtverschwindenden Spitzenform $\text{BFW}(\mathcal{E}_5, 2)$ der Ordnung 4 liefert zusammen mit den Sätzen 3.5, 3.7 und 3.10 sowie dem Korollar 3.8:

Lemma 3.23 *Es gilt:*

$$\mathcal{V}_{-1} = \langle d_1, \dots, d_5 \rangle$$

$$\mathcal{V}_0 = \langle d_2, \dots, d_5 \rangle$$

$$\mathcal{V}_1 = \langle d_3, d_4, d_5 \rangle$$

$$\mathcal{V}_2 \subseteq \langle d_4, d_5 \rangle$$

$$\mathcal{V}_3 = \langle d_5 \rangle$$

$$\mathcal{V}_4 = \{0\}$$

Insbesondere ist $v(1) = -1$, $v(2) = 0$, $v(3) = 1$, $v(4) \leq 2$ und $v(5) = 3$.

Satz 3.24 *Für die Funktion v gilt:*

i	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	135	-1
2	70	0
3	42	1
4	-8	2
5	-60	3

Beweis. Aufgrund des vorangehenden Lemmas bleibt nur noch, die Gleichheit in der Inklusion $\mathcal{V}_2 \subseteq \langle d_4, d_5 \rangle$ zu zeigen, was gleichbedeutend mit dem Nachweis der Gleichheit in der Ungleichung für $v(4)$ ist, nämlich in $v(4) \leq 2$.

Dafür berechnen wir das Produkt $d \circ d_4$ bezüglich der Basis $\{d, \dots, d_5\}$ und erhalten, daß der Koeffizient für d_5 ungleich Null ist. Daher ist nach Satz 2.20 $d_5 \in \mathcal{W}_{w(2)+w(4)}$ und folglich $w(5) \leq w(2) + w(4)$. Wegen $w(i) = v(i) + 1$ gilt: $w(4) \leq 3$. Die Annahme von $w(4) < 3$ führt wegen $w(5) = 4$ (nach Satz 3.10) und $w(2) = 1$ (nach Satz 3.7) zu einem Widerspruch. Also ist $w(4) = 3$ und damit $v(4) = 2$. \square

Korollar 3.25 (\mathcal{E}_5 -Theorem) *Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 4, sind:*

k	-1	0	1	2	3
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	1	1	1

3.6 Das Geschlecht von \mathcal{E}_6 der Dimension 8

Die Klassenzahl des Geschlechtes von \mathcal{E}_6 ist 8.

Durch Berechnungen von K_2 erhalten wir: $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2 \rangle \cong \mathbb{Q}^5 \oplus \mathbb{Q}[x]/(f(x))$, wobei

$$f(x) = x^3 - 66x^2 - 216x + 31104$$

ist.

Da sämtliche Operatoren H_p , K_q und W_t rational auf $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$ sind, operiert daher die \mathbb{Q} -Algebra $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathcal{V}_{\mathbb{Q}}$.

Satz 3.26 *Es gilt: $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2, W_2 \rangle$*

Beweis. Nach Lemma 2.96 und Lemma 2.103 liegen sämtliche H_p , K_q und W_t aus $\check{\mathcal{H}}$ im Zentralisator von $\langle K_2, W_2 \rangle$ in $\text{End}(\mathcal{V})$. Aus Dimensionsgründen folgt damit die Behauptung. \square

Bezeichne mit δ_i (für $i = 1, 2, 3$) die Wurzeln von f .

Satz 3.27 *Für die Funktion v gilt:*

i	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	144	-1
2	54	0
3	18	1
E	δ_j	1
7	-6	2
8	-36	3

Korollar 3.28 (\mathcal{E}_6 -Theorem) *Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 4, sind:*

k	-1	0	1	2	3
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	4	1	1

3.7 Das Geschlecht der 7-modularen Gitter der Dimension 6

Für dieses Geschlecht ist $h = 3$. Da alle seine Gitter 7-modular sind, ist $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$. Zudem ergaben Berechnungen: $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2 \rangle \cong \mathbb{Q}^3$.

Lemma 3.29 *Durch Berechnen einiger Fourier-Koeffizienten von $\Theta^{(n)}$ für $n = 1, 2$ erhalten wir folgende Tabelle, wobei der Eintrag „*“ ungleich Null bedeutet und der Eintrag „0“ eine Vermutung für $\Theta^{(n)}(d_i)$ ist:*

i	$ev_2(i)$	$\Theta^{(0)}(d_i)$	$\Theta^{(1)}(d_i)$	$\Theta^{(2)}(d_i)$
1	35	*	*	*
2	19	0	*	*
3	5	0	0	*

Im Gegensatz zu den anderen Geschlechtern verschwindet $\text{Per}(\mathcal{E}_7, 2)$ und somit auch $\text{BFW}(\mathcal{E}_7, 2)$, aufgrund der Tatsache, daß nicht alle Automorphismen von \mathcal{E}_7 die Determinante 1 haben.

Satz 3.30 *Für die Funktion v gilt:*

i	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	35	-1
2	19	0
3	5	1

Beweis. Diese Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.5, 3.7 und 3.10 sowie des Korollars 3.8. □

Korollar 3.31 (\mathcal{E}_7 -Theorem) *Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 3, sind:*

k	-1	0	1
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	1

3.8 Das Geschlecht der stark N -modularen Gitter der Dimension 4 für $N = 11, 14$ und 15

Für $N = 11, 14, 15$ besteht das Geschlecht von \mathcal{E}_N aus drei Isometrieklassen. Da alle Gitter darin stark N -modular sind, gilt: $\mathcal{H}_\mathbb{Q} = \mathcal{H}_\mathbb{Q}$. Durch Berechnungen von K_2 erhalten wir: $\mathcal{H}_\mathbb{Q} = \langle K_2 \rangle \cong \mathbb{Q}^3$.

Satz 3.32 Für die Funktion v gilt:

	$N = 11$	$N = 14$	$N = 15$	
i	$ev_2(i)$	$ev_2(i)$	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	9	8	9	-1
2	4	2	1	0
3	-6	-4	-3	1

Beweis. Diese Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.5, 3.7 und 3.10 sowie des Korollars 3.8. □

Korollar 3.33 (\mathcal{E}_N -Theorem für $N = 11, 14$ und 15) Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta-Reihen vom Gewicht 2, sind:

k	-1	0	1
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1	1

3.9 Das Geschlecht der 23–modularen Gitter der Dimension 2

In der kleinstmöglichen Dimension 2 besteht das Geschlecht $\mathcal{G}(\mathcal{E}_3)$ nur aus zwei Isometrieklassen.

Es gilt: $\check{\mathcal{H}}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ aus dem Grund, daß alle Gitter im Geschlecht modular sind (vgl. Proposition 1.46). Für die Algebra $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ erhalten wir: $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \langle K_2 \rangle \cong \mathbb{Q}^2$.

Satz 3.34 Die Funktion v und die Eigenwerte ev_2 von K_2 sind in der folgenden Tabelle angegeben:

i	$ev_2(i)$	$v(i)$
1	2	-1
2	-1	0

Beweis. Diese Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Sätze 3.5 und 3.7, da die Werte der Funktion v für $i = 1$ und 2 in dieser Weise festgelegt werden können und es sind alle Funktionswerte in diesem Fall. □

Korollar 3.35 (\mathcal{E}_3 –Theorem) Die Dimensionen der Räume der Spitzenformen, erzeugt von den Siegelschen Theta–Reihen vom Gewicht 1, sind:

k	-1	0
$\dim \mathcal{D}_k$	1	1

Literaturverzeichnis

- [1] A. N. Andrianov: *Quadratic forms and Hecke operators*, Band 286 von *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1987.
- [2] S. Böcherer, R. Schulze-Pillot: Siegel modular forms and theta series attached to quaternion algebras. *Nagoya Math. J.*, **121**: 35–96, 1991.
- [3] R. E. Borcherds, E. Freitag, R. Weissauer: A Siegel cusp form of degree 12 and weight 12. *J. reine und angew. Mathematik*, **494**: 141–153, 1998.
- [4] H. Cohn, A. Kumar: Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices. *arXiv:math.MG/0403263*, 2004. Elektronisch erhältlich unter <http://front.math.ucdavis.edu/math.MG/0403263>
- [5] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson: *ATLAS of Finite Groups – Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*. Oxford University Press, 1985.
- [6] J. H. Conway, N. J. A. Sloane: *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Band 290 von *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1998.
- [7] W. Ebeling: *Lattices and Codes*. Zweite, überarbeitete Auflage. Vieweg-Verlag, 2002.
- [8] E. Freitag: *Siegelsche Modulformen*, Band 254 von *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1983.
- [9] B. Hemkemeier: *Algorithmische Konstruktionen von Gittern*. PhD Dissertation, Universität Dortmund, 2003.
- [10] M. Kneser: *Quadratische Formen*. Neu bearbeitet und herausgegeben in Zusammenarbeit mit R. Scharlau. Springer-Verlag, 2002.
- [11] M. Koecher, A. Krieg: *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer-Verlag, 1998.

- [12] H. Koch, B. B. Venkov: Über ganzzahlige unimodulare euklidische Gitter. *J. reine und angew. Mathematik*, **398**: 144–168, 1989.
- [13] *The Magma Computational Algebra System for Algebra, Number Theory and Geometry*. Homepage unter <http://magma.maths.usyd.edu.au>
- [14] G. Nebe: Gitter und Modulformen. *Jahresbericht der DMV*, **3**: 125–144, 2002.
- [15] G. Nebe, N. J. A. Sloane: A Catalogue of Lattices. Elektronisch erhältlich unter <http://www.research.att.com/~njas/lattices/modular.html>
- [16] G. Nebe, B. Venkov: On Siegel modular forms of weight 12. *J. reine und angew. Mathematik*, **531**: 49–60, 2001.
- [17] H.–G. Quebbemann: Modular lattices in Euclidean spaces. *J. Number Theory*, **54**: 190–202, 1995.
- [18] H.–G. Quebbemann: Atkin–Lehner eigenforms and strongly modular lattices. *Ensign. Math*, **43**: 55–65, 1997.
- [19] E. M. Rains, N. J. A. Sloane: The shadow theory of modular and unimodular lattices. *J. Number Theory*, **73**: 359–389, 1998.
- [20] W. Scharlau: *Quadratic and Hermitian Forms*. Springer–Verlag, 1985.
- [21] R. Scharlau, B. Hemkemeier: Classification of integral lattices with large class number. *Mathematics of Computation*, **67**: 737–749, 1998.
- [22] R. Scharlau, B. Venkov: The genus of the Barnes-Wall lattice. *Comment. Math. Helv.*, **69**: 322–333, 1994.
- [23] R. Scharlau, B. Venkov: The genus of the Coxeter-Todd lattice. *Preprint 95-07 Dortmund*, 1995. Elektronisch erhältlich unter <http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints>
- [24] R. Scharlau, R. Schulze–Pillot: Extremal lattices. In B. H. Matzat, G. M. Greuel und G. Hiss (Herausgeber), *Algorithmic algebra and number theory*: 139–170, 1999. Elektronisch erhältlich unter <http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints>
- [25] C. L. Siegel: Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. *Nachrichten Akad. Wiss. Göttingen*, **10**: 87–102, 1969.

[26] D. E. Taylor: *The Geometry of the Classical Groups*. Heldermann Verlag, 1992.

[27] H. Yoshida: The Action of Hecke Operators on Theta Series. *Algebraic and Topological Theories*: 197–238, 1985.

Danksagung

An erster Stelle danke ich Frau Prof. Dr. G. Nebe für die Möglichkeit, dieses interessante Thema bearbeiten zu können, wobei ich die moderne wissenschaftliche Arbeitsweise in der Mathematik kennenlernen konnte.

Mein Dank gilt zudem der Abteilung „Reine Mathematik“ für technische Unterstützung und meiner Familie für ihren Beistand und Geduld.

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfaßt habe.

Ulm, den 12. Januar 2005