1. Klausur zur Algebra I (WS 91/92)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. In beiden Klausuren zusammen müssen mindestens 40 Punkte, in jeder Klausur jeweils mindestens 1 Punkt erzielt werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Sei G eine Gruppe und $\varphi : G \to G$ definiert durch $\varphi(g) := g^{-1}$ für $g \in G$. Zeigen Sie, daß G genau dann abelsch ist, wenn φ ein Homomorphismus ist. 3 Pkte.

Aufgabe 2.
Man schreibe $\mathbb{Z}_{15}^*$ als direkte Summe von zyklischen Gruppen. 4 Pkte.

Aufgabe 3.
Sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl. Zeigen Sie:
(a) Ist G abelsch, so ist $\Omega(G) := \{g \in G \mid g^p = 1\}$ eine Untergruppe von G.
(b) Ist $G \neq \{1\}$ eine p–Gruppe, so ist die Anzahl der Elemente der Ordnung p kongruent -1 modulo p. 6 Pkte.

Aufgabe 4.
Zu welchen $n \in \mathbb{N}$ gibt es einen Epimorphismus $\varphi : A_4 \to \mathbb{Z}_n$? Begründen Sie Ihre Antwort! 3 Pkte.

Aufgabe 5.
(a) Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe mit $|G| = 48$, so hat G einen Normalteiler vom Index 2 oder 3.
(b) Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung 175. 8 Pkte.

Aufgabe 6.
Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| = n$. Zeigen Sie, daß $|\mathrm{Aut}(G)|$ ein Teiler von $(n-1)!$ ist. 4 Pkte.

Aufgabe 7.
Sei K ein endlicher Körper der Charakteristik $\neq 2$ (d.h. $-1 \neq 1$ in K) mit $|K| = q$. Wie viele Elemente in $G = GL_2(K)$ sind konjugiert (d.h. ähnlich) zu $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$? Begründen Sie Ihre Antwort! 6 Pkte.

Aufgabe 8.
Sei K ein endlicher Körper und $B := \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K, ab \neq 0\} \leq GL_2(K)$.
(a) Zeigen Sie: B ist auflösbar.
(b) Bestimmen Sie für $K = \mathbb{Z}_3$ eine Kompositionsreihe für B. 6 Pkte.