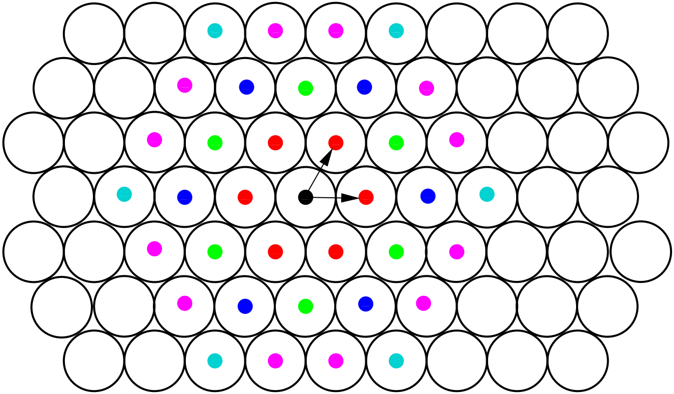
Extremale Gitter

Gabriele Nebe

Lehrstuhl D für Mathematik

Braunschweig 15. Juni 2011

Gitter und zugehörige Kugelpackungen



Hexagonal Circle Packing

$$\theta = 1 + 6q + 6q^3 + 6q^4 + 12q^7 + 6q^9 + \ldots.$$

Dichte Gitter-Kugelpackungen

- Bestimmen der dichtesten Kugelpackung:
- Dimension 2: Lagrange für Gitter, Fejes Tóth im Allgemeinen
- Dimension 3: Kepler Vermutung, T.C. Hales (1998)
- Dimension ≥ 4: offen

Dichte Gitter-Kugelpackungen

- Bestimmen der dichtesten Kugelpackung:
- Dimension 2: Lagrange für Gitter,
  Fejes Tóth im Allgemeinen
- Dimension 3: Kepler Vermutung, T.C. Hales (1998)
- Dimension ≥ 4: offen
- Dichteste Gitter-Kugelpackungen
- Voronoi Algorithmus ($\sim$1900) zur Berechnung aller lokalen Maxima der Dichtefunktion
- Dichteste Gitter: Dim. 1-5 Korkine-Zolotareff (1872)
  Dim. 6,7,8 Blichfeldt (1935)
  Dim. 24 Cohn, Kumar (2003)
- Dichte ist Maß für die Qualität eines Gitters als fehlerkorrigierender Code für analoge Signale.

Die Dichte eines Gitters

Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine positiv definite quadratische Form, mit zugehörigem Euklidischen Skalarprodukt

$$(x, y) := Q(x + y) - Q(x) - Q(y), (x, x) = 2Q(x) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Die Dichte eines Gitters

Sei $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine positiv definite quadratische Form, mit zugehörigem Euklidischen Skalarprodukt

$$(x, y) := Q(x + y) - Q(x) - Q(y), (x, x) = 2Q(x) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Definition

- Ein Gitter L in $\mathbb{R}^n$ ist das $\mathbb{Z}$-Erzeugnis einer Basis von $\mathbb{R}^n$

$$L = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}} = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \mid a_i \in \mathbb{Z}\}.$$

- Die Matrix $((b_i, b_j))_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n \times n}_{sym,>0}$ heißt eine Grammatrix von L.
- Jede Grammatrix von L hat die gleiche Determinante, $\det(L)$, die Determinante von L.
- Die Determinante des Gitter ist das Quadrat des Volumens eines jeden Fundamentalbereichs der Operation von L auf $\mathbb{R}^n$.

Die Dichte eines Gitters

Definition

- Das Minimum von L ist das Minimum der quadratischen Form
$$\min(L) = \min\{Q(\ell) \mid 0 \neq \ell \in L\}.$$
- $\gamma(L) := \frac{2\min(L)}{\det(L)^{1/n}}$ ist proportional zur Dichte des Gitters.
- $\gamma_n := \max\{\gamma(L) \mid L$ Gitter der Dimension n $\}$ Hermite Konstante.

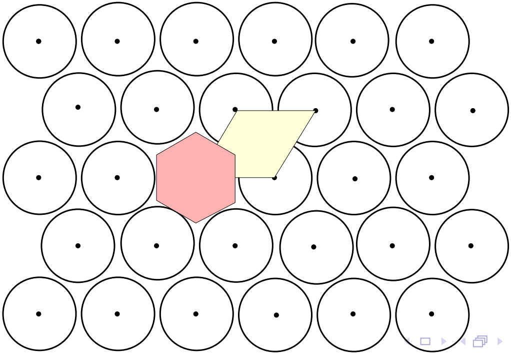
Die Dichte eines Gitters

Definition

- Das Minimum von L ist das Minimum der quadratischen Form

$$\min(L) = \min\{Q(\ell) \mid 0 \neq \ell \in L\}.$$

- $\gamma(L) := \frac{2\min(L)}{\det(L)^{1/n}}$ ist proportional zur Dichte des Gitters.
- $\gamma_n := \max\{\gamma(L) \mid L$ Gitter der Dimension n $\}$ Hermite Konstante.



Die Dichte eines Gitters

Definition

- Das Minimum von L ist das Minimum der quadratischen Form

$$\min(L) = \min\{Q(\ell) \mid 0 \neq \ell \in L\}.$$

- $\gamma(L) := \frac{2\min(L)}{\det(L)^{1/n}}$ ist proportional zur Dichte des Gitters.
- $\gamma_n := \max\{\gamma(L) \mid L$ Gitter der Dimension n $\}$ Hermite Konstante.

Die dichtesten Gitter.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	24
γ_n	1	1.15	1.26	1.41	1.52	1.67	1.81	2	4
L	$\mathbb{A}_1$	$\mathbb{A}_2$	$\mathbb{A}_3$	$\mathbb{D}_4$	$\mathbb{D}_5$	$\mathbb{E}_6$	$\mathbb{E}_7$	$\mathbb{E}_8$	Λ_{24}
lok. Max.	1	1	1	2	3	6	30	2408	

Gerade unimodulare Gitter.

Definition

- L heißt gerade falls $Q(\ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
  Dann ist $(\ell, \ell) = 2Q(\ell) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.

Gerade unimodulare Gitter.

Definition

- L heißt gerade falls $Q(\ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
  Dann ist $(\ell, \ell) = 2Q(\ell) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
- Das duale Gitter ist
  $L^{\#} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L\} = \langle b_1^*, \dots, b_n^* \rangle$
- L heißt unimodular falls $L = L^{\#}$.

Gerade unimodulare Gitter.

Definition

- L heißt gerade falls $Q(\ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
  Dann ist $(\ell, \ell) = 2Q(\ell) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
- Das duale Gitter ist
  $L^{\#} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L\} = \langle b_1^*, \ldots, b_n^* \rangle$
- L heißt unimodular falls $L = L^{\#}$.

Bemerkung

- L unimodular $\Rightarrow \det(L) = 1$ und $\gamma(L) = 2\min(L)$.

Gerade unimodulare Gitter.

Definition

- L heißt gerade falls $Q(\ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
  Dann ist $(\ell, \ell) = 2Q(\ell) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
- Das duale Gitter ist
  $L^{\#} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L\} = \langle b_1^*, \dots, b_n^* \rangle$
- L heißt unimodular falls $L = L^{\#}$.

Bemerkung

- L unimodular $\Rightarrow \det(L) = 1$ und $\gamma(L) = 2\min(L)$.
- Dichteste Gitter in Dim. 8 und 24 sind gerade unimodulare Gitter.
- Dichteste bekannte Gitter in Dim. 48 und 72 sind gerade unimodulare Gitter.

Gerade unimodulare Gitter.

Definition

- L heißt gerade falls $Q(\ell) \in \mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
  Dann ist $(\ell, \ell) = 2Q(\ell) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$.
- Das duale Gitter ist
  $L^{\#} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, \ell) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \ell \in L\} = \langle b_1^*, \dots, b_n^* \rangle$
- L heißt unimodular falls $L = L^{\#}$.

Bemerkung

- L unimodular $\Rightarrow \det(L) = 1$ und $\gamma(L) = 2\min(L)$.
- Dichteste Gitter in Dim. 8 und 24 sind gerade unimodulare Gitter.
- Dichteste bekannte Gitter in Dim. 48 und 72 sind gerade unimodulare Gitter.
- Gerade unimodulare Gitter sind reguläre ganzzahlige quadratische Formen.

Thetareihen

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in $(\mathbb{R}^n, Q)$.

- Die Dimension n von L ist durch 8 teilbar.

Thetareihen

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in $(\mathbb{R}^n, Q)$.

- Die Dimension n von L ist durch 8 teilbar.
- Die Thetareihe von L ist

$$\theta_L = \sum_{\ell \in L} q^{Q(\ell)} = 1 + \sum_{k=\min(L)}^{\infty} a_k q^k$$

wo $a_k = |\{\ell \in L \mid Q(\ell) = k\}|$.

Thetareihen

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in $(\mathbb{R}^n, Q)$.

- Die Dimension n von L ist durch 8 teilbar.
- Die Thetareihe von L ist

$$\theta_L = \sum_{\ell \in L} q^{Q(\ell)} = 1 + \sum_{k=\min(L)}^{\infty} a_k q^k$$

  wo $a_k = |\{\ell \in L \mid Q(\ell) = k\}|$.
- θ_L definiert eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ durch $q := \exp(2\pi i z)$.

Thetareihen

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in $(\mathbb{R}^n, Q)$.

- Die Dimension n von L ist durch 8 teilbar.
- Die Thetareihe von L ist

$$\theta_L = \sum_{\ell \in L} q^{Q(\ell)} = 1 + \sum_{k=\min(L)}^{\infty} a_k q^k$$

wo $a_k = |\{\ell \in L \mid Q(\ell) = k\}|$.

- θ_L definiert eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ durch $q := \exp(2\pi i z)$.
- θ_L ist eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$

$$\theta_L \in \mathcal{M}_{\frac{n}{2}}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{C}[E_4, \Delta]_{\frac{n}{2}}$$

wo $E_4 := \theta_{\mathbb{E}_8} = 1 + 240q + \ldots$ Eisenstein Reihe vom Gewicht 4

$\Delta = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \ldots$ Spitzenform vom Gewicht 12

Extremale Modulformen

Basis von $\mathcal{M}_{4k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$:

$$\begin{array}{llllll}
E_4^k = & 1+ & 240kq+ & *q^2+ & \dots & \\
E_4^{k-3}\Delta = & & q+ & *q^2+ & \dots & \\
E_4^{k-6}\Delta^2 = & & & q^2+ & \dots & \\
\vdots & & & & & \\
E_4^{k-3m_k}\Delta^{m_k} = & & \dots & & q^{m_k}+ & \dots
\end{array}$$

wo $m_k = \lfloor \frac{n}{24} \rfloor = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$.

Extremale Modulformen

Basis von $\mathcal{M}_{4k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$:

$$\begin{array}{llllll}
E_4^k = & 1+ & 240kq+ & *q^2+ & \ldots & \\
E_4^{k-3}\Delta = & & q+ & *q^2+ & \ldots & \\
E_4^{k-6}\Delta^2 = & & & q^2+ & \ldots & \\
\vdots & & & & & \\
E_4^{k-3m_k}\Delta^{m_k} = & & \ldots & & q^{m_k}+ & \ldots
\end{array}$$

wo $m_k = \lfloor \frac{n}{24} \rfloor = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$.

Definition

$\mathcal{M}_{4k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ enthält genau eine Modulform

$$f^{(k)} := 1 + 0q + 0q^2 + \ldots + 0q^{m_k} + a(f^{(k)})q^{m_k+1} + b(f^{(k)})q^{m_k+2} + \ldots$$

$f^{(k)}$ heißt die extremale Modulform von Gewicht $4k$.

Extremale Modulformen

Basis von $\mathcal{M}_{4k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$:

$$\begin{array}{llllll}
E_4^k = & 1+ & 240kq+ & *q^2+ & \dots & \\
E_4^{k-3}\Delta = & & q+ & *q^2+ & \dots & \\
E_4^{k-6}\Delta^2 = & & & q^2+ & \dots & \\
\vdots & & & & & \\
E_4^{k-3m_k}\Delta^{m_k} = & & \dots & & q^{m_k}+ & \dots
\end{array}$$

wo $m_k = \lfloor \frac{n}{24} \rfloor = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor$.

Definition

$\mathcal{M}_{4k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ enthält genau eine Modulform

$$f^{(k)} := 1 + 0q + 0q^2 + \ldots + 0q^{m_k} + a(f^{(k)})q^{m_k+1} + b(f^{(k)})q^{m_k+2} + \ldots$$

$f^{(k)}$ heißt die extremale Modulform von Gewicht $4k$.

$f^{(1)} = 1 + 240q + \ldots = \theta_{\mathbb{E}_8}$, $f^{(2)} = 1 + 480q + \ldots = \theta^2_{\mathbb{E}_8}$,
$f^{(3)} = 1 + 196.560q^2 + \ldots = \theta_{\Lambda_{24}}$,
$f^{(6)} = 1 + 52.416.000q^3 + \ldots = \theta_{P_{48p}} = \theta_{P_{48q}} = \theta_{P_{48n}}$,
$f^{(9)} = 1 + 6.218.175.600q^4 + \ldots = \theta_{\Gamma}$.

Extremale gerade unimodulare Gitter

Satz

$a(f^{(k)}) > 0$ für alle k

Extremale gerade unimodulare Gitter

Satz

$a(f^{(k)}) > 0$ für alle k

Folgerung

Ist L ein gerades unimodulares Gitter der Dimension $n = 8k$, so ist

$$\min(L) \leq 1 + \lfloor \frac{n}{24} \rfloor = 1 + m_k.$$

Gilt Gleichheit, so nennt man L ein extremales gerades unimodulares Gitter.

Extremale gerade unimodulare Gitter

Satz

$a(f^{(k)}) > 0$ für alle k

Folgerung

Ist L ein gerades unimodulares Gitter der Dimension $n = 8k$, so ist

$$\min(L) \leq 1 + \lfloor \frac{n}{24} \rfloor = 1 + m_k.$$

Gilt Gleichheit, so nennt man L ein extremales gerades unimodulares Gitter.

Extremale gerade unimodulare Gitter

n	8	16	24	32	40	48	72	80
min(L)	1	1	2	2	2	3	4	4
Anzahl	1	2	1	$\geq 10^7$	$\geq 10^{51}$	≥ 3	≥ 1	≥ 4

Extremale gerade unimodulare Gitter

Satz

$a(f^{(k)}) > 0$ für alle k und $b(f^{(k)}) < 0$ für $k \geq 21000$.

Folgerung

Ist L ein gerades unimodulares Gitter der Dimension $n = 8k$, so ist

$$\min(L) \leq 1 + \lfloor \frac{n}{24} \rfloor = 1 + m_k.$$

Gilt Gleichheit, so nennt man L ein extremales gerades unimodulares Gitter.

Extremale gerade unimodulare Gitter

n	8	16	24	32	40	48	72	80
min(L)	1	1	2	2	2	3	4	4
Anzahl	1	2	1	$\geq 10^7$	$\geq 10^{51}$	≥ 3	≥ 1	≥ 4

Extremale Gitter in den Sprungdimensionen

$f^{(3)} = 1 + 196.560q^2 + \ldots = \theta_{\Lambda_{24}}$.
$f^{(6)} = 1 + 52.416.000q^3 + \ldots = \theta_{P_{48p}} = \theta_{P_{48q}} = \theta_{P_{48n}}$.
$f^{(9)} = 1 + 6.218.175.600q^4 + \ldots = \theta_{\Gamma}$.

Satz

Sei L ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension $24k$, also $\min(L) = k + 1$.

- Die Schichten $\{\ell \in L \mid Q(\ell) = a\}$ sind sphärische 11-Designs.
- L is ein lokales Maximum der Dichtefunktion γ.

Extremale Gitter in den Sprungdimensionen

$$f^{(3)} = 1 + 196.560q^2 + \ldots = \theta_{\Lambda_{24}}.$$
$$f^{(6)} = 1 + 52.416.000q^3 + \ldots = \theta_{P_{48p}} = \theta_{P_{48q}} = \theta_{P_{48n}}.$$
$$f^{(9)} = 1 + 6.218.175.600q^4 + \ldots = \theta_{\Gamma}.$$

Satz

Sei L ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension $24k$, also $\min(L) = k + 1$.

- Die Schichten $\{\ell \in L \mid Q(\ell) = a\}$ sind sphärische 11-Designs.
- L is ein lokales Maximum der Dichtefunktion γ.
- Für $k = 1$ gibt es genau ein extremales Gitter, das Leech Gitter Λ_{24}.
- Λ_{24} ist das dichteste 24-dimensionale Gitter (Cohn, Kumar).
- Die 196560 kürzesten Vektoren des Leech Gitters bilden das einzige minimale sphärische 11-Design.

Extremale Gitter in den Sprungdimensionen

$f^{(3)} = 1 + 196.560q^2 + \ldots = \theta_{\Lambda_{24}}$.
$f^{(6)} = 1 + 52.416.000q^3 + \ldots = \theta_{P_{48p}} = \theta_{P_{48q}} = \theta_{P_{48n}}$.
$f^{(9)} = 1 + 6.218.175.600q^4 + \ldots = \theta_{\Gamma}$.

Satz

Sei L ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension $24k$, also $\min(L) = k + 1$.

- Die Schichten $\{\ell \in L \mid Q(\ell) = a\}$ sind sphärische 11-Designs.
- L is ein lokales Maximum der Dichtefunktion γ.
- Für $k = 1$ gibt es genau ein extremales Gitter, das Leech Gitter Λ_{24}.
- Λ_{24} ist das dichteste 24-dimensionale Gitter (Cohn, Kumar).
- Die 196560 kürzesten Vektoren des Leech Gitters bilden das einzige minimale sphärische 11-Design.
- Für $k = 2, 3$ sind die extremalen Gitter die dichtesten bekannten Gitter und haben die größte bekannte Kusszahl.

Hermitesche Gitter

Definition

Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper, mit Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_K$ und (V, h) ein n-dimensionaler Hermitescher positiv definiter K-Vektorraum.

Hermitesche Gitter

Definition

Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper, mit Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_K$ und (V, h) ein n-dimensionaler Hermitescher positiv definiter K-Vektorraum.

- Ein Gitter $P \leq V$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_K$-Teilmodul, der eine Basis von V enthält.

Hermitesche Gitter

Definition

Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper, mit Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_K$ und (V, h) ein n-dimensionaler Hermitescher positiv definiter K-Vektorraum.

- Ein Gitter $P \leq V$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_K$-Teilmodul, der eine Basis von V enthält.
- Das Minimum ist $\min(P) := \min\{h(\ell, \ell) \mid 0 \neq \ell \in P\}$.
- Die Dichte von P ist proportional zu $\gamma_h(P) := \frac{\min(P)}{\det(P)^{1/n}}$.
- Ist $P = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}_K}$ freier $\mathbb{Z}_K$-Modul, so ist $\det(P)$ die Determinante einer Grammatrix $(h(b_i, b_j))_{i,j}$ von P.

Hermitesche Gitter

Definition

Sei K ein imaginär quadratischer Zahlkörper, mit Ring der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_K$ und (V, h) ein n-dimensionaler Hermitescher positiv definiter K-Vektorraum.

- Ein Gitter $P \leq V$ ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}_K$-Teilmodul, der eine Basis von V enthält.
- Das Minimum ist $\min(P) := \min\{h(\ell, \ell) \mid 0 \neq \ell \in P\}$.
- Die Dichte von P ist proportional zu $\gamma_h(P) := \frac{\min(P)}{\det(P)^{1/n}}$.
- Ist $P = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle_{\mathbb{Z}_K}$ freier $\mathbb{Z}_K$-Modul, so ist $\det(P)$ die Determinante einer Grammatrix $(h(b_i, b_j))_{i,j}$ von P.
- Das Hermitesch duale Gitter ist

$$P^* := \{v \in V \mid h(v, \ell) \in \mathbb{Z}_K \text{ für alle } \ell \in P\}$$

Ist $P = P^*$, so heißt P Hermitesch unimodular (und dann ist $\det(P) = 1$).

$K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$, $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, $\alpha = (1 + \sqrt{-7})/2$

Dann gilt $\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$, $\beta = \overline{\alpha} = 1 - \alpha$, $\alpha\beta = 2$. Der Ring $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist ein Euklidischer Ring, für jedes $x \in K$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}[\alpha]$ mit $N(x - a) \leq \frac{4}{7}$.

$K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$, $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, $\alpha = (1+\sqrt{-7})/2$

Dann gilt $\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$, $\beta = \overline{\alpha} = 1 - \alpha$, $\alpha\beta = 2$. Der Ring $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist ein Euklidischer Ring, für jedes $x \in K$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}[\alpha]$ mit $N(x-a) \leq \frac{4}{7}$.

Das dichtestes 2-dimensionale Gitter

P_a sei das $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter mit Grammatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{-7} \\ -2/\sqrt{-7} & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\min(P_a) = 1$ und $\det(P_a) = 3/7$.

$K = \mathbb{Q}[\sqrt{-7}]$, $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, $\alpha = (1+\sqrt{-7})/2$

Dann gilt $\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$, $\beta = \overline{\alpha} = 1 - \alpha$, $\alpha\beta = 2$. Der Ring $\mathbb{Z}[\alpha]$ ist ein Euklidischer Ring, für jedes $x \in K$ gibt es ein $a \in \mathbb{Z}[\alpha]$ mit $N(x-a) \leq \frac{4}{7}$.

Das dichtestes 2-dimensionale Gitter

P_a sei das $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter mit Grammatrix $\begin{pmatrix} 1 & 2/\sqrt{-7} \\ -2/\sqrt{-7} & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $\min(P_a) = 1$ und $\det(P_a) = 3/7$.

Das Barnes Gitter

$P_b = \langle (\beta,\beta,0), (0,\beta,\beta), (\alpha,\alpha,\alpha) \rangle \leq \mathbb{Z}[\alpha]^3$ mit Hermitescher Form $h : P_b \times P_b \to \mathbb{Z}[\alpha], h((a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i\overline{b_i}$ ist ein Hermitesch unimodulares $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter mit $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\alpha]}(P_b) \cong \pm\mathrm{PSL}_2(7)$. Es gilt $\det(P_b) = 1$, $\gamma_h(P_b) = \min(P_b) = 2$. Grammatrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & \beta \\ 1 & 2 & \beta \\ \alpha & \alpha & 3 \end{pmatrix}$

Spurgitter

Spurgitter

Jedes Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter (P, h) ist ein $\mathbb{Z}$-Gitter (L, Q) der Dimension $2n$, wobei $Q(x) := h(x, x) \in \mathbb{R} \cap K = \mathbb{Q}$ gesetzt wird. Da $(x, y) = Spur_{K/\mathbb{Q}}(h(x, y))$ nennen wir (L, Q) das Spurgitter von (P, h). Es ist $\min(L) = \min(P)$, $L^{\#} = \frac{1}{\sqrt{-7}} P^*$ und $\det(L) = 7^n \det(P)^2$.

Spurgitter

Spurgitter

Jedes Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter (P, h) ist ein $\mathbb{Z}$-Gitter (L, Q) der Dimension $2n$, wobei $Q(x) := h(x, x) \in \mathbb{R} \cap K = \mathbb{Q}$ gesetzt wird. Da $(x, y) = Spur_{K/\mathbb{Q}}(h(x, y))$ nennen wir (L, Q) das Spurgitter von (P, h). Es ist $\min(L) = \min(P)$, $L^{\#} = \frac{1}{\sqrt{-7}} P^*$ und $\det(L) = 7^n \det(P)^2$.

$\mathbb{E}_8$ als Hermitesches Gitter

$$P_c := \mathbb{Z}[\alpha]^4 + \langle \frac{1}{\sqrt{-7}}(1, 1, 1, 3), \frac{1}{\sqrt{-7}}(0, 1, 3, -2) \rangle \leq K^4$$

Dann gilt $\min(P_c) = 1$, $\det(P_c) = (1/7)^2$, $P_c^* = \sqrt{-7} P_c$.
Das Spurgitter von P_c ist das gerade unimodulare Gitter $\mathbb{E}_8$.

Spurgitter

Spurgitter

Jedes Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter (P,h) ist ein $\mathbb{Z}$-Gitter (L,Q) der Dimension $2n$, wobei $Q(x) := h(x,x) \in \mathbb{R} \cap K = \mathbb{Q}$ gesetzt wird. Da $(x,y) = Spur_{K/\mathbb{Q}}(h(x,y))$ nennen wir (L,Q) das Spurgitter von (P,h). Es ist $\min(L) = \min(P)$, $L^{\#} = \frac{1}{\sqrt{-7}} P^*$ und $\det(L) = 7^n \det(P)^2$.

$\mathbb{E}_8$ als Hermitesches Gitter

$$P_c := \mathbb{Z}[\alpha]^4 + \langle \frac{1}{\sqrt{-7}}(1,1,1,3), \frac{1}{\sqrt{-7}}(0,1,3,-2)\rangle \leq K^4$$

Dann gilt $\min(P_c) = 1$, $\det(P_c) = (1/7)^2$, $P_c^* = \sqrt{-7} P_c$.
Das Spurgitter von P_c ist das gerade unimodulare Gitter $\mathbb{E}_8$.

Satz

P_a, P_b und P_c sind die dichtesten Hermiteschen $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter in Dimension 2,3,4. Für die Hermitekonstanten gilt
$\gamma_2(\mathbb{Z}[\alpha]) = \sqrt{7/3}$, $\gamma_3(\mathbb{Z}[\alpha]) = 2$, $\gamma_4(\mathbb{Z}[\alpha]) = \sqrt{7}$.

Hermitesche Tensorprodukte (Renaud Coulangeon)

Minimale Vektoren in Tensorprodukten

Seien (L, h_L) und (M, h_M) Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter der $\mathbb{Z}[\alpha]$-Dimension $n = \dim_{\mathbb{Z}[\alpha]}(L) \leq m := \dim_{\mathbb{Z}[\alpha]}(M)$. Jedes $v \in L \otimes M$ ist Summe von höchstens n Tensoren

$$v = \sum_{i=1}^{r} \ell_i \otimes m_i, \text{ mit } r =: rk(v) \text{ minimal.}$$

Hermitesche Tensorprodukte (Renaud Coulangeon)

Minimale Vektoren in Tensorprodukten

Seien (L, h_L) und (M, h_M) Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter der $\mathbb{Z}[\alpha]$-Dimension $n = \dim_{\mathbb{Z}[\alpha]}(L) \leq m := \dim_{\mathbb{Z}[\alpha]}(M)$. Jedes $v \in L \otimes M$ ist Summe von höchstens n Tensoren

$$v = \sum_{i=1}^{r} \ell_i \otimes m_i, \text{ mit } r =: rk(v) \text{ minimal.}$$

Setzt man $A := (h_L(\ell_i, \ell_j))$ und $B := (h_M(m_i, m_j))$, so ist

$$h(v, v) = \text{Spur} A\overline{B} \geq r \det(A)^{1/r} \det(B)^{1/r}.$$

Also $\min(L \otimes M) \geq \min\{r d_r(L)^{1/r} d_r(M)^{1/r} \mid r = 1, \ldots, n\}$

wo $d_r(L) = \min\{\det(T) \mid T \leq L, Rg(T) = r\}$.

Hermitesche Tensorprodukte (Renaud Coulangeon)

Minimale Vektoren in Tensorprodukten

Seien (L, h_L) und (M, h_M) Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter der $\mathbb{Z}[\alpha]$-Dimension $n = \dim_{\mathbb{Z}[\alpha]}(L) \leq m := \dim_{\mathbb{Z}[\alpha]}(M)$. Jedes $v \in L \otimes M$ ist Summe von höchstens n Tensoren

$$v = \sum_{i=1}^{r} \ell_i \otimes m_i, \text{ mit } r =: rk(v) \text{ minimal.}$$

Setzt man $A := (h_L(\ell_i, \ell_j))$ und $B := (h_M(m_i, m_j))$, so ist

$$h(v, v) = \text{Spur} A\overline{B} \geq r \det(A)^{1/r} \det(B)^{1/r}.$$

Also $\min(L \otimes M) \geq \min\{r d_r(L)^{1/r} d_r(M)^{1/r} \mid r = 1, \ldots, n\}$

wo $d_r(L) = \min\{\det(T) \mid T \leq L, Rg(T) = r\}$.
Es gilt $d_r(L)^{1/r} \geq \min(L)/\gamma_r(\mathbb{Z}[\alpha])$.

Konstruktionen extremaler Gitter mit Zahlkörpern

Das Leech-Gitter als Tensorprodukt

Sei $P := P_b \otimes_{\mathbb{Z}[\alpha]} P_c$. Dann ist $\min(P) = 2$ und das Spurgitter von P ist ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension 24, also isometrisch zum Leech Gitter.

Konstruktionen extremaler Gitter mit Zahlkörpern

Das Leech-Gitter als Tensorprodukt

Sei $P := P_b \otimes_{\mathbb{Z}[\alpha]} P_c$. Dann ist $\min(P) = 2$ und das Spurgitter von P ist ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension 24, also isometrisch zum Leech Gitter.

<u>Beweis:</u> Das Spurgitter ist gerade und unimodular, da P_b Hermitesch unimodular ist und $\mathbb{E}_8$ gerades unimodulares $\mathbb{Z}$-Gitter. Zeigen $\min(P) \geq 2$:

Konstruktionen extremaler Gitter mit Zahlkörpern

Das Leech-Gitter als Tensorprodukt

Sei $P := P_b \otimes_{\mathbb{Z}[\alpha]} P_c$. Dann ist $\min(P) = 2$ und das Spurgitter von P ist ein extremales gerades unimodulares Gitter der Dimension 24, also isometrisch zum Leech Gitter.

Beweis: Das Spurgitter ist gerade und unimodular, da P_b Hermitesch unimodular ist und $\mathbb{E}_8$ gerades unimodulares $\mathbb{Z}$-Gitter. Zeigen $\min(P) \geq 2$:

r	1	2	3
$d_r(P_b)$	2	2	1
$d_r(P_c)$	1	$3/7$	$\geq 1/8$
$rd_r(P_b)^{1/r}d_r(P_c)^{1/r}$	2	$1,85$	$\geq 1,5$

$$\min(L \otimes M) \geq \min\{rd_r(L)^{1/r}d_r(M)^{1/r} \mid r = 1, \ldots, n\}$$

Hermitesche Strukturen des Leech Gitters

Satz (M. Hentschel, 2009)

Es gibt genau 9 Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter $P_1, \dots, P_9$, deren Spurgitter das Leech Gitter ist.

i	$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\alpha]}(P_i)$	Ordnung	
1	$\mathrm{SL}_2(25)$	$2^4 3 \cdot 5^2 13$	
2	$2.A_6 \times D_8$	$2^7 3^2 5$	
3	$\mathrm{SL}_2(13).2$	$2^4 3 \cdot 7 \cdot 13$	
4	$(\mathrm{SL}_2(5) \times A_5).2$	$2^6 3^2 5^2$	
5	$(\mathrm{SL}_2(5) \times A_5).2$	$2^6 3^2 5^2$	
6	auflösbar	$2^9 3^3$	
7	$\pm\mathrm{PSL}_2(7) \times (C_7 : C_3)$	$2^4 3^2 7^2$	
8	$\mathrm{PSL}_2(7) \times 2.A_7$	$2^7 3^3 5 \cdot 7^2$	
9	$2.J_2.2$	$2^9 3^3 5^2 7$	

Hermitesche Strukturen des Leech Gitters

Satz (M. Hentschel, 2009)

Es gibt genau 9 Hermitesche $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter $P_1, \ldots, P_9$, deren Spurgitter das Leech Gitter ist.

i	$\mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}[\alpha]}(P_i)$	Ordnung	# Q(v) = 3
1	$\mathrm{SL}_2(25)$	$2^4 3 \cdot 5^2 13$	0
2	$2.A_6 \times D_8$	$2^7 3^2 5$	$2 \cdot 20.160$
3	$\mathrm{SL}_2(13).2$	$2^4 3 \cdot 7 \cdot 13$	$2 \cdot 52.416$
4	$(\mathrm{SL}_2(5) \times A_5).2$	$2^6 3^2 5^2$	$2 \cdot 100.800$
5	$(\mathrm{SL}_2(5) \times A_5).2$	$2^6 3^2 5^2$	$2 \cdot 100.800$
6	auflösbar	$2^9 3^3$	$2 \cdot 177.408$
7	$\pm\mathrm{PSL}_2(7) \times (C_7 : C_3)$	$2^4 3^2 7^2$	$2 \cdot 306.432$
8	$\mathrm{PSL}_2(7) \times 2.A_7$	$2^7 3^3 5 \cdot 7^2$	$2 \cdot 504.000$
9	$2.J_2.2$	$2^9 3^3 5^2 7$	$2 \cdot 1.209.600$

72-dimensionale gerade unimodulare Spurgitter

Satz

Sei P ein Hermitesches $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter mit $\min(P) = 2$. Dann ist $\min(P \otimes P_b) \geq 3$ und $\min(P \otimes P_b) > 3$ genau dann wenn P kein Teilgitter isometrisch zu P_b besitzt.

72-dimensionale gerade unimodulare Spurgitter

Satz

Sei P ein Hermitesches $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter mit $\min(P) = 2$. Dann ist $\min(P \otimes P_b) \geq 3$ und $\min(P \otimes P_b) > 3$ genau dann wenn P kein Teilgitter isometrisch zu P_b besitzt.

Beweis.

r	1	2	3
$d_r(P_b)^{1/r}$	2	$\sqrt{2}$	1
$d_r(P)^{1/r}$	2	$\geq 2\sqrt{3/7}$	≥ 1
$rd_r(P_b)^{1/r}d_r(P)^{1/r}$	4	$\geq 3,7$	≥ 3

Dabei gilt $d_3(P) > 1$ falls P_b kein Teilgitter von P ist.

72-dimensionale gerade unimodulare Spurgitter

Satz

Sei P ein Hermitesches $\mathbb{Z}[\alpha]$-Gitter mit $\min(P) = 2$. Dann ist $\min(P \otimes P_b) \geq 3$ und $\min(P \otimes P_b) > 3$ genau dann wenn P kein Teilgitter isometrisch zu P_b besitzt.

Beweis.

r	1	2	3
$d_r(P_b)^{1/r}$	2	$\sqrt{2}$	1
$d_r(P)^{1/r}$	2	$\geq 2\sqrt{3/7}$	≥ 1
$rd_r(P_b)^{1/r}d_r(P)^{1/r}$	4	$\geq 3,7$	≥ 3

Dabei gilt $d_3(P) > 1$ falls P_b kein Teilgitter von P ist.

Folgerung

Für die 9 Hermiteschen Strukturen des Leech Gitters gilt $\min(P_i \otimes P_b) \geq 3$ und $\min(P_i \otimes P_b) = 4$ falls P_i das Gitter P_b nicht darstellt.

Ein extremales 72-dimensionales Gitter

Satz

$d_3(P_i) = 1$ für $i = 2, \ldots, 9$ jedoch $d_3(P_1) > 1$, also $\min(P_1 \otimes P_b) = 4$.

Ein extremales 72-dimensionales Gitter

Satz

$d_3(P_i) = 1$ für $i = 2, \ldots, 9$ jedoch $d_3(P_1) > 1$, also $\min(P_1 \otimes P_b) = 4$.

Hauptsatz

Sei Γ das Spurgitter von $P_1 \otimes P_b$.

- Γ ist extremales gerades unimodulares Gitter in Dimension 72.

Ein extremales 72-dimensionales Gitter

Satz

$d_3(P_i) = 1$ für $i = 2, \dots, 9$ jedoch $d_3(P_1) > 1$, also $\min(P_1 \otimes P_b) = 4$.

Hauptsatz

Sei Γ das Spurgitter von $P_1 \otimes P_b$.

- Γ ist extremales gerades unimodulares Gitter in Dimension 72.
- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ enthält $\mathcal{U} := (\mathrm{PSL}_2(7) \times \mathrm{SL}_2(25)) : 2$.
- $\mathcal{U}$ ist absolut irreduzible Untergruppe von $\mathrm{GL}_{72}(\mathbb{Q})$.
- Alle $\mathcal{U}$-invarianten Gitter in ähnlich zu Γ.
- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ ist eine maximal endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_{72}(\mathbb{Q})$.

Ein extremales 72-dimensionales Gitter

Satz

$d_3(P_i) = 1$ für $i = 2, \dots, 9$ jedoch $d_3(P_1) > 1$, also $\min(P_1 \otimes P_b) = 4$.

Hauptsatz

Sei Γ das Spurgitter von $P_1 \otimes P_b$.

- Γ ist extremales gerades unimodulares Gitter in Dimension 72.
- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ enthält $\mathcal{U} := (\mathrm{PSL}_2(7) \times \mathrm{SL}_2(25)) : 2$.
- $\mathcal{U}$ ist absolut irreduzible Untergruppe von $\mathrm{GL}_{72}(\mathbb{Q})$.
- Alle $\mathcal{U}$-invarianten Gitter in ähnlich zu Γ.
- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ ist eine maximal endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_{72}(\mathbb{Q})$.
- Γ ist das dichteste bekannte Gitter und hat die maximale bekannte Kusszahl in Dimension 72.

Ein extremales 72-dimensionales Gitter

Satz

$d_3(P_i) = 1$ für $i = 2, \ldots, 9$ jedoch $d_3(P_1) > 1$, also $\min(P_1 \otimes P_b) = 4$.

Hauptsatz

Sei Γ das Spurgitter von $P_1 \otimes P_b$.

- Γ ist extremales gerades unimodulares Gitter in Dimension 72.
- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ enthält $\mathcal{U} := (\mathrm{PSL}_2(7) \times \mathrm{SL}_2(25)) : 2$.
- $\mathcal{U}$ ist absolut irreduzible Untergruppe von $\mathrm{GL}_{72}(\mathbb{Q})$.
- Alle $\mathcal{U}$-invarianten Gitter in ähnlich zu Γ.
- $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ ist eine maximal endliche Untergruppe von $\mathrm{GL}_{72}(\mathbb{Q})$.
- Γ ist das dichteste bekannte Gitter und hat die maximale bekannte Kusszahl in Dimension 72.
- Die Tensorproduktstruktur von Γ kann man zum Dekodieren benutzen: Annika Meyer.

Stehlé, Watkins Extremalitätsbeweis

Satz (Stehlé, Watkins (2010))

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in Dimension 72 mit $\min(L) \geq 3$. Dann ist L extremal, genau dann wenn es mindestens $6.218.175.600$ Vektoren v enthält mit $Q(v) = 4$.

Stehlé, Watkins Extremalitätsbeweis

Satz (Stehlé, Watkins (2010))

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in Dimension 72 mit $\min(L) \geq 3$. Dann ist L extremal, genau dann wenn es mindestens $6.218.175.600$ Vektoren v enthält mit $Q(v) = 4$.

<u>Beweis:</u> Die Theta Reihe von L ist

$$\theta_L = 1 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + \ldots = f^{(9)} + a_3 \Delta^3.$$

$$\begin{array}{ccccccc} f^{(9)} & = & 1 & + & & 6.218.175.600 q^4 & + \ldots \\ \Delta^3 & = & & & q^3 & -72 q^4 & + \ldots \end{array}$$

Also ist $a_4 = 6.218.175.600 - 72 a_3 \geq 6.218.175.600 \Leftrightarrow a_3 = 0$.

Stehlé, Watkins Extremalitätsbeweis

Satz (Stehlé, Watkins (2010))

Sei L ein gerades unimodulares Gitter in Dimension 72 mit $\min(L) \geq 3$. Dann ist L extremal, genau dann wenn es mindestens $6.218.175.600$ Vektoren v enthält mit $Q(v) = 4$.

<u>Beweis:</u> Die Theta Reihe von L ist

$$\theta_L = 1 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + \ldots = f^{(9)} + a_3 \Delta^3.$$

$$\begin{array}{ccccccc} f^{(9)} & = & 1 & + & 6.218.175.600 q^4 & + \ldots \\ \Delta^3 & = & & q^3 & -72 q^4 & + \ldots \end{array}$$

Also ist $a_4 = 6.218.175.600 - 72 a_3 \geq 6.218.175.600 \Leftrightarrow a_3 = 0$.

Bemerkung

Ein analoger Beweis gilt in allen Sprungdimensionen $24k$ für Gitter mit Minimum $\geq k$.
In Dimension $24k + 8$ muss man Vektoren v betrachten mit $Q(v) = k + 2$.

Ausblick

- Spurgitter Hermitescher Tensorprodukte scheinen gute Gitter in kleinen Dimensionen.
- Finde computerfreien Beweis für die Extremalität von Γ!
- Warum gerade $\mathbb{Z}[\alpha]$? Was ist mit $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\zeta_3]$?
- Gibt es weitere extremale gerade unimodulare Gitter in Dimension 72?
- Mit Richard Parker haben wir einen Computerbeweis, dass Γ das einzige Gitter ist, das man mit der Turyn Konstruktion aus dem Leech Gitter konstruieren kann.
- Wieviele extremale Gitter gibt es in Dimension 48?
- Was ist mit Dimension 96, 120?
- Gibt es Nicht-Existenzbeweise für extremale Gitter in Dimension $\leq$ 1000?

Turyns Konstruktion

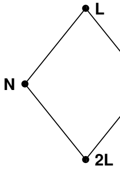
- Sei (L, Q) ein n-dimensionales gerades unimodulares Gitter.
- Dann gibt es Teilgitter $M, N \leq L$ mit $M + N = L$, $M \cap N = 2L$, so dass $(M, \frac{1}{2}Q)$, $(N, \frac{1}{2}Q)$ gerade und unimodular.
- (M, N) heißt dann eine Polarisierung von L.

Turyns Konstruktion

- Sei (L, Q) ein n-dimensionales gerades unimodulares Gitter.
- Dann gibt es Teilgitter $M, N \leq L$ mit $M + N = L$, $M \cap N = 2L$, so dass $(M, \frac{1}{2}Q)$, $(N, \frac{1}{2}Q)$ gerade und unimodular.
- (M, N) heißt dann eine Polarisierung von L.
- Sei $\mathcal{L}(M, N) :=$

$$\{(m + a, m + b, m + c) \in L^3 \mid m \in M, a, b, c \in N, a + b + c \in 2L\}.$$

- Dann ist $\mathcal{L}(M, N)$ mit $\tilde{Q}(x, y, z) := \frac{1}{2}(Q(x) + +Q(y) + Q(z))$ ein gerades unimodulares Gitter der Dimension $3n$.

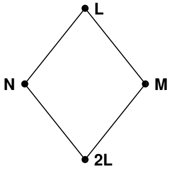


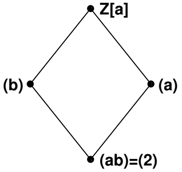
Turyns Konstruktion

- Sei (L, Q) ein n-dimensionales gerades unimodulares Gitter.
- Dann gibt es Teilgitter $M, N \leq L$ mit $M + N = L$, $M \cap N = 2L$, so dass $(M, \frac{1}{2}Q)$, $(N, \frac{1}{2}Q)$ gerade und unimodular.
- (M, N) heißt dann eine Polarisierung von L.
- Sei $\mathcal{L}(M, N) :=$

$$\{(m + a, m + b, m + c) \in L^3 \mid m \in M, a, b, c \in N, a + b + c \in 2L\}.$$

- Dann ist $\mathcal{L}(M, N)$ mit $\tilde{Q}(x, y, z) := \frac{1}{2}(Q(x) + +Q(y) + Q(z))$ ein gerades unimodulares Gitter der Dimension $3n$.



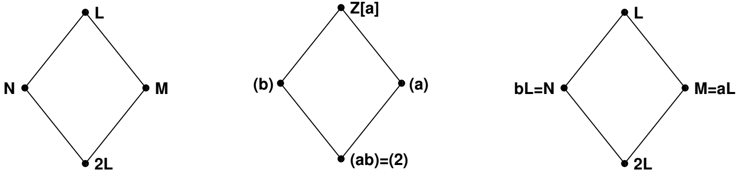


Turyns Konstruktion

- Sei (L,Q) ein n-dimensionales gerades unimodulares Gitter.
- Dann gibt es Teilgitter $M,N \leq L$ mit $M+N=L$, $M\cap N = 2L$, so dass $(M,\frac{1}{2}Q)$, $(N,\frac{1}{2}Q)$ gerade und unimodular.
- (M,N) heißt dann eine Polarisierung von L.
- Sei $\mathcal{L}(M,N) :=$

$$\{(m+a, m+b, m+c) \in L^3 \mid m \in M, a,b,c \in N, a+b+c \in 2L\}.$$

- Dann ist $\mathcal{L}(M,N)$ mit $\tilde{Q}(x,y,z) := \frac{1}{2}(Q(x)++Q(y)+Q(z))$ ein gerades unimodulares Gitter der Dimension $3n$.



Turyn versus Hermitesche Tensorprodukte

- $P_b = \langle(\beta,\beta,0),(0,\beta,\beta),(\alpha,\alpha,\alpha)\rangle \leq \mathbb{Z}[\alpha]^3$
- $h : P_b \times P_b \to \mathbb{Z}[\alpha], h((a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} a_i\overline{b_i}.$

Turyn versus Hermitesche Tensorprodukte

- $P_b = \langle (\beta, \beta, 0), (0, \beta, \beta), (\alpha, \alpha, \alpha) \rangle \leq \mathbb{Z}[\alpha]^3$
- $h : P_b \times P_b \to \mathbb{Z}[\alpha], h((a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} a_i \overline{b_i}.$
- Ist $\alpha \in \mathrm{End}(L)$ mit $\alpha^{ad} = \beta = 1 - \alpha$ und $\alpha^2 - \alpha + 2 = 0$, so ist

$$M := \alpha L, N := \beta L, \text{ eine Polarisierung von } L$$

$$\text{mit } (M, \frac{1}{2}Q) \cong (N, \frac{1}{2}Q) \cong (L, Q)$$

Turyn versus Hermitesche Tensorprodukte

- $P_b = \langle(\beta,\beta,0),(0,\beta,\beta),(\alpha,\alpha,\alpha)\rangle \leq \mathbb{Z}[\alpha]^3$
- $h : P_b \times P_b \to \mathbb{Z}[\alpha], h((a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 a_i\overline{b_i}$.
- Ist $\alpha \in \mathrm{End}(L)$ mit $\alpha^{ad} = \beta = 1-\alpha$ und $\alpha^2-\alpha+2=0$, so ist

$$M := \alpha L, N := \beta L, \text{ eine Polarisierung von } L$$

$$\text{mit } (M, \frac{1}{2}Q) \cong (N, \frac{1}{2}Q) \cong (L,Q)$$

- Es gilt $L \otimes_{\mathbb{Z}[\alpha]} P_b \cong \mathfrak{L}(M,N)$.

$$\mathfrak{L}(M,N) = \{(m+a, m+b, m+c) \in L^3 \mid m \in M, a,b,c \in N, a+b+c \in 2L\}.$$

Das Minimum der Turyn Gitter

(m+a,m+b,m+c) in

- $L \perp L \perp L$
- L(M,N)
- $2L \perp 2L \perp 2L$

m in M

a,b,c in N

a+b+c in 2L

Sei $d := \min(L, Q) = \min(M, \frac{1}{2}Q) = \min(N, \frac{1}{2}Q)$

Dann ist $\lceil \frac{3d}{2} \rceil \leq \min(\mathcal{L}(M, N)) \leq 2d$.

Das Minimum der Turyn Gitter

(m+a,m+b,m+c) in
- **L ⊥ L ⊥ L**
- **L(M,N)**
- **2L⊥2L⊥2L**

m in M

a,b,c in N

a+b+c in 2L

Sei $d := \min(L, Q) = \min(M, \frac{1}{2}Q) = \min(N, \frac{1}{2}Q)$

Dann ist $\lceil \frac{3d}{2} \rceil \leq \min(\mathcal{L}(M, N)) \leq 2d$.

<u>Beweis:</u>

$(a, 0, 0)$ $a = 2\ell \in 2L$ dann $\frac{1}{2}Q(2\ell) = 2Q(\ell) \geq 2d$.

Das Minimum der Turyn Gitter

L ⊥ L ⊥ L

(m+a,m+b,m+c) in L(M,N)

2L⊥2L⊥2L

m in M

a,b,c in N

a+b+c in 2L

Sei $d := \min(L, Q) = \min(M, \frac{1}{2}Q) = \min(N, \frac{1}{2}Q)$

Dann ist $\lceil \frac{3d}{2} \rceil \leq \min(\mathcal{L}(M, N)) \leq 2d$.

Beweis:

$(a, 0, 0)$ $a = 2\ell \in 2L$ dann $\frac{1}{2}Q(2\ell) = 2Q(\ell) \geq 2d$.

$(a, b, 0)$ $a, b \in N$ dann $\frac{1}{2}Q(a) + \frac{1}{2}Q(b) \geq 2d$.

Das Minimum der Turyn Gitter

(m+a,m+b,m+c) in
- **L ⊥ L ⊥ L**
- **L(M,N)**
- **2L⊥2L⊥2L**

m in M

a,b,c in N

a+b+c in 2L

Sei $d := \min(L, Q) = \min(M, \frac{1}{2}Q) = \min(N, \frac{1}{2}Q)$

Dann ist $\lceil \frac{3d}{2} \rceil \leq \min(\mathcal{L}(M, N)) \leq 2d$.

Beweis:

$(a, 0, 0)$ $a = 2\ell \in 2L$ dann $\frac{1}{2}Q(2\ell) = 2Q(\ell) \geq 2d$.

$(a, b, 0)$ $a, b \in N$ dann $\frac{1}{2}Q(a) + \frac{1}{2}Q(b) \geq 2d$.

(a, b, c) dann $\frac{1}{2}(Q(a) + Q(b) + Q(c)) \geq \frac{3}{2}d$.

Das Minimum der Turyn Gitter

(m+a,m+b,m+c) in

- **L ⊥ L ⊥ L** — **m in M**
- **L(M,N)** — **a,b,c in N**
- **2L⊥2L⊥2L** — **a+b+c in 2L**

Sei $d := \min(L,Q) = \min(M, \frac{1}{2}Q) = \min(N, \frac{1}{2}Q)$

Dann ist $\lceil \frac{3d}{2} \rceil \leq \min(\mathcal{L}(M,N)) \leq 2d$.

<u>Beweis:</u>

$(a,0,0)$ $a = 2\ell \in 2L$ dann $\frac{1}{2}Q(2\ell) = 2Q(\ell) \geq 2d$.

$(a,b,0)$ $a,b \in N$ dann $\frac{1}{2}Q(a) + \frac{1}{2}Q(b) \geq 2d$.

(a,b,c) dann $\frac{1}{2}(Q(a) + Q(b) + Q(c)) \geq \frac{3}{2}d$.

Folgerung

Ist $(L,Q) \cong \mathbb{E}_8$, so ist $\mathcal{L}(M,N) \cong \Lambda_{24}$.
Ist $(L,Q) \cong (M, \frac{1}{2}Q) \cong (N, \frac{1}{2}Q) \cong \Lambda_{24}$ so ist $3 \leq \min(\mathcal{L}(M,N)) \leq 4$.

Die Vektoren v mit $Q(v) = 3$

$(L, Q) \cong (M, \frac{1}{2}Q) \cong (N, \frac{1}{2}Q) \cong \Lambda_{24}$

Ist $y := (y_1, y_2, y_3) = (m + a, m + b, m + c) \in \mathfrak{L}(M, N)$ so dass $\tilde{Q}(y) = 3 \Rightarrow$ alle

$$y_i \in m + N \cap \mathrm{Min}(\Lambda_{24}) = \{\pm y_1, \ldots, \pm y_{24}\}$$

und $m + y_1 + y_2 + y_3 \in 2L$.

L ⊥ L ⊥ L

(m+a,m+b,m+c) in L(M,N)

2L⊥2L⊥2L

m in M

a,b,c in N

a+b+c in 2L

Die Vektoren v mit $Q(v) = 3$

$(L, Q) \cong (M, \frac{1}{2}Q) \cong (N, \frac{1}{2}Q) \cong \Lambda_{24}$

Ist $y := (y_1, y_2, y_3) = (m + a, m + b, m + c) \in \mathcal{L}(M, N)$ so dass $\tilde{Q}(y) = 3 \Rightarrow$ alle

$$y_i \in m + N \cap \mathrm{Min}(\Lambda_{24}) = \{\pm y_1, \ldots, \pm y_{24}\}$$

und $m + y_1 + y_2 + y_3 \in 2L$.

L ⊥ L ⊥ L

(m+a,m+b,m+c) in L(M,N)

2L⊥2L⊥2L

m in M

a,b,c in N

a+b+c in 2L

Algorithmus:

Für alle 4095 Klassen $0 \neq m + 2L \in M/2L$ und alle 24^2 Paare $(y_1, y_2) \in (m + N \cap \mathrm{Min}(\Lambda_{24}))^2$ teste ob $\langle 2L, m + y_1 + y_2 \rangle$ Minimum ≥ 3 hat.

Einige Daten zur Turyn Konstruktion

1967 Turyn: Konstruktion des Golay codes $\mathcal{G}_{24}$ aus dem Hamming Code e_8.

78,82,84 Tits; Lepowsky, Meurman; Quebbemann: Konstruktion des Leech Gitters Λ_{24} aus $\mathbb{E}_8$.

1996 Gross, Elkies: Λ_{24} aus $\mathbb{E}_8$ als Hermitesches Tensorprodukt.

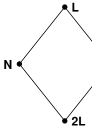
1998 Bachoc, N.: Konstruktion zweier 80-dimensionaler extremaler Gitter aus $\mathbb{E}_8$ als Hermitesches Tensorprodukt.

2010 Griess: Erinnert an Lepowsky, Meurman Konstruktion von Leech, schlägt Konstruktion von 72-dim. Gittern aus Λ_{24} vor.

2010 N.: Finde gute Polarisierung von Λ_{24}, so dass $min(\mathcal{L}(M,N)) = 4$ (Chance ca. 1:10^{16}).

N. Hatte dazu 9 Kandidaten $M = \alpha L, N = \overline{\alpha} L$ mit $\alpha = \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ (Dissertation Michael Hentschel).

Alle Polarisierungen



Grobe Schätzung liefert ca. 10^{10} Bahnen der Automorphismengruppe des Leech Gitters auf den Polarisierungen (M, N) mit $(M, \frac{1}{2}Q) \cong (N, \frac{1}{2}Q) \cong \Lambda_{24}$.

Satz (Richard Parker, N.)

Es gibt genau eine Bahn von $\mathrm{Aut}(\Lambda_{24}) \cong 2.Co_1$ von Polarisierungen, für welche $\mathcal{L}(M, N)$ extremal ist.

Beweis Für alle sechszehn $\mathrm{Aut}(\Lambda_{24})$-Bahnen auf $\{N\}$, suche die "guten" Komplemente M, für die $\mathcal{L}(M, N)$ extremal ist.
N definiert eine Menge von schlechten Vektoren $B(N) \subset \Lambda_{24}/2\Lambda_{24}$, so dass $\mathcal{L}(M, N)$ extremal, genau dann wenn $M \cap B(N) = \emptyset$.
Insgesamt ca. 2 CPU Jahre Rechenzeit.

Bahnen auf reskalierten Leech Gittern

	Stabilisator	Ordnung	Bahnlänge
1	$PSL_2(25):2$	$2^4 3 \cdot 5^2 13$	$2.7 \cdot 10^{14}$
2	$A_7 \times PSL_2(7)$	$2^6 3^3 5 \cdot 7^2$	$9.8 \cdot 10^{12}$
3	$S_3 \times PSL_2(13)$	$2^3 3^2 7 \cdot 13$	$6.3 \cdot 10^{14}$
4	$3.A_6 \times A_5$	$2^6 3^4 5^2$	$3.2 \cdot 10^{13}$
5	$PSL_2(7) \times PSL_2(7)$	$2^6 3^2 7^2$	$1.5 \cdot 10^{14}$
6	$A_5 \times$ auflösbar	$2^{15} 3^3 5$	$9.4 \cdot 10^{11}$
7	$G_2(4) \times A_4$	$2^{15} 3^4 5^2 7 \cdot 13$	$6.9 \cdot 10^8$
8	$PSL_2(23)$	$2^3 3 \cdot 11 \cdot 23$	$6.9 \cdot 10^{14}$
9	auflösbar	$2^{11} 3$	$6.8 \cdot 10^{14}$
10	auflösbar	$2^{12} 3^2$	$1.1 \cdot 10^{14}$
11	auflösbar	$2^8 3 \cdot 7$	$7.7 \cdot 10^{14}$
12	auflösbar	$2^{11} 3^2$	$2.3 \cdot 10^{14}$
13	$3.A_7.2$	$2^4 3^3 5 \cdot 7$	$2.7 \cdot 10^{14}$
14	auflösbar	$2^9 3 \cdot 5$	$5.4 \cdot 10^{14}$
15	auflösbar	$2^8 3 \cdot 7$	$7.7 \cdot 10^{14}$
16	auflösbar	$2^{14} 3^3$	$9.3 \cdot 10^{12}$

Ausblick

- Spurgitter Hermitescher Tensorprodukte scheinen gute Gitter in kleinen Dimensionen.
- Finde computerfreien Beweis für die Extremalität von Γ.
- Warum gerade $\mathbb{Z}[\alpha]$? Was ist mit $\mathbb{Z}[i]$, $\mathbb{Z}[\zeta_3]$?
- Wieviele extremale Gitter gibt es in Dimension 48?
- Gibt es weitere extremale gerade unimodulare Gitter in Dimension 72?
- Was ist mit Dimension 96, 120?
- Gibt es Nicht-Existenzbeweise für extremale Gitter in Dimension ≤ 1000?