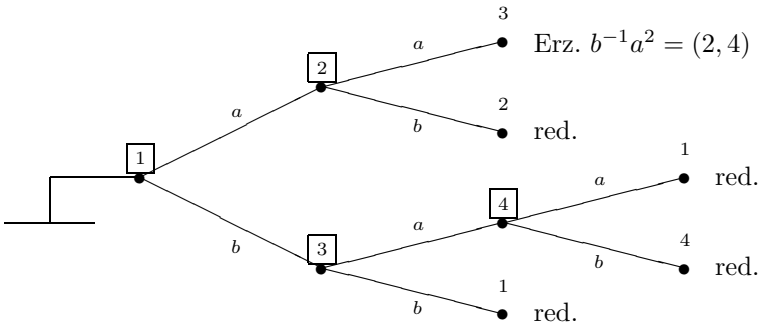
G. Nebe, M. Künzer 29.03.2005

Algebra I, WS 04/05

Lösung Nachklausur

Aufgabe 1.

(1) Wählt man z.B. 1 als erstes Element der base, so erhalten wir folgenden Baum.



Daraus ergeben sich die folgenden strong generators.

$$\begin{array}{lcll} w_1(1) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\ w_1(2) & = & a & = & (1,2,3,4) \\ w_1(3) & = & b & = & (1,3) \\ w_1(4) & = & ab & = & (1,4)(2,3) \end{array}$$

Es ist $\mathrm{Stab}_G(1) = \langle ba^2 \rangle = \langle (2,4) \rangle$.

Wählt wir z.B. 2 als zweites Basiselement und schreiben $c := ba^2$, so ergeben sich aus dem Baum

$$\boxed{2} \xrightarrow{c} \boxed{4} \xrightarrow{c} 2 \ : \ \text{red.}$$

die strong generators

$$\begin{array}{lcll} w_2(2) & = & 1 & = & \mathrm{id} \\ w_2(4) & = & ba^2 & = & (2,4) \end{array}$$

Es ist nun bereits $\mathrm{Stab}_G(1,2) = 1$.

(2) Es ist $(1,2)(3,4) \in G$ genau dann, wenn $w_1(2)^{-1}(1,2)(3,4) = (2,4) \in \mathrm{Stab}_G(1)$. Dies ist der Fall (da $w_2(4)^{-1}(2,4) = 1 \in \mathrm{Stab}_G(1,2)$, wenn man möchte), und in der Tat ist

$$w_1(2)^{-1}(1,2)(3,4) \ = \ ba^2 \ ,$$

und also z.B. $(1,2)(3,4) = w_1(2)ba^2 = aba^2$.

Aufgabe 2.

(1) Es ist $\mu_{\alpha,\mathbf{Q}}(X) = X^2 - 2X + 2$, speziell also $\alpha^2 = 2\alpha - 2$ und $2/\alpha = 2 - \alpha$. Da $2 = (1+i)(1-i) \in (\alpha)$, ist

$$\begin{array}{rcl} R/(\alpha) & = & \mathbf{Z}[\alpha]/(2,\alpha) \\ & \simeq & \mathbf{Z}[X]/(X^2 - 2X + 2, 2, X) \\ & \simeq & \mathbf{F}_2[X]/(X) \\ & \simeq & \mathbf{F}_2 \end{array}$$

ein Integritätsbereich, und damit $\alpha \in R$ ein Primelement. Außerdem folgt $|R/(\alpha^k)| = 2^k$ für $k \geq 1$.

Da ferner $\alpha^2/2 = i$ eine Einheit in R ist, ist $(\alpha^2) = (2)$.

(2) Umformen gibt z.B.

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & \alpha & 4 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \alpha-2 \\ 0 & 1 & 2\alpha-4 & 2-2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Somit wird $\operatorname{Cokern}(u) \simeq R/(\alpha) \oplus R/(\alpha)$.

Ferner ergibt sich die Elementarteilerform von $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha-2 \\ 2\alpha-4 & 2-2\alpha \end{smallmatrix}\right)$ zu $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{smallmatrix}\right)$. Es wird somit $\operatorname{Bild}(u) \simeq R/(\alpha) \oplus R/(2\alpha)$.

Probe: $|\operatorname{Cokern}(u)| = 2^{1+1}$, $|\operatorname{Bild}(u)| = 2^{1+3}$ und $|Y| = 2^{4+2}$ ist in Ordnung.

Aufgabe 3.

(1) Die Menge der Teiler von $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ ist $\{1, 5, 7, 11, 35, 55, 77, 385\}$. Somit gibt es eine zyklische 7-Sylowgruppe P_5, eine zyklische 11-Sylowgruppe P_{11}, und entweder eine oder elf 5-Sylowgruppen. Gäbe es nur eine 5-Sylowgruppe P_5, notwendig zyklisch, so wäre G isomorph zu $P_5 \times P_7 \times P_{11}$, und damit abelsch. Also gibt es elf 5-Sylowgruppen, und also $11 \cdot (5-1) = 44$ Elemente der Ordnung 5.

(2) Um ein nichtabelsches semidirektes Produkt von $C_7 \times C_{11}$ mit C_5 zu erhalten, brauchen wir einen nichttrivialen Gruppenmorphismus von C_5 nach $\operatorname{Aut}(C_7 \times C_{11})$, i.e. wir brauchen ein Element der Ordnung 5 in $\operatorname{Aut}(C_7 \times C_{11}) \simeq \operatorname{Aut}(C_7) \times \operatorname{Aut}(C_{11})$. Nun ist $\operatorname{Aut}(C_{11}) \simeq (\mathbf{Z}/11\mathbf{Z})^* \simeq C_{10}$, enthält also insbesondere ein Element der Ordnung 5.

Aufgabe 4 **(20 Punkte)**

Berechnung des Zerfällungskörpers E.

Sei $K_0 := K$.

Schritt 1 a. Wir zerlegen $f(X)$ in irreduzible Faktoren in $K_0[X]$ (erübrigt sich hier nach Voraussetzung). Wir sind fertig, falls alle diese irreduziblen Faktoren von $f(X)$ Grad 1 haben.

Schritt 1 b. Sei K_1 ein Wurzelkörper über K_0 eines irreduziblen Faktors $f_1(X) \in K_0[X]$ von $f(X)$ von Grad > 1, sei a_1 eine Wurzel dieses Faktors, und sei $K_1 := K_0(a_1)$.

Schritt 2 a. Wir zerlegen $f(X)$ in irreduzible Faktoren in $K_1[X]$. Wir sind fertig, falls alle diese irreduziblen Faktoren von $f(X)$ Grad 1 haben.

Schritt 2 b. Sei K_2 ein Wurzelkörper über K_1 eines irreduziblen Faktors $f_2(X) \in K_1[X]$ von $f(X)$ von Grad > 1, sei a_2 eine Wurzel dieses Faktors, und sei $K_2 := K_1(a_2)$.

Schritt 3 a. Wir zerlegen $f(X)$ in irreduzible Faktoren in $K_2[X]$. Wir sind fertig, falls alle diese irreduziblen Faktoren von $f(X)$ Grad 1 haben.

Schritt 3 b. Sei K_3 ein Wurzelkörper über K_2 eines irreduziblen Faktors $f_3(X) \in K_2[X]$ von $f(X)$ von Grad > 1, sei a_3 eine Wurzel dieses Faktors, und sei $K_3 := K_2(a_3)$.

Und so fort.

Das Verfahren bricht ab, sobald $f(X)$ in $K_j[X]$ in Faktoren von Grad 1 zerfällt. Dann ist K_j von diesen Wurzeln erzeugt über K (sogar schon von einer j-elementigen Teilmenge der Menge der Wurzeln). (Da sich in jedem Schritt die Zahl der irreduziblen Faktoren von $f(X)$ um wenigstens 1 erhöht, bricht das Verfahren auch tatsächlich nach höchstens $\deg(f) - 1$ Schritten ab.) Somit können wir $E := K_j$ setzen.

Berechnung der Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(E|K)$ *als Menge.*

Schreibe $f(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n) \in E[X]$, wobei $n := \deg(f)$. Sei $E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$.

Ein Automorphismus ist gegeben durch ein Tupel $(\beta_1, \ldots, \beta_j)$ mit allen β_i in $A := \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, unter folgender Bedingung.

Zu Anfang ist das leere Tupel () *zulässig.*

Sei $(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1})$ bereits auf zulässige Weise gewählt. Dieses Tupel definiert einen Isomorphismus

$$K(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}) \xrightarrow[\sim]{\varphi_{i-1}} K(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1})$$

über K von Teilkörpern von E, welcher α_s auf β_s schickt für alle $s \in [1, i-1]$. Nun ist β_i als Nullstelle von $f_i^{\varphi_{i-1}}(X)$ zu wählen, i.e. als Nullstelle des aus $f_i(X)$ durch Ersetzung von α_s durch β_s für alle $s \in [1, i-1]$ hervorgehenden Polynoms. Ist dies der Fall, so ist $(\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i)$ *zulässig.* Diese Wahl definiert dann ihrerseits einen Isomorphismus $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) \xrightarrow[\sim]{\varphi_i} K(\beta_1, \ldots, \beta_i)$, mit dem man fortfahren kann.

Die Menge der zulässigen Tupel $(\beta_1, \ldots, \beta_j)$ der Länge j definiert einen Automorphismus von E, und steht so in Bijektion zur Menge $\mathrm{Gal}(E|K)$. In anderen Worten, als Menge läßt sich $\mathrm{Gal}(E|K)$ über die zulässigen Tupel von Länge j beschreiben.

Berechnung der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(E|K)$ *als Gruppe.*

Sei ein Automorphismus σ von E über K durch das Bildtupel $(\beta_1, \ldots, \beta_j)$ von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$ gegeben.

Das Bild von α_s mit $s \in [j+1, n]$ berechnet sich folgendermaßen. Es ist $\alpha_s \in E = K(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$, und folglich gibt es ein Polynom $g_s(X_1, \ldots, X_j) \in K[X_1, \ldots, X_j]$ mit $\alpha_s = g_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_j)$. Dann ist notwendig das Bild β_s von α_s unter dem gegebenen Automorphismus gleich $\beta_s = g_s(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$.

(Ist $j = n-1$, so erübrigt sich diese Rechnung, da man in $A \setminus \{\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}\}$ nur noch eine Wahl für β_n hat.)

Nun können wir einbetten und $\sigma \in \mathrm{Gal}(E|K)$ auf $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n$ schicken vermöge $\beta_i = \alpha_{\tilde{\sigma}(i)}$ für $i \in [1, n]$ – dies legt eine Permutation $\tilde{\sigma}$ eindeutig fest, und $\sigma \longmapsto \tilde{\sigma}$ definiert einen injektiven Gruppenmorphismus von $\mathrm{Gal}(E|K)$ nach $\mathcal{S}_n$. Man hat so $\mathrm{Gal}(E|K)$ bis auf Isomorphie als Untergruppe von $\mathcal{S}_n$ berechnet.

Aufgabe 5.

Sei z.B. $\mathbf{F}_9 := \mathbf{F}_3(\iota)$ mit $\iota^2 = -1$. Dies ist gestattet, da $X^2 + 1 \in \mathbf{F}_3[X]$ mangels Nullstelle irreduzibel ist.

Sei z.B. $\mathbf{F}_{81} := \mathbf{F}_9(\kappa)$ mit $\kappa^2 = \iota + 1$. Dies ist gestattet, da $X^2 - (\iota + 1) \in \mathbf{F}_9[X]$ mangels Nullstelle irreduzibel ist.

Nun ist die Frobeniusbahn von κ über $\mathbf{F}_3$ gegeben durch $\{\kappa, \kappa^3, \kappa^9, \kappa^{27}\} = \{\kappa, \iota\kappa + \kappa, -\kappa, -\iota\kappa - \kappa\}$, und enthält somit 4 verschiedene Elemente. Also ist $\mathbf{F}_{81} = \mathbf{F}_3(\kappa)$. Und in der Tat erhalten wir das normierte irreduzible Polynom

$$\mu_{\kappa, \mathbf{F}_3}(X) \;=\; X^4 + X^2 - 1 \; .$$

Aufgabe 6.

Es ist $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta_5)|\mathbf{Q}) \simeq (\mathbf{Z}/(5))^*$, wobei $k + (5) \in (\mathbf{Z}/(5))^*$ das Element $\zeta := \zeta_5$ auf ζ^k schickt.

Erster Lösungsweg.

Die Galoiskonjugierten von ζ sind in $\{\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4\}$. Und in der Tat ist das Tupel $(\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)$ linear unabhängig über $\mathbf{Q}$, da mit $\zeta^4 = -1 - \zeta - \zeta^2 - \zeta^3$ bezüglich der Basis $(1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

zu betrachten ist, und diese ist regulär. Alternativ, da die Multiplikation mit ζ auf $\mathbf{Q}(\zeta)$ ein $\mathbf{Q}$-linearer Isomorphismus ist, ist mit $(1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3)$ auch $(\zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4)$ eine Basis. Jedenfalls ist

$$(\; \zeta,\; \zeta^2,\; \zeta^3,\; \zeta^4 \;)$$

eine Normalbasis von $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$.

Zweiter Lösungsweg (nur im Notfall).

Wir verwenden die Notation von Aufgabe 56. Es ist $\mu_{\zeta, \mathbf{Q}}(X) = \Phi_4(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, und so wird

$$f(X) \;=\; \frac{1}{5}\left((\zeta^2 - \zeta)X^3 + (\zeta^3 - \zeta)X^2 + (-\zeta^3 - \zeta^2 - 2\zeta - 1)X + (-\zeta + 1)\right) \; ,$$

und damit

$$\begin{aligned} d(X) \;=\; & \tfrac{1}{25}\Big((-8\zeta^3 - 8\zeta^2 - 4)X^9 + (-8\zeta^3 - 8\zeta^2 - 4)X^8 + (-24\zeta^3 - 24\zeta^2 - 12)X^7 + (-52\zeta^3 - 52\zeta^2 - 26)X^6 \\ & + (-48\zeta^3 - 48\zeta^2 - 24)X^5 + (-52\zeta^3 - 52\zeta^2 - 26)X^4 + (-32\zeta^3 - 32\zeta^2 - 16)X^3 + (-16\zeta^3 - 16\zeta^2 - 8)X^2 \\ & + (-8\zeta^3 - 8\zeta^2 - 4)X + (-2\zeta^3 - 2\zeta^2 - 1)\Big) \; . \end{aligned}$$

Glücklicherweise ist bereits $d(0) = -2\zeta^3 - 2\zeta^2 - 1 \neq 0$ (was man auch durch Berechnen der Determinante der Matrix erkennen kann, in welcher in den Einträgen bereits 0 eingesetzt wird). Somit ist z.B. $5f(0) = 1 - \zeta$ geeignet, was die Normalbasis

$$(\; 1 - \zeta,\; 1 - \zeta^2,\; 1 - \zeta^3,\; 1 - \zeta^4 \;)$$

von $\mathbf{Q}(\zeta)|\mathbf{Q}$ liefert.

Aufgabe 7.

Faktorisiert in irreduzible Faktoren wird $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$. Der euklidsche Algorithmus liefert

$$\frac{1}{3}(X^2 + X + 1) - \frac{1}{3}(X + 2)(X - 1) \;=\; 1 \; .$$

Also ist z.B. das Bild von $\frac{1}{3}(X^2+X+1)$ in

$$\mathbf{Q}[X]/(X^3-1) \;\simeq\; \mathbf{Q}[X]/(X^2+X+1)\times\mathbf{Q}[X]/(X-1) \qquad (\simeq\; \mathbf{Q}[\zeta_3]\times\mathbf{Q}\,)$$

gegeben durch $(0,1)\notin\{(0,0),\,(1,1)\}$.

Aufgabe 8.

(1) Die Aussage ist falsch. Denn in $\mathbf{Q}[X_1,X_2,X_3]$ sind die elementarsymmetrischen Polynome gegeben durch $s_1 = X_1+X_2+X_3$, $s_2 = X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3$ und $s_3 = X_1X_2X_3$. Und z.B. $s_1^2 = (X_1^2+X_2^2+X_3^2) + 2(X_1X_2+X_1X_3+X_2X_3)$ ist kein elementarsymmetrisches Polynom (wie etwa der Koeffizient von X_1^2 zeigt).

(2) Die Aussage ist falsch. Es ist z.B. $X^4+4 = (X^2+2X+2)(X^2-2X+2)$.

(3) Die Aussage ist falsch. Dafür gibt es mehrere alternative Lösungen. In jeder sei zunächst angenommen, es gäbe so eine Gruppe G.

1. Lösung. Die Tatsache, daß G einen Normalteiler N_1 isomorph zu $\mathcal{A}_5$ enthält, liefert wegen der Einfachheit von $\mathcal{A}_5$, daß G genau die Kompositionsfaktoren $\mathcal{A}_5$ und C_2 besitzt (im Sinne des Satzes von Jordan-Hölder). Die Tatsache, daß G einen Normalteiler N_2 mit $G/N_2\simeq C_3$ enthält, impliziert aber, daß G auch einen Kompositionsfaktor C_3 besitzen muß, was aber nicht der Fall ist. Somit haben wir einen Widerspruch.

2. Lösung. Es ist $|N_2/(N_1\cap N_2)| = |(N_1N_2)/N_1| \in \{1,2\}$, da $[G:N_1]=2$. Nun ist aber $N_1\cap N_2$ ein Normalteiler von N_1 von Ordnung $\leq |N_2| = 40$, und also ist $N_1\cap N_2 = 1$ wegen N_1 einfach. Insgesamt ist $40 = |N_2| = |N_2/(N_1\cap N_2)||N_1\cap N_2| \in \{1,2\}$, Widerspruch.

3. Lösung. Sei G' die Kommutatoruntergruppe von G. Es ist $G'\leq N_1$, da $G/N_1\simeq C_2$ abelsch ist, und auch $G'\leq N_2$, da $G/N_2\simeq C_3$ abelsch ist. Also ist $G'\leq N_1\cap N_2$. Nun ist aber $N_1\cap N_2$ als Normalteiler von Ordnung ≤ 40 der einfachen Gruppe N_1 abelsch, und somit ist $N_1\cap N_2 = 1$ (wie in der 2. Lösung). Folglich ist $G'=1$, d.h. G ist abelsch. Da nun $N_2\simeq\mathcal{A}_5$ nicht abelsch ist, und zugleich abelsch als Untergruppe einer abelschen Gruppe, sind wir bei einem Widerspruch angelangt.