

# Gitter und Modulformen

Gabriele Nebe, Ulm

## Abstract

Keywords: extremal lattices, theta series, modular forms, spherical designs  
Mathematics Subject Classification: 11H31, 11F11

A main goal in lattice theory is the construction of dense lattices. Most of the remarkable dense lattices in small dimensions have an additional symmetry, they are modular, i.e. similar to their dual lattice. Extremal lattices are densest modular lattices, whose density is as high as the theory of modular forms allows it to be. The theory of theta series with harmonic coefficients allows to classify and to construct extremal lattices as well as to prove that some of them are strongly perfect and hence local maxima of the density function.

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Dichte Gitter</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Modulare Gitter</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Modulformen</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Theta-Reihen</b>	<b>6</b>
<b>6</b>	<b>Extremale Gitter</b>	<b>8</b>
<b>7</b>	<b>Sphärische Designs und stark perfekte Gitter</b>	<b>11</b>
<b>8</b>	<b>Theta-Reihen mit harmonischen Koeffizienten</b>	<b>14</b>
<b>9</b>	<b>Ungerade Gitter und deren Schatten</b>	<b>15</b>

Eingegangen 12.9.2002

Gabriele Nebe, Abteilung Reine Mathematik, Universität Ulm, 89069 Ulm, Germany  
E-Mail: [nebe@mathematik.uni-ulm.de](mailto:nebe@mathematik.uni-ulm.de), URL: [www.mathematik.uni-ulm.de/ReineM/nebe](http://www.mathematik.uni-ulm.de/ReineM/nebe)

# 1 Einleitung

Die Theorie der Gitter hat Beziehungen zu vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik. Die meisten bekannten schönen Gitter haben (in der Regel sogar mehrere) Konstruktionen mit Hilfe von Codes, algebraischen Zahlringen, algebraischer Geometrie oder endlichen Matrixgruppen, um nur einige wichtige Schlagworte zu nennen. Umgekehrt hilft das Konzept eines Gitters in anderen Bereichen der Mathematik, wie z.B. in der algebraischen Topologie oder auch in der algorithmischen Zahlentheorie ([31]). In diesem Artikel möchte ich über einige Anwendungen der Theorie der Modulformen auf die Definition und Konstruktion dichter Gitter berichten, die insbesondere in den letzten 10 Jahren einen neuen Aufschwung in die Gittertheorie gebracht haben. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass viele der berühmtesten Gitter - wie z.B. das Leech Gitter in Dimension 24, das Barnes-Wall Gitter in Dimension 16, das Coxeter-Todd Gitter in Dimension 12 - eine zusätzliche Symmetrie haben, sie sind modular, also ähnlich zu ihrem dualen Gitter. In [29] verallgemeinert Quebbemann den klassischen, mit Hilfe von Modulformen definierten Begriff des extremalen unimodularen Gitters auf gewisse modulare Gitter und legt so den Grundstein für die Entdeckung neuer extremaler modularer Gitter. Dabei liefern Modulformen nicht nur die Definition von Extremalität sondern sind auch ein Hilfsmittel, solche Gitter zu konstruieren oder deren Nichtexistenz zu beweisen.

Ein durch die Anwendung in der Informationsübertragung motiviertes Maß für die Güte eines Gitters ist seine Dichte, also die Dichte der zugehörigen gitterförmigen Kugelpackung. Die sich daraus ergebende Frage, die dichtesten Gitter in jeder Dimension zu konstruieren, ist schon ab Dimension 9 ungelöst. Daher beschränkt man sich beim Suchen dichter Gitter auf gewisse schöne Teilklassen von Gittern, wie z.B. die in Abschnitt 3 eingeführten modularen Gitter. Der Bezug zu Modulformen geschieht über die Theta-Reihe des Gitters, das ist die erzeugende Funktion der Anzahlen von Gittervektoren gegebener Länge. Als holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene betrachtet, hat die Theta-Reihe eines modularen Gitters zusätzliche Invarianzeigenschaften und ist somit eine Modulform zu einer recht großen Modulgruppe. Durch die Kenntnis des endlich dimensionalen Vektorraums dieser Modulformen kann man die Vielfachheit des Wertes 1 bei  $i\infty$  nach oben beschränken. Eine Modulform heißt extremal, wenn diese Vielfachheit maximal wird. Ist diese Modulform die Theta-Reihe eines modularen Gitters, so bedeutet dies, dass das Minimum und damit auch die Dichte dieses Gitters maximal ist unter den entsprechenden modularen Gittern. Dann heißt dieses Gitter extremal. Extremale Gitter sind also dichteste modulare Gitter, für die die Dichte so groß ist, wie es die Theorie der Modulformen erlaubt (siehe Abschnitt 6 für eine genaue Definition).

Extremale Gitter liefern oft gute sphärische Designs. Umgekehrt kann man mit sphärischen Designs lokal dichteste Gitter finden (Abschnitt 7) und mit Hilfe der Theorie der Theta-Reihen mit harmonischen Koeffizienten zum Beispiel zeigen, dass gewisse extremale Gitter lokale Maxima der Dichtefunktion sind (Abschnitt 8). Diese Theorie hilft auch zum Beweis der Nichtexistenz und, weitaus interessanter, bei der Konstruktion und Klassifikation extremaler Gitter [4].

Dieser Artikel geht bewußt nicht zu stark auf die technischen Details ein. Der interessierte Leser sei dazu auf die Originalarbeiten [29], [30] sowie den sehr schönen Übersichtsartikel [34] verwiesen. Über den Zusammenhang mit sphärischen Designs informiert [14] (insbesondere die Ausarbeitung [41]). Neben der Bibel der Gittertheorie [6] ist [7] eine weitere schöne Einführung in die behandelte Thematik. Alle vorkommenden Gitter findet man in der Datenbank [24].

## 2 Dichte Gitter

In dieser Arbeit ist ein Gitter  $L$  immer die Menge aller ganzzahligen Linearkombinationen von Basisvektoren  $(b_1, \dots, b_n)$  des Euklidischen Raums  $(\mathbf{R}^n, (\cdot, \cdot))$ . Ein durch die Anwendung von Gittern in der Informationsübertragung motiviertes Maß für die Güte eines Gitters  $L$  ist die Dichte  $\delta(L)$  der zugehörigen Kugelpackung. Dabei werden gleichgroße  $n$ -dimensionale Kugeln so gepackt, dass die Mittelpunkte der Kugeln gerade die Gitterpunkte sind. Der maximal mögliche gemeinsame Durchmesser der Kugeln ist gleich dem minimalen Abstand verschiedener Gitterpunkte also die Quadratwurzel aus dem Minimum von  $L$ ,

$$\min(L) := \min\{(x, x) \mid 0 \neq x \in L\}.$$

Der Raum, der pro Kugel der Packung benötigt wird, ist die Wurzel aus der Determinante von  $L$

$$\det(L) := \text{vol}(\mathbf{R}^n/L)^2 := \det((b_i, b_j)_{i,j=1}^n).$$

Also ist die Dichte der Kugelpackung

$$\delta(L) = \frac{V_n}{2^n} \sqrt{\frac{\min(L)^n}{\det(L)}},$$

wo  $V_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Einheitssphäre bezeichnet.

Dichte Gitter liefern gute fehlerkorrigierende Codes für analoge Signale: Ein Signal kann man sich als Punkt im  $\mathbf{R}^n$  vorstellen. Über einen (nicht störungsfreien) Kanal kann man solche Signale nicht genau übertragen. Daher läßt man (ähnlich wie in der Codierungstheorie) nur Gitterpunkte als Informationssignale zu. Zum Decodieren des gestörten empfangenen Signals, muß dann der nächstgelegene Gitterpunkt gefunden werden. Um dabei möglichst große Fehler korrigieren zu können, sollen die Gitterpunkte weit auseinanderliegen (d.h. das Gitter soll ein großes Minimum haben). Andererseits will man mit beschränkter Energie möglichst viel Information übertragen (d.h. das Gitter soll eine möglichst kleine Determinante haben). Dabei ist die Wahl des richtigen Gitters wesentlich: So kann man z.B. mit dem Leech Gitter  $\Lambda_{24} \subset \mathbf{R}^{24}$ , dem wahrscheinlich dichtesten 24-dimensionalen Gitter, bei gleicher Energie und Fehlerkorrektur  $2^{24}$  (also mehr als 16 Millionen) mal so viel Information übertragen wie mit dem Standardgitter  $\mathbf{Z}^{24}$ . Im 80-dimensionalen kennt man zwei Gitter ( $L_{80}$  und  $M_{80}$ , siehe Tabelle auf Seite 10), für die die Verbesserung gegenüber dem Standardgitter  $\mathbf{Z}^{80}$  einen Faktor von mehr als  $10^{36}$  ausmacht. Trotzdem ist es i.a. nicht sinnvoll so hochdimensionale Gitter einzusetzen, da man dann die Information nicht mehr (schnell) decodieren kann.

Ein Hauptziel der Gittertheorie ist das Finden dichter Gitter. Dazu gibt es eine über 100 Jahre alte Theorie von Korkine und Zolotareff, die später von Voronoi ([42]) verfeinert wurde: Die Dichtefunktion  $\delta$  hat auf dem Raum der Ähnlichkeitsklassen von  $n$ -dimensionalen Gittern nur endlich viele lokale Maxima, sogenannte extreme Gitter. Die extremen Gitter kann man mit Hilfe der Geometrie ihrer kürzesten Vektoren

$$\text{Min}(L) := \{x \in L \mid (x, x) = \min(L)\}$$

charakterisieren:

**Satz 2.1** ([42])  $L$  ist extrem  $\Leftrightarrow L$  ist perfekt (d.h.  $\langle p_x := x^{tr} x \mid x \in \text{Min}(L) \rangle_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}_{sym}^{n \times n}$ ) und  $L$  ist eutaktisch (d.h.  $I_n = \sum_{x \in \text{Min}(L)} \lambda_x p_x$  mit  $\lambda_x > 0 \forall x$ ).

Wohingegen Eutaxie eine Konvexitätsbedingung ist (die die Bedingung  $\delta''(L) < 0$  ersetzt, da  $\delta$  im allgemeinen nicht differenzierbar ist) ist Perfektion eine lineare Bedingung (stellvertretend für  $\delta'(L) = 0$ ).

Die Voronoische Charakterisierung erlaubt es u.a. zu zeigen, dass extreme Gitter ähnlich sind zu ganzen Gittern, d.h. die Bilinearform  $(\cdot, \cdot)$  nimmt auf  $L$  nur ganze Werte an, oder gleichbedeutend  $L$  liegt in seinem dualen Gitter

$$L^* := \{v \in \mathbf{R}^n \mid (v, x) \in \mathbf{Z} \forall x \in L\}.$$

Es ist also keine Einschränkung, sich bei der Suche nach dichtesten Gittern auf ganze Gitter zu beschränken.

Voronoi gab 1908 einen Algorithmus an, um alle (endlich vielen) Ähnlichkeitsklassen perfekter Gitter der Dimension  $n$  aufzulisten, der bis Dimension 7 praktikabel ist. Die dichtesten Gitter sind bis zur Dimension 8 bekannt, wobei es in Dimension 8 nicht mehr möglich ist, alle extremen Gitter zu bestimmen (man kennt schon mehr als 10 000). Die dichtesten Gitter der Dimension  $\leq 8$  sind sogenannte Wurzelgitter, das sind ganze Gitter, die von Vektoren der Länge 2 erzeugt werden.

**Die dichtesten Gitter in Dimension  $n \leq 8$ :**

n	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\mathbf{Z}$	$A_2$	$A_3$	$D_4$	$D_5$	$E_6$	$E_7$	$E_8$

Die Wurzelgitter sind alle klassifiziert und gut untersucht (siehe z.B. [7, Section 1.4], [6, Chapter 4]). Sie spielen in vielen Gebieten der Mathematik eine wichtige Rolle wie z.B. in der Theorie der Liealgebren und der algebraischen Gruppen. In Dimension 9 ist das dichteste bekannte Gitter, das geschichtete Gitter  $\Lambda_9$  ([6]), dichter als alle Wurzelgitter.

### 3 Modulare Gitter

Der Begriff des modularen Gitters, der in dem hier verwendeten Sinn vor ca. 10 Jahren von H.-G. Quebbemann geprägt wurde, kommt zum einen daher, dass die Theorie der Modulformen hilft, modulare Gitter zu untersuchen, zum anderen, da diese Gitter eine Verallgemeinerung der unimodularen Gitter sind, das sind ganze Gitter der Determinante 1.

**Definition 3.1** *Ein ganzes Gitter  $L$  der Dimension  $2k$  heißt  $N$ -modular oder modular der Stufe  $N$ , falls  $L$  isometrisch zu seinem reskalierten dualen Gitter*

$$L_{(N)} := \sqrt{N}L^*$$

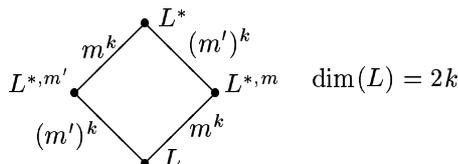
*ist, d.h. es gibt eine orthogonale Abbildung  $\sigma \in O_n(\mathbf{R})$  mit  $\sigma L = L_{(N)}$ . 1-modulare Gitter heißen auch unimodular.*

Viele der dichtesten Gitter in kleinen Dimensionen sind modular: Die Wurzelgitter  $A_2$ ,  $D_4$  und  $E_8$ , welche die dichtesten Gitter in Dimension 2, 4 und 8 sind, sind 3-, 2- bzw. unimodular. Weitere berühmte modulare Gitter sind das 3-modulare Coxeter-Todd Gitter  $K_{12}$  in Dimension 12, das 2-modulare Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  in Dimension 16 und natürlich das bemerkenswerte Leech Gitter  $\Lambda_{24}$ , das einzige gerade unimodulare Gitter der Dimension 24, welches keine Vektoren der Länge 2 besitzt. In all diesen Fällen ist die Stufe  $N$  eine Primzahl (oder 1). Während der Klassifikation der maximal endlichen rationalen

Matrixgruppen ([23], [17], [18]) wurden einige sehr dichte modulare Gitter gefunden, für welche die Stufe eine quadratfreie zusammengesetzte Zahl ist. Ist  $N = mm'$  ein Produkt von 2 teilerfremden Zahlen, so gibt es zwischen dem  $N$ -modularen Gitter  $L$  und seinem dualen Gitter  $L^*$  zwei weitere sogenannte “partielle” duale Gitter

$$L^{*,m} := \frac{1}{m}L \cap L^*$$

und  $L^{*,m'}$ .



**Definition 3.2** Ein  $N$ -modulares Gitter  $L$  heißt stark  $N$ -modular, falls  $L$  isometrisch ist zu allen reskalierten partiellen dualen Gittern

$$L_{(m)} := \sqrt{m}L^{*,m}$$

für alle exakten Teiler  $m$  von  $N$  (d.h.  $\text{ggT}(m, N/m) = 1$ ).

Da es zu schwierig ist, die absolut dichtesten Gitter zu bestimmen, und (zumindest in “kleinen” Dimensionen) viele der dichtesten bekannten Gitter modular sind, ist es ein interessantes Problem, die dichtesten (stark)  $N$ -modularen Gitter zu finden. Da die Determinante eines  $N$ -modularen Gitters  $L$  der Dimension  $2k$  gleich  $\det(L) = N^k$  ist, bedeutet dies, die  $N$ -modularen Gitter mit dem größtmöglichen Minimum zu bestimmen. Dabei hilft die Theorie der Modulformen, dieses Minimum nach oben zu beschränken, so dass man einem einzelnen stark  $N$ -modularen Gitter ansieht, ob es ein dichtestes modulares Gitter ist, ohne alle anderen Gitter zu kennen.

## 4 Modulformen

Die im nächsten Abschnitt definierten Theta-Reihen von Gittern haben gewisse Invarianzeigenschaften unter Variablensubstitutionen, sie sind Modulformen. Da diese Beobachtung grundlegend für diesen Artikel ist, wird kurz auf den Begriff der Modulform eingegangen. Wie man in der Funktionentheorie lernt, ist die Gruppe der biholomorphen Abbildungen auf der oberen Halbebene  $\mathbf{H} := \{z \in \mathbf{C} \mid \Im(z) > 0\}$  die Gruppe der Möbiustransformationen

$$z \mapsto A(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R}).$$

Dies liefert für alle  $k \in \mathbf{Z}$  eine Operation  $|_k$  der  $SL_2(\mathbf{R})$  auf dem Vektorraum der meromorphen Funktionen  $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$  durch

$$f|_k A(z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az + b}{cz + d}\right).$$

**Definition 4.1** Sei  $U$  eine Untergruppe von  $SL_2(\mathbf{R})$ , so dass  $U \cap SL_2(\mathbf{Z})$  in  $U$  und  $SL_2(\mathbf{Z})$  endlichen Index hat, und  $\chi : U \rightarrow \mathbf{C}^*$  ein Charakter. Eine meromorphe Funktion  $f : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{C}$  heißt eine Modulform vom Gewicht  $k$  zum Charakter  $\chi$ ,  $f \in \mathcal{M}_k(U, \chi)$ , falls

$$f|_k A = \chi(A)f \text{ für alle } A \in U$$

gilt und  $f|_k M$  für alle  $M \in SL_2(\mathbf{Z})$  bei  $i\infty$  holomorph ist.  $f$  heißt eine Spitzenform,  $f \in \mathcal{S}_k(U, \chi)$ , falls zusätzlich  $\lim_{t \rightarrow \infty} f|_k M(it) = 0$  für alle  $M \in SL_2(\mathbf{Z})$ .

Da die  $|_k$ -Operation "multiplikativ" ist, d.h.  $(f|_k A)(g|_k A) = (fg)|_{k+l} A$  ist für jede Familie von Charakteren  $\chi_k : U \rightarrow \mathbf{C}^*$ ,  $k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  mit  $\chi_k \chi_l = \chi_{k+l}$  der Raum

$$\mathcal{M}(U, (\chi_k)) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(U, \chi_k)$$

ein graduierter Ring, der Ring der Modulformen von  $U$  (zum Charakter  $(\chi_k)$ ), in welchem die Spitzenformen ein Ideal bilden. Dieser graduierte Ring ist endlich erzeugt. Die Dimensionen der graduierten Komponenten lassen sich mit Hilfe von Spurformeln berechnen (siehe z.B. [16]). Die Modulformen  $f$ , die für ganze Gitter von Bedeutung sind, sind alle invariant unter der Transformation  $z \mapsto z + 2$ . Also haben sie eine Fourier-Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad q = \exp(\pi iz).$$

Kennt man die Dimension von  $\mathcal{M}_k(U, \chi_k)$ , so genügt es für festes  $k$  mit einer festen Genauigkeit (also modulo  $q^a$  für hinreichend großes  $a$ ) zu rechnen. Aus der Potenzreihenentwicklung der Ringerzeuger modulo  $q^a$  erhält man durch Multiplikation dann eine explizite Basis von  $\mathcal{M}_k(U, \chi_k)$ .

## 5 Theta-Reihen

Sei  $L$  ein ganzes Gitter. Die Theta-Reihe  $\theta_L$  von  $L$  ist die erzeugende Funktion der Anzahlen von Vektoren gegebener Länge in  $L$ ,

$$\theta_L(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_L(j) q^j$$

wo  $a_L(j) = |\{x \in L \mid (x, x) = j\}|$  die Anzahl der Vektoren der Länge  $j$  in  $L$  ist und

$$q := \exp(\pi iz).$$

Dann ist  $\theta_L$  eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene. Da  $\exp(2\pi i) = 1$  ist, ist z.B.  $\theta_L(z) = \theta_L(z + 2)$  und sogar  $\theta_L(z) = \theta_L(z + 1)$ , falls  $L$  ein gerades Gitter ist, d.h.  $(x, x) \in 2\mathbf{Z}$  für alle  $x \in L$ . Sei nun  $L$  ein gerades Gitter. Dann ist die Stufe  $N$  von  $L$  die kleinste natürliche Zahl, für die

$$L_{(N)} := \sqrt{N}L^*$$

ein gerades Gitter ist.

**Satz 5.1** *Ist  $L$  ein gerades Gitter der Dimension  $2k$  von Stufe  $N$ , so ist*

$$\theta_L \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(N), \chi_k)$$

*eine Modulform zur Gruppe*

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}) \mid N \text{ teilt } c \right\}$$

*mit dem Charakter  $\chi_k$  definiert durch das Legendre Symbol*

$$\chi_k \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) := \left( \frac{(-1)^k \det(L)}{d} \right) \in \{\pm 1\}.$$

Im Hinblick auf modulare Gitter interessieren gerade Gitter  $L$  der Dimension  $2k$  von Stufe  $N$  der Determinante  $N^k$ . Diese Gitter bilden für Primzahlen  $N$  oder  $N = 1$  ein Geschlecht, d.h. für je zwei solche Gitter  $L$  und  $M$  sind ihre Lokalisierungen  $\mathbf{Z}_p \otimes M \cong \mathbf{Z}_p \otimes L$  für alle Primzahlen  $p$  isometrisch.

Die meisten Standardkonstruktionen für Gitter haben eine Entsprechung auf der Ebene der Theta-Reihen: Mit Hilfe von Poisson Summation erhält man die Theta-Transformationsformel

$$\theta_{L^*}(z) = \left( \frac{z}{i} \right)^{-k} \sqrt{\det(L)} \theta_L \left( -\frac{1}{z} \right) \quad (\text{wo } 2k = \dim(L))$$

welche die Theta-Reihe des dualen Gitters durch  $\theta_L$  ausdrückt.

Ist  $\det(L) = N^k$  so ergibt sich nach Substitution von  $z$  durch  $\sqrt{N}z$  in der Theta-Transformationsformel dass

$$\theta_{L_{(N)}} = \chi_{N,k}(t_N) \theta_L|_k t_N \quad (\text{wo } L_{(N)} = \sqrt{N}L^*)$$

für die Fricke Involution

$$t_N := \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{N}^{-1} \\ -\sqrt{N} & 0 \end{pmatrix} \in N_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})}(\Gamma_0(N))$$

gilt, wobei  $\chi_{N,k}(t_N) := i^k$  gesetzt ist.

Etwas allgemeiner, kann man auch die Theta-Reihe der partiellen dualen Gitter aus  $\theta_L$  berechnen ([30, p. 60]) und findet, dass die Theta-Reihe eines stark  $N$ -modularen Gitters eine Eigenfunktion der Atkin-Lehner Involution  $W_m \in N_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})}(\Gamma_0(N))$  für alle exakten Teiler  $m$  von  $N$  ist.

**Satz 5.2** *Ist  $L$  ein gerades stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ , so ist  $\theta_L$  eine Modulform zur Gruppe*

$$\Gamma_*(N) := \langle \Gamma_0(N), W_m \mid m \text{ exakter Teiler von } N \rangle$$

*zu einem Charakter  $\chi_{N,k}$  mit  $\chi_{N,k} \chi_{N,k'} = \chi_{N,k+k'}$ .*

Diese Atkin-Lehner Involutionen erzeugen eine elementar abelsche 2-Gruppe  $W(N) \leq N_{\mathrm{SL}_2(\mathbf{R})}(\Gamma_0(N))/\Gamma_0(N)$  deren Rang die Anzahl der Primteiler von  $N$  ist.  $W(N)$  operiert auf dem  $\mathbf{C}$ -Vektorraum, dessen Basis die Isometrieklassen der geraden Gitter von Stufe  $N$ , Dimension  $2k$  und Determinante  $N^k$  bilden, durch

$$[L] \cdot W_m := \chi_{N,k}(W_m) [L_{(m)}].$$

Unter dem linearen Operator “Theta-Reihe nehmen” wird diese Operation gerade auf die Operation von  $W(N)$  auf dem Raum der Modulformen für  $\Gamma_0(N)$  abgebildet. Der Vorteil dieser schon bei Eichler [8, Kapitel IV] beschriebenen Sichtweise liegt vor allem darin, dass man auch andere Operatoren z.B. “Theta-Reihe mit sphärischen Koeffizienten nehmen” oder “Siegelsche Theta-Reihe bilden” anwenden kann und dann die entsprechende Operation auf den (Siegelschen) Modulformen erhält. Diese Philosophie wurde z.B. in [26] verfolgt.

## 6 Extremale Gitter

Der Ring der Modulformen von  $\Gamma_*(N)$  ist besonders übersichtlich, wenn die Summe  $\sigma_1(N)$  der Teiler von  $N$  ein Teiler von 24 ist. Daher wird im ganzen Abschnitt vorausgesetzt, dass

$$N \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\} =: \mathcal{A}$$

ist. Sei weiter  $L$  ein gerades stark  $N$ -modulares Gitters minimaler Dimension  $2d_N$  und  $\theta_N$  seine Theta-Reihe (vom Gewicht  $d_N$ ). Dann liegen die Theta-Reihen der stark  $N$ -modularen Gitter, welche zum Geschlecht von  $L^d$  für ein  $d$  gehören, in dem Ring

$$\mathcal{M}(N) := \mathbf{C}[\theta_N, \Delta_N] \subset \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{M}_k(\Gamma_*(N), \chi_{N,k})$$

wo

$$\Delta_N := \prod_{m|N} \eta(mz)^{24/\sigma_1(N)}$$

eine Spitzenform vom Gewicht  $k_N := \frac{12\sigma_0(N)}{\sigma_1(N)}$  ist. Hier ist

$$\eta(z) = q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})$$

die Dedekindsche  $\eta$ -Funktion und  $\sigma_0(N)$  die Anzahl der Teiler von  $N$ . Die Reihe  $\theta_N$  und der Charakter  $\chi_{N,k}$  und damit auch  $\mathcal{M}(N)$  hängen vom Geschlecht des gewählten Gitters  $L$  ab (welches jedoch für  $N \neq 6$  durch  $d_N$  eindeutig bestimmt ist),  $\Delta_N$  ist schon durch die Stufe  $N$  bestimmt.  $\Delta_N$  und  $\theta_N$  sind Potenzreihen in  $q^2$ . Die  $q$ -Entwicklung von  $\Delta_N$  beginnt mit  $q^2$  und die von  $\theta_N$  mit 1.  $d_N$  und  $k_N$  ergeben sich aus der folgenden Tabelle:

$N$	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$2k_N$	24	16	12	8	8	6	4	4	4	2
$2d_N$	8	4	2	4	4	2	2	4	4	2

Ist  $L$  ein gerades stark  $N$ -modulares Gitter, so gibt es also  $a_i \in \mathbf{C}$  ( $a_0 = 1$ ) mit

$$\theta_L = \sum_{i=0}^l a_i \Delta_N^i \theta_N^j, \text{ wo } k_N i + d_N j = k \text{ und } l = \lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor$$

die größte ganze Zahl  $\leq \frac{k}{k_N}$  bezeichnet. Die  $q$ -Entwicklung von  $\Delta_N^i \theta_N^j$  beginnt mit  $q^{2i}$ . Also enthält  $\mathcal{M}(N)$  genau eine Funktion  $f_{N,k}$  vom Grad  $k$  mit  $q$ -Entwicklung

$$f_{N,k} = 1 + 0 \cdot q^2 + \dots + 0 \cdot q^{2l} + a_{2l+2} \cdot q^{2l+2} + \dots \in \mathcal{M}_k(N)$$

die sogenannte *extremale Modulform* vom Gewicht  $k$ . Schon C.L. Siegel [39] hat für  $N = 1$  gezeigt, dass der Koeffizient  $a_{2l+2}$  echt positiv ist (siehe [34, Theorem 2.0.1] für  $N > 1$ ). Also ist das Minimum eines geraden stark  $N$ -modularen Gitters der Dimension  $2k$  immer kleiner oder gleich  $2 + 2\lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor$ .

**Definition 6.1** Sei  $N \in \mathcal{A}$  und  $k_N := \frac{12\sigma_0(N)}{\sigma_1(N)}$  das Gewicht der Spitzenform  $\Delta_N$ . Ein gerades stark  $N$ -modulares Gitter  $L$  der Dimension  $2k$  heißt *extremal*, falls

$$\min(L) = 2 + 2\lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor.$$

Grob gesprochen bedeutet dies, dass ein Gitter extremal ist, wenn sein Minimum so groß ist, wie es die Theorie der Modulformen erlaubt. Mit dieser Philosophie kann man auch Extremalität für andere Geschlechter von Gittern definieren (siehe [34, Definition 1.6]). Ist  $L$  also ein extremales stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ , so ist  $\theta_L = f_{N,k}$  die (dem Geschlecht von  $L$  zugeordnete) extremale Modulform. Eine notwendige Bedingung für die Existenz eines extremalen geraden stark  $N$ -modularen Gitters in Dimension  $2k$  ist, dass die Koeffizienten  $a_m$  der extremalen Modulform  $f_{N,k}$  für  $m > 0$  nichtnegative gerade Zahlen sind. In [15] wird gezeigt, dass für große  $k$  ( $k > 20500$ ) der Koeffizient  $a_{2l+4}$  von  $f_{1,k}$  negativ wird. In Dimensionen  $\geq 41000$  gibt es also keine extremalen geraden unimodularen Gitter mehr. Jedoch ist schon in Dimension 72 die Existenz eines extremalen Gitters ein immer noch offenes Problem. Mit derselben Technik zeigt [34, Theorem 2.0.1] das analoge Resultat für  $N > 1$ . Es gibt also für festes  $N \in \mathcal{A}$  nur endlich viele extremale gerade stark  $N$ -modulare Gitter.

Da die Definition der Extremalität nur die Theta-Reihen der Gitter benutzt, gelten die Schranken an die Minima auch für “formal” stark  $N$ -modulare Gitter, also solche Gitter, deren Theta-Reihe gleich der Theta-Reihe aller partiellen dualen Gitter ist.

Die Dimension  $2k_N$ , also die erste Dimension, in der ein extremales gerades stark  $N$ -modulares Gitter Minimum 4 hat, ist besonders bemerkenswert. Es gibt nämlich je genau ein extremales stark  $N$ -modulares Gitter  $E^{(N)}$  der Dimension  $2k_N$ . Für  $N = 1$  ist dieses Gitter das Leech Gitter  $\Lambda_{24}$ . Eine einheitliche Konstruktion dieser extremalen Gitter ist in [32] gegeben: Die Zahlen  $N$  sind genau die Elementordnungen in der Matthieu Gruppe  $M_{23} \leq \text{Aut}(\Lambda_{24})$ , die auf dem Leech Gitter als Automorphismen operiert. Dann ist  $E^{(N)}$  das Fixgitter in  $\Lambda_{24}$  eines Elements der Ordnung  $N$  in  $M_{23}$ .

Die Vielfachen von  $2k_N$  heißen *Sprungdimensionen* für die stark  $N$ -modularen Gitter. Extremale Gitter in diesen Dimensionen sind von besonderem Interesse, da sie meist sehr dicht sind. In der Regel gibt es in diesen Dimensionen nur sehr wenige extremale Gitter, so kennt man z.B. nur 4 extremale gerade unimodulare Gitter in Sprungdimensionen (siehe folgende Tabelle).

**Ausgewählte extremale Gitter <sup>1</sup> .**

Stufe	dim	min	Anzahl	Gitter
N=1	8	2	1	$E_8$
	16	2	2	$E_8 \perp E_8, D_{16}^+$
	24	4	1	$\Lambda_{24}$ (Leech)
	32	4	$\geq 10$ Millionen [12]	
	48	6	$\geq 3$	$P_{48p}, P_{48q}$ [6, p. 195], $P_{48n}$ [20]
	72	8	?	
	80	8	$\geq 2$	$L_{80}, M_{80}$ [3]
N=2	4	2	1	$D_4$
	8	2	1	$D_4 \perp D_4$
	12	2	3 [33]	
	16	4	1 [35]	$BW_{16}$ [5]
	20	4	3 [4]	$[(SU_5(2) \circ SL_2(3)).2]_{20}, [2.M_{12}.2]_{20}$ [23] $HS_{20}^2$
	32	6	$\geq 4$	$Q_{32}$ [28], $Q'_{32}$ [27], $B_{32}$ [1] $CQ_{32}$ [20, Theorem 5.1]
	48	8	$\geq 2$ [2, Theorem 6.7]	
N=3	2	2	1	$A_2$
	12	4	1 [36]	$K_{12}$ (Coxeter-Todd)
	14	4	$\geq 1$	$[\pm G_2(3)]_{14}$ [13]
	24	6	$\geq 1$	$[SL_2(13) \circ SL_2(3)]_{24}$ [17]
	26	6	$\geq 1$	$[(\pm S_6(3) \times C_3).2]_{26}$ [18]
	36	8	?	
	40	8	$\geq 1$	$L_{40}$ [3]
	64	12	$\geq 1$	$({}^p3)L_{8,2} \otimes_{\infty,3} L_{32,2}$ [20, Remark 5.2], [21, Prop. 4.3]
N=5	8	4	1	$H_4$ [38]
	16	6	1 [4]	$[2.Alt_{10}]_{16}$ [23]
	24	8	$\geq 1$	$[2.J_2 \circ SL_2(5).2]_{24}$ [40]
N=6	8	4	1	$A_2 \otimes D_4$
	16	6	$\geq 1$	$[((Sp_4(3) \circ C_3) \otimes_{\sqrt{-3}} SL_2(3)).2]_{16}$ [23]
	24	8	$\geq 2$	$[(SL_2(3) \circ C_4).2 \otimes_{\sqrt{-1}} U_3(3)]_{24}$ $[(6.L_3(4).2 \otimes D_8).2]_{24}$ [17]
N=7	6	4	1	$A_6^{(2)}$
	12	6	0 [33]	
	18	8	0 [4]	
N=11	4	4	1	
	8	6	1 [33]	[20, Theorem 5.1]
	12	8	0 [25]	

<sup>1</sup>Eine ausführliche und ständig aktualisierte Version dieser Tabelle und aller vorkommenden Gitter findet man unter [24].

<sup>2</sup>R. Scharlau, B. Hemkemeier durch Suche im Nachbarschaftsgraph

Stufe	dim	min	Anzahl	Gitter
N=14	4	4	1	
	8	6	1 [34]	
	12	8	$\geq 1$	$[(L_2(7) \otimes D_8).2]_{12}$ [23]
N=15	4	4	1	
	8	6	2 [34]	
	12	8	$\geq 1$	$A_2 \otimes M_{6,2}$ [23]
	16	10	$\geq 1$	$[(SL_2(5) \otimes_{\infty,3} SL_2(9)).2]_{16}$ [23]

Die extremalen Gitter in obiger Tabelle wurden auf unterschiedliche Weisen gefunden und auch für den Beweis der Nichtexistenz extremaler Gitter gibt es verschiedene Methoden.

R. Scharlau und B. Hemkemeier ([33]) listen mit der Kneserschen Nachbarschaftsmethode alle Gitter in kleinen Geschlechtern auf und finden so die extremalen stark modularen Gitter in diesem Geschlecht oder zeigen deren Nichtexistenz. Viele extremale Gitter wurden von C. Bachoc mit Codes über Zahlkörpern oder Quaternionenalgebren konstruiert ([2], [1], [3]). Eine weitere reiche Quelle für extremale Gitter ist die Klassifikation der maximal endlichen rationalen (und quaternionialen) Matrixgruppen [23], [17], [18], [19] (siehe auch [20]). Die sicherlich interessanteste Methode ist aber eine gezielte Konstruktion oder ein Nichtexistenzbeweis mit Hilfe von Modulformen. In [25] wird die Nichtexistenz gewisser extremaler Gitter mit Siegelschen Modulformen gezeigt. Das wichtigste Hilfsmittel sind jedoch Modulformen mit sphärischen Koeffizienten (siehe z.B. [4]). Diese Theorie erlaubt es auch zu zeigen, dass für gewisse  $N$  und  $k$  extremale stark  $N$ -modulare Gitter der Dimension  $2k$  lokale Maxima der Dichtefunktion  $\delta$  sind, wie in den folgenden beiden Abschnitten beschrieben wird.

## 7 Sphärische Designs und stark perfekte Gitter

In diesem Abschnitt wird auf neuere Entwicklungen in der Gittertheorie eingegangen, die hauptsächlich von B. Venkov initiiert wurden. Eine schöne Einführung ist die Ausarbeitung [41].

**Definition 7.1** *Eine nicht leere endliche Teilmenge  $X$  der  $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre  $S^{n-1} := \{x \in \mathbf{R}^n \mid (x, x) = 1\}$  heißt (sphärisches)  $t$ -Design, falls der Mittelwert über  $X$  gleich dem  $O_n(\mathbf{R})$ -invarianten Integral ist*

$$(\star) \quad \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \int_{S^{n-1}} f(x) d\mu(x)$$

für alle homogenen Polynome  $f \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]_k$  vom Grad  $k \leq t$ .

Auf der rechten Seite von  $(\star)$  steht das  $O_n(\mathbf{R})$ -invariante Skalarprodukt von  $f$  mit der konstanten Funktion 1. Da die harmonischen Polynome

$$\text{Harm}_k(n) := \{f \in \mathbf{R}[x_1, \dots, x_n]_k \mid \Delta f = 0\}$$

(wo  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  der Laplace Operator ist) vom homogenen Grad  $k$  für  $k \geq 1$  senkrecht auf den konstanten Funktionen stehen, folgt leicht, dass  $X$  ein sphärisches  $t$ -Design ist, genau dann wenn

$$\sum_{x \in X} f(x) = 0 \text{ für alle } f \in \text{Harm}_k(n), 1 \leq k \leq t.$$

In der Anwendung auf Gitter, wird  $X$  aus allen Gittervektoren gegebener Länge  $a$  in  $L$  (einer sogenannten Schicht  $L_a \subset L$ ) bestehen,

$$X = L_a := \{x \in L \mid (x, x) = a\}$$

(reskaliert, so dass  $X \subset S^{n-1}$ ) meist sogar  $X = \text{Min}(L) = L_{\min(L)}$ . Diese Mengen  $X$  sind symmetrisch, d.h. mit  $x \in X$  liegt auch immer der negative Vektor  $-x$  in  $X$ . Insbesondere gilt automatisch  $\sum_{x \in X} f(x) = 0$  für alle homogenen Polynome  $f$  ungeraden Grades.

**Satz 7.2** ([41, Théorème 3.2]) *Sei  $X \subset S^{n-1}$  endlich, symmetrisch, nicht leer. Dann ist  $X$  ein  $(2k+1)$ -Design  $\Leftrightarrow$*

$$\sum_{x \in X} (\alpha, x)^{2k} = |X| \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{n(n+2) \cdots (n+2k-2)} (\alpha, \alpha)^k \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n.$$

Dabei genügt es vorauszusetzen, dass die linke Seite ein konstantes Vielfaches der  $k$ -ten Potenz der quadratischen Form ist. Die genaue Konstante ergibt sich dann durch Anwenden des Laplace Operators (nach  $\alpha$ ).

**Definition 7.3** *Ein Gitter  $L$  heißt stark perfekt, falls  $\text{Min}(L)$  ein sphärisches  $k$ -Design ist.*

**Beispiel.** Ist  $L$  ein orthogonal unzerlegbares Wurzelgitter der Dimension  $n$ , so gilt für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^n$

$$\sum_{x \in L_2} (x, \alpha)^2 = 2h(\alpha, \alpha)$$

wo  $h = \frac{|L_2|}{n}$  die Coxeter Zahl ist (siehe z.B. [7, Proposition 1.6]). Irreduzible Wurzelsysteme bilden also 3-Designs.

Die einzigen stark perfekten Wurzelgitter sind  $A_1 = \mathbf{Z}$ ,  $A_2$ ,  $D_4$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  und  $E_8$  ([41, Théorème 5.7]). Dabei bilden nur die Wurzeln in  $E_8$  ein 7-Design.

Für die kürzesten Vektoren  $X := \text{Min}(L)$  eines stark perfekten Gitters  $L$  gilt also

$$(\star_4) \quad \sum_{x \in X} (\alpha, x)^4 = |X| m^2 \frac{1 \cdot 3}{n(n+2)} (\alpha, \alpha)^2 \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n$$

wo  $m := \min(L)$  gesetzt wird. Durch Anwenden des Laplace Operators  $\Delta$  auf  $(\star_4)$  findet man

$$(\star_2) \quad \sum_{x \in X} (\alpha, x)^2 = |X| m \frac{1}{n} (\alpha, \alpha) \text{ für alle } \alpha \in \mathbf{R}^n.$$

Setzt man  $\alpha \in L^*$  in diese beiden Gleichungen ein, so liefern sie kombinatorische Bedingungen an  $|X|$ ,  $\min(L)$  und  $\min(L^*)$ , mit deren Hilfe man in kleinen Dimensionen alle stark perfekten Gitter klassifizieren kann. Man kennt alle stark perfekten Gitter der Dimension  $\leq 11$ :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbf{Z}$	$A_2$	—	$D_4$	—	$E_6, E_6^*$	$E_7, E_7^*$	$E_8$	—	$K'_{10}, K'_{10}*$	—

Die wichtigste Motivation, stark perfekte Gitter zu betrachten, ist der folgende Satz.

**Satz 7.4** *Stark perfekte Gitter sind extrem, also lokale Maxima der Dichtefunktion.*

Beweis: Sei  $L$  ein stark perfektes Gitter,  $X := \text{Min}(L)$  und  $m := \min(L)$ . Nach Satz 2.1 genügt es zu zeigen, dass  $L$  eutaktisch und perfekt ist. Mit  $(\star_2)$  ergibt sich, dass  $L$  eutaktisch ist mit Eutaxiekoeffizienten  $\lambda_x = \frac{n}{m|X|}$  für alle  $x \in X$ . Es ist nämlich für alle  $\alpha \in \mathbf{R}^n$

$$\alpha I_n \alpha^{tr} = (\alpha, \alpha) \stackrel{(\star_2)}{=} \frac{n}{m|X|} \sum_{x \in X} (\alpha, x)^2 = \frac{n}{m|X|} \sum_{x \in X} \alpha x^{tr} x \alpha^{tr}$$

woraus die Gleichung für die Eutaxie folgt. Perfektion zeigt man mit Hilfe der Gleichung  $(\star_4)$  (siehe [41, Théorème 6.4]). q.e.d.

**Satz 7.5** *Sei  $L$  ein stark perfektes Gitter. Dann ist*

$$\min(L) \min(L^*) \geq \frac{n+2}{3}.$$

Beweis: Sei  $\alpha \in \text{Min}(L^*)$ ,  $(\alpha, \alpha) =: m' = \min(L^*)$ . Dann liefert

$$(\star_4) - (\star_2) : \sum_{x \in X} (x, \alpha)^2 ((x, \alpha)^2 - 1) = \frac{|X|mm'}{n} (mm' \frac{3}{n+2} - 1).$$

Da  $(x, \alpha) \in \mathbf{Z}$  ist, ist die linke Seite eine nichtnegative Zahl, also auch die rechte Seite, woraus die Behauptung folgt. q.e.d.

### Ein Beispiel: Das Thompson-Smith Gitter.

Häufig kann man die Kenntnis einer großen Untergruppe  $G \leq \text{Aut}(L)$  der Automorphismengruppe des Gitters  $L$  benutzen, um zu zeigen, dass  $L$  stark perfekt ist. Die linke Seite von  $(\star_4)$  ist nämlich ein  $G$ -invariantes homogenes Polynom (in  $\alpha$ ) vom Grad 4. Hat  $G$  keine anderen Invarianten von Grad 4 als das Quadrat der invarianten quadratischen Form, dann ist die linke Seite von  $(\star_4)$  ein Vielfaches von  $(\alpha, \alpha)^2$  und damit nach Satz 7.4  $L$  stark perfekt. Nimmt man an, dass  $-I_n \in G$  ist, so gilt sogar, dass alle  $G$ -Bahnen (und damit auch alle nicht leeren Schichten  $L_a$  von  $L$ ) sphärische 5-Designs sind. Die Bedingung an die Invarianten vom Grad 4 von  $G$  kann man leicht mit der Charaktertafel von  $G$  nachprüfen. Sie ist z.B. für die 248-dimensionale Darstellung der sporadisch einfachen Thompson Gruppe  $Th$  erfüllt.  $\langle -I_n \rangle \times Th$  ist Automorphismengruppe eines (eindeutig bestimmten) geraden unimodularen Gitters, dem Thompson Smith Gitter  $\Lambda_{248}$ , der Dimension 248. Dieses Gitter  $\Lambda_{248}$  ist demnach stark perfekt also ein lokales Maximum der Dichtefunktion. Aus Satz 7.5 folgert man, dass

$$\min(\Lambda_{248}) \geq \sqrt{\frac{248+2}{3}} > 9$$

also  $\min(\Lambda_{248}) \geq 10$  ist. Diese Informationen erhält man durch reine Charakterrechnung, ohne die Darstellung der Thompson Gruppe oder das Gitter  $\Lambda_{248}$  explizit zu konstruieren. Durch explizite Konstruktion der 248-dimensionalen Darstellung findet man einen Vektor der Länge 12 in  $\Lambda_{248}$  (in einem 1-dimensionalen invarianten Teilraum der maximalen Untergruppe  $(C_3 \times G_2(3)) : 2$ ). Jedoch ist immer noch offen, ob  $\min(\Lambda_{248})$  nun 10 oder 12 ist.

## 8 Theta-Reihen mit harmonischen Koeffizienten

Mit Hilfe der Theorie der Modulformen kann man zeigen, dass gewisse extremale Gitter stark perfekt und damit extrem sind. Insbesondere sind alle extremalen geraden unimodularen Gitter in den Sprungdimensionen  $24l$  und in den Dimensionen  $24l + 8$  stark perfekt. In Dimension 32 gibt es also mehr als 10 Millionen stark perfekte gerade unimodulare Gitter:

Für ein harmonisches Polynom  $P \in \text{Harm}_t(2k)$  und ein gerades Gitter  $L$  von Stufe  $N$  der Dimension  $2k$  ist die Theta-Reihe von  $L$  mit harmonischen Koeffizienten  $P$

$$\theta_{L,P} := \sum_{x \in L} P(x)q^{(x,x)}$$

eine Modulform vom Gewicht  $k + t$  zur Gruppe  $\Gamma_0(N)$  mit dem Charakter  $\chi_k$  (siehe z.B. [7], [16]). Ist  $t > 0$ , so ist  $\theta_{L,P}$  sogar eine Spitzenform. Die Operation von  $\Gamma_*(N)$  auf den Isometrie-Klassen von Gittern im Geschlecht von  $L$  übersetzt sich für Theta-Reihen wie folgt: Ist  $N$  eine Primzahl, so ist

$$\theta_{L,P} + \theta_{L(N),P} \in \mathcal{M}_{k+t}(\Gamma_*(N), \chi_{N,k})$$

und

$$\theta_{L,P} - \theta_{L(N),P} \in \mathcal{S}_{k+t}(\Gamma_*(N), \chi_{N,k+2})$$

(siehe [4, Theorem 2.1]). Für zusammengesetztes  $N$  muss man  $\pm 1$ -Linearkombinationen aller partiellen dualen Gitter betrachten. Durch Studium der entsprechenden Modulformen für  $\Gamma_*(N)$  läßt sich zeigen, dass für kleine Grade  $t \geq 1$  und extremale stark  $N$ -modulare Gitter  $L$  beide Summen

$$\theta_{L,P} \pm \theta_{L(N),P} = 0$$

sind, also auch  $\theta_{L,P} = 0$ . Somit bilden alle Schichten  $L_a$  von  $L$  sphärische  $t$ -designs. Genauer findet man

**Satz 8.1** ([4, Corollary 3.1]) *Sei  $L$  ein extremales  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ . Dann bilden die Schichten von  $L$  sphärische  $t$ -Designs, gemäß der folgenden Tabelle:*

$N$	1	1	2	2	3	3
$k$	$0 \bmod 12$	$4 \bmod 12$	$0 \bmod 8$	$2 \bmod 8$	$0 \bmod 6$	$1 \bmod 6$
$t$	11	7	7	5	5	5

*Insbesondere ist  $L$  in all diesen Fällen ein stark perfektes Gitter.*

**Beweis:** (für  $N = 1$ ). Sei  $L$  ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension  $2k$  und  $P \in \text{Harm}_t(2k)$  ein harmonisches Polynom vom Grad  $t \geq 1$ . Dann ist  $\min(L) = 2(1 + \lfloor \frac{k}{12} \rfloor) =: 2m$  und

$$\theta_{L,P} = \sum_{j=m}^{\infty} \left( \sum_{x \in L_{2j}} P(x) \right) q^{2j} \in \mathcal{S}_{k+t}(\text{SL}_2(\mathbf{Z})).$$

Das Ideal der Spitzenformen

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{S}_k(\text{SL}_2(\mathbf{Z})) = \Delta \mathbf{C}[E_4, E_6]$$

für  $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$  ist ein Hauptideal in dem Polynomring in  $E_4 = \theta_{E_8}$  (vom Gewicht 4) und  $E_6$  (vom Gewicht 6) erzeugt von der Spitzenform  $\Delta = \Delta_1$  (vom Gewicht 12). Da  $\Delta$  mit  $q^2$  beginnt, ist die mit  $q^{2m}$  beginnende homogene Modulform  $\theta_{L,P}$  durch  $\Delta^m$  teilbar. Das Gewicht von  $\Delta^m$  ist aber  $12m = 12 + 12\lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ . Ist also  $k \equiv 0 \pmod{12}$ , so ist  $\theta_{L,P} = 0$ , falls  $t \leq 11$  ist und für  $k \equiv 4 \pmod{12}$  ist  $\theta_{L,P} = 0$ , falls  $t \leq 7$  ist. Damit sind alle Schichten von  $L$  sphärische 11- bzw. 7-Designs. q.e.d.

Insbesondere liefern also die kürzesten Vektoren des Leech Gitters ein 11-Design der Kardinalität 196560 auf  $S^{23}$ . Dies ist das einzige symmetrische 11-Design mit  $\leq 196560$  Punkten in Dimension 24 ([41, Théorème 14.2]).

## 9 Ungerade Gitter und deren Schatten

Bisher haben wir nur gerade Gitter  $L$  betrachtet. Extremalität kann man auch für ungerade Gitter  $L$  definieren, wobei man beachten muss, dass  $L$  nicht nur alle partiellen dualen Gitter festlegt, sondern auch sein gerades Teilgitter

$$L_g := \{x \in L \mid (x, x) \in 2\mathbf{Z}\}$$

und dessen duales Gitter.  $L_g$  ist der Kern der linearen Abbildung  $L \rightarrow \mathbf{F}_2, x \mapsto (x, x) + 2\mathbf{Z}$ , hat also Index 2 in  $L$ , falls  $L$  ein ungerades Gitter ist. Die Theta-Reihe des geraden Teilgitters ist

$$\theta_{L_g}(z) = \frac{1}{2}(\theta_L(z) + \theta_L(z+1)).$$

**Definition 9.1** *Der Schatten eines ungeraden Gitters  $L$  ist*

$$S(L) := L_g^* - L^*.$$

*Ist  $L$  gerade, so setzt man  $S(L) = L^*$ .*

Der Schatten eines Gitters  $L$  ist eine Restklasse nach  $L^*$ . Er besteht aus den Vektoren  $\frac{v}{2}$ , wo  $v$  die charakteristischen Vektoren von  $L$  durchläuft, also  $(v, x) \equiv (x, x) \pmod{2}$  für alle  $x \in L$ . Mit der Theta-Transformationsformel ergibt sich die Theta-Reihe von  $S(L)$  als

$$\theta_{S(L)}(z) = \sqrt{\det(L)} \left(\frac{i}{z}\right)^k \theta_L\left(1 - \frac{1}{z}\right).$$

Die Theta-Reihe eines ungeraden Gitters ist eine Modulform für eine kleinere Gruppe als für die entsprechenden geraden Gitter. Daher liefert die Modulformenbedingung für die Theta-Reihe alleine weniger scharfe Schranken als für gerade Gitter. Als Ausgleich kann man aber auch noch die Theta-Reihe des Schattens betrachten, mit deren Hilfe man für dieselben Stufen  $N \in \mathcal{A}$  Extremalität definieren kann. Damit erhält man dieselben Schranken wie für gerade Gitter. Genauer gilt

**Satz 9.2** ([32, Theorem 1,2]) *Sei  $N \in \mathcal{A}$  und*

$$C_N := \perp_{d|N} \sqrt{d}\mathbf{Z}$$

*ein stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $\sigma_0(N)$ . Ist  $L$  ein stark  $N$ -modulares Gitter der Dimension  $2k$ , welches rational äquivalent ist zu einer orthogonalen Summe von Kopien von  $C_N$ , so gilt*

$$\min(L) \leq 2\lfloor \frac{k}{k_N} \rfloor + 2,$$

*mit der Ausnahme  $k = k_N - \frac{1}{2}\sigma_0(N)$ , wo die Schranke 3 ist.*

In Dimension  $2k_N - \sigma_0(N)$  gibt es genau ein stark  $N$ -modulares Gitter  $S^{(N)}$  von Minimum 3, die “shorter version” des entsprechenden extremalen Gitters  $E^{(N)}$  der Dimension  $2k_N$ .

### Gitter mit langem Schatten.

Anstatt modulare Gitter mit großem Minimum zu suchen, kann man auch nach solchen (ungeraden) Gittern  $L$  fragen, für die die minimale Länge eines charakteristischen Vektors (also die minimale Länge eines Vektors in  $S(L)$ ) möglichst groß ist. Dies hat zwar für die Anwendung in der Informationsübertragung keine Bedeutung, da der minimale Abstand von zwei Vektoren des Schattens gleich  $\min(L^*)$  ist, ist aber theoretisch von Interesse. Initiiert wurde diese Frage von N.D. Elkies ([9], [10]), der gezeigt hat, dass das Standardgitter  $\mathbf{Z}^n$ , das einzige unimodulare Gitter der Dimension  $n$  mit maximalem Schatten ( $\min\{(v, v) \mid v \in S(\mathbf{Z}^n)\} = n/4$ ) ist. Mit Hilfe der in [32] angegebenen Formeln lässt sich dies leicht auf die stark  $N$ -modularen Gitter in Satz 9.2 verallgemeinern, wobei hier  $C_N$  dieselbe Rolle spielt wie  $\mathbf{Z}$  im Fall von  $N = 1$ . Ist  $L$  nämlich ein stark  $N$ -modulares Gitter mit  $\min(L) = 1$ , so hat  $L$  einen orthogonalen Summanden  $C_N$ . Der Einfachheit halber nehmen wir im folgenden  $N$  als ungerade an.

**Satz 9.3** ([9], [10] für  $N = 1$ , [22]) Sei  $N \in \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 23\}$  und  $L$  ein stark  $N$ -modulares Gitter welches rational äquivalent ist zu  $C_N^l$ . Dann gilt

$$\min_0(S(L)) := \min\{(v, v) \mid v \in S(L)\} = \frac{l\sigma_1(N) - 8m}{4N} =: M^{(N)}(l, m)$$

für ein  $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$

Ist  $m = 0$ , so ist  $L = C_N^l$ .

Ist  $m = 1$ , so ist  $L = C_N^{l_1} \perp M$  mit einem stark  $N$ -modularen Gitter  $M$  von Minimum  $> 1$  und mit  $\min_0(S(M)) = M^{(N)}(l - l_1, 1)$ . Die Dimension von  $M$  ist  $\leq 2k_N - \dim(C_N)$ .

Beweis: Aus den Formeln für die Theta-Reihe des Schattens in [32, Corollary 3] findet man die Formel  $M^{(N)}(l, m)$  für das mögliche Minimum der Schattenvektoren. Für  $m = 0$  ist die Theta-Reihe von  $L$  eindeutig bestimmt und gleich der von  $C_N^l$ . Die Vektoren der Länge 1 in  $L$  erzeugen ein unimodulares Teilgitter  $\cong \mathbf{Z}^l$ , welches als orthogonaler Summand von  $L$  abspaltet

$$L = \mathbf{Z}^l \perp M.$$

Durch partielles Dualisieren findet man, dass  $L$  für alle exakten Teiler  $m$  von  $N$  einen orthogonalen Summanden  $\sqrt{m}\mathbf{Z}^l$  hat. Also ist  $L \cong C_N^l$ .

Für  $m = 1$  kann man nach Abspalten von orthogonalen Summanden  $C_N$  annehmen, dass  $\min(L) \geq 2$  ist. Dann ist wieder die Theta-Reihe von  $L$  eindeutig bestimmt. Die Anzahl der Vektoren der Norm 2 in  $L$  ist  $2l(\frac{24}{\sigma_1(N)} - l - 1)$  wodurch man die Schranke an  $l$  erhält. Ist  $l = \frac{24}{\sigma_1(N)} - 1$ , so ist  $\min(L) = 3$  und  $L = S^{(N)}$ , das “Shorter” Gitter aus [32, Table 1]. q.e.d.

Es ist ein offenes Problem, ob für jedes  $m$ , die Dimension eines stark  $N$ -modularen Gitters  $L$  wie in Satz 9.3 mit  $\min(L) \geq 2$  und  $\min_0(S(L)) \geq M^{(N)}(\dim(L)/\dim(C_N), m)$  nach oben beschränkt werden kann. Für  $m = 0, 1$  liefert Satz 9.3 scharfe Schranken. Für  $N = 1$  hat Gaultier [11] solche (nicht scharfen) Schranken für  $m = 2$  und 3 angegeben.

## Literatur

- [1] *C. Bachoc*: Voisinage au sens de Kneser pour les réseaux quaternioniens. *Comment. Math. Helvetici* **70** (1995), 350-374.
- [2] *C. Bachoc*: Applications of coding theory to the construction of modular lattices. *J. Comb. Th. Ser. A* **78** (1997), 92-119.
- [3] *C. Bachoc, G. Nebe*: Extremal lattices of minimum 8 related to the Mathieu group  $M_{22}$ . *J. reine angew. Math.* **494** (1998), 155-171.
- [4] *C. Bachoc, B. Venkov*: Modular forms, lattices and spherical designs. In [14], 87-112.
- [5] *E.S. Barnes, G.E. Wall*: Some extreme forms defined in terms of abelian groups. *J. Austral. Math. Soc.* **1** (1959), 47-63.
- [6] *J. H. Conway, N. J. A. Sloane*: Sphere packings, lattices and groups. Springer, 3. Auflage (1998).
- [7] *W. Ebeling*: Lattices and codes. Vieweg (1994).
- [8] *M. Eichler*: Quadratische Formen und orthogonale Gruppen. Springer Grundlehren **63**, 2. Auflage (1974)
- [9] *N.D. Elkies*: A characterization of the  $\mathbf{Z}^n$  lattice. *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 3, 321-326.
- [10] *N.D. Elkies*: Lattices and codes with long shadows. *Math. Res. Lett.* **2** (1995), no. 5, 643-651
- [11] *M. Gaultier*: Lattices without short characteristic vectors. *Math. Res. Lett.* **5** (1998), no. 3, 353-362.
- [12] *O. King*: A mass formula for unimodular lattices with no roots. *Mathematics of Computation*, (to appear)
- [13] *A.I. Kostrikin, I.A. Kostrikin, V.A. Ufnarovskii*: Invariant lattices of type  $G_2$  and their automorphism groups. *Proc. Steklov Inst. Math.* **3** (1985), 85-105.
- [14] *J. Martinet*: (Herausgeber) Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires. *L'Ens. Math. Monographie* **37** (2001).
- [15] *C. L. Mallows, A. M. Odlysko, N. J. A. Sloane*: Upper bounds for modular forms, lattices and codes. *J. Alg.* **36** (1975), 68-76.
- [16] *T. Miyake*: Modular Forms. Springer (1989).
- [17] *G. Nebe*: Endliche rationale Matrixgruppen vom Grad 24. Dissertation, Verlag der Augustinus Buchhandlung, Aachener Beiträge zur Mathematik **12** (1995). Englische Kurzfassung: Finite subgroups of  $GL_{24}(\mathbf{Q})$ . *Exp. Math.* **5** (3) (1996), 163-195.
- [18] *G. Nebe*: Finite subgroups of  $GL_n(\mathbf{Q})$  for  $25 \leq n \leq 31$ . *Comm. Alg.* **24** (7), (1996), 2341-2397.
- [19] *G. Nebe*: Finite quaternionic matrix groups. *Representation Theory* **2**, (1998), 106-223.

- [20] *G. Nebe*: Some cyclo-quaternionic lattices. *J. Alg.* **199** (1998), 472-498.
- [21] *G. Nebe*: Construction and investigation of lattices with matrix groups. in *Integral Quadratic Forms and Lattices*, herausgegeben von Myung-Hwan Kim, John S. Hsia, Y. Kitaoka, R. Schulze-Pillot, *Contemporary Mathematics* **249** (1999), 205-220.
- [22] *G. Nebe*: Strongly modular lattices with long shadow. (Preprint 2002)
- [23] *G. Nebe, W. Plesken*: Finite rational matrix groups. *AMS Memoirs* **116** (556) (1995).
- [24] *G. Nebe, N.J.A. Sloane*: A database of lattices. Internetsammlung unter [www.research.att.com/~njas/lattices](http://www.research.att.com/~njas/lattices)
- [25] *G. Nebe, B. Venkov*: Non-existence of extremal lattices in certain genera of modular lattices. *J. Number Theory*, **60** (2) (1996), 310-317.
- [26] *G. Nebe, B. Venkov*: On Siegel modular forms of weight 12. *J. reine und angew. Mathematik* **531** (2001), 49-60.
- [27] *H.-G. Quebbemann*: A construction of integral lattices. *Mathematika* **31** (1984), 137-140.
- [28] *H.-G. Quebbemann*: Lattices with Theta Functions for  $G(\sqrt{2})$  and Linear Codes. *J. Algebra* **105** (1987), 443-450.
- [29] *H.-G. Quebbemann*: Modular lattices in euclidean spaces. *J. Number Th.* **54** (1995), 190-202.
- [30] *H.-G. Quebbemann*: Atkin-Lehner eigenforms and strongly modular lattices. *L'Ens. Math.* **43** (1997), 55-65.
- [31] *M. Pohst, H. Zassenhaus*: Algorithmic algebraic number theory. Cambridge University Press (1989).
- [32] *E.M. Rains, N.J.A. Sloane*: The shadow theory of modular and unimodular lattices. *J. Number Th.* **73** (1998), 359-389.
- [33] *R. Scharlau, B. Hemkemeier*: Classification of integral lattices with large class number. *Math. Comp.* **67** (1998), 737-749.
- [34] *R. Scharlau, R. Schulze-Pillot*: Extremal lattices. In *Algorithmic algebra and number theory*. Herausgegeben von B. H. Matzat, G. M. Greuel, G. Hiss. Springer (1999), 139-170. Preprint erhältlich unter [www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html](http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html)
- [35] *R. Scharlau, B. Venkov*: The genus of the Barnes-Wall lattice. *Comm. Math. Helvetici* **69** (1994), 322-333.
- [36] *R. Scharlau, B. Venkov*: The genus of the Coxeter-Todd lattice. Preprint 95-7 erhältlich unter [www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html](http://www.matha.mathematik.uni-dortmund.de/preprints/welcome.html)
- [37] *J. P. Serre*: A course in arithmetic. Springer GTM **7** (1973).
- [38] *G.C. Shephard, J.A. Todd*: Finite unitary reflection groups. *Canad. J. Math.* **6** (1954), 274-304.

- [39] *C.L. Siegel*: Berechnung von Zetafunktionen an ganzzahligen Stellen. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen* **10** (1969), 87-102.
- [40] *J. Tits*: Quaternions over  $\mathbf{Q}[\sqrt{5}]$ , Leech's lattice and the sporadic group of Hall-Janko. *J. Alg.* **63** (1980), 56-75.
- [41] *B. Venkov*: Réseaux et designs sphériques. In [14] 10-86.
- [42] *G. Voronoi*: Nouvelles applications des paramètres continues à la théorie des formes quadratiques: 1. Sur quelques propriétés des formes quadratiques parfaites. *J. Reine Angew. Math.* **133** (1908) 97-178.