

# 1. Nachholklausur zur „Algebra I“ (WS 94/95)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

---

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Insgesamt werden 58 Punkte vergeben. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

---

## Aufgabe 1.

Es sei  $A$  eine abelsche Gruppe und  $\phi$  die Abbildung  $\phi = (a \mapsto a^{-1}): A \rightarrow A$ . Zeigen Sie, daß  $\phi$  ein Gruppenautomorphismus von  $A$  ist. *3 Punkte*

---

## Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen von Elementen der alternierenden Gruppe  $A_4$ . *5 Punkte*

---

## Aufgabe 3.

Es sei  $A_4$  die alternierende Gruppe vom Grad 4.

- a) Man bestimme alle  $A_4$ -Mengen mit 5 Elementen bis auf Isomorphie. *6 Punkte*
  - b) Gibt es eine primitive  $A_4$ -Menge mit 6 Elementen? *2 Punkte*
- 

## Aufgabe 4.

Zeigen Sie, daß jede Gruppe der Ordnung 42 und 72 nicht einfach ist. *8 Punkte*

---

## Aufgabe 5.

Zeigen Sie, daß alle nichtabelschen Gruppen der Ordnung 39 die gleiche Anzahl von Sylow-3-Untergruppen haben. *5 Punkte*

---

## Aufgabe 6.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen über die symmetrische Gruppe  $S_n$ ,  $n \geq 3$ :

- a) Die Gruppe  $S_n$  besitzt keinen Normalteiler der Ordnung 2. *5 Punkte*
  - b) Für  $n > 4$  ist die alternierende Gruppe  $A_n$  der einzige echte Normalteiler der Gruppe  $S_n$ . (Hinweis: Man führe den Beweis indirekt und benutze, daß die Gruppe  $A_n$  einfach ist.) *6 Punkte*
- 

## Aufgabe 7.

Sind die Gruppen  $Z_2 \dot{+} Z_{12}$  und  $Z_4 \dot{+} Z_6$  isomorph? Begründen Sie ihr Antwort! *6 Punkte*

---

## Aufgabe 8.

Man bestimme alle Erzeugendensysteme mit höchstens zwei Elementen für die ihnen bekannte Diedergruppe  $D_8 = \langle a, b \rangle$  mit  $a = (1, 2, 3, 4)$  und  $b = (1, 3)$ . (Hinweis: Man benutze den Untergruppenverband der  $D_8$ .) *6 Punkte*

---

## Aufgabe 9.

Es sei das folgende Quadrat  $Q$  (siehe Zeichnung) sowie fünf Farben gegeben. Es sollen die Dreiecke  $D_1, D_2, D_3$  und  $D_4$  mit diesen Farben gefärbt werden. Wieviele Typen (bezüglich Drehungen und Spiegelungen des Quadrats) von Färbungen gibt es? *6 Punkte*

---