2. Nachholklausur zur „Algebra I“ (WS 94/95)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Insgesamt werden 78 Punkte vergeben. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie die Hermitesche Normalform für die ganzzahlige Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 2.

Gegeben sei die (additive) abelsche Gruppe $F = V_{1\times 4}(\mathbb{Z})$ und die Untergruppe $N = \langle (2,-2,3,4), (-3,3,0,2) \rangle$. Bestimmen Sie den Isomorphietyp der Faktorgruppe F/N.

5 Punkte

Aufgabe 3.

a) Bestimmen Sie die Ordnung der Automorphismengruppe des direkten Produkts $G = C_4 \dot{\times} C_4$. *6 Punkte*

b) Wieviele Homomorphismen gibt es von $C_2 \dot{\times} C_2$ nach G? *4 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei G die durch die Präsentation $\langle a, b || a^2 = b^2, a^4 = 1, a^b = a^{-1} \rangle$ gegebene Gruppe. Zeigen Sie, daß G höchstens 8 Elemente besitzt. *4 Punkte*

Aufgabe 5.

Man bestimme eine natürliche Zahl n, $100 \leq n < 300$, die die folgenden Kongruenzgleichungen erfüllt: $n \equiv 3 \pmod 5, n \equiv -1 \pmod 7, n \equiv 2 \pmod 3$ mit Hilfe des Lagrange-Verfahrens. *7 Punkte*

Aufgabe 6.

Es sei R der Teilring $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi | a, b, \in \mathbb{Z}\}$ der komplexen Zahlen.

a) Ist das Element 2 unzerlegbar in $\mathbb{Z}[i]$? *4 Punkte*

b) Fassen sie R und I als abelsche Gruppen auf. Welchen Isomorphietyp besitzt dann die Faktogruppe R/I? *4 Punkte*

c) Schreiben Sie das von 2 in R erzeugte Ideal I als Produkt maximaler (Begründung) Ideale. *4 Punkte*

Aufgabe 7.

a) Zeigen Sie, daß ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ genau dann unzerlegbar ist, falls f^α unzerlegbar ist, wobei α der Ringautomorphismus von $\mathbb{Q}[X]$ ist, der den Erzeuger X auf $X+1$ abbildet. *4 Punkte*

b) Man zeige, daß das Polynom $X^{37}+1$ aus $\mathbb{Q}[X]$ unzerlegbar ist. *6 Punkte*

Aufgabe 8.

a) Ist das Polynom $f_2(X) = X^4 + 3X^2 + 7X + 4 \in \mathbb{Z}_2[X]$ unzerlegbar? *2 Punkte*

b) Multiplizieren Sie das Produkt der Polynome $f = X^2 + 5X - 1$ und $g = X^2 - 5X - 4$ in $\mathbb{Z}_{11}[X]$ aus. *2 Punkte*

c) Ist das Polynom $X^4+3X^2+7X+4 \in \mathbb{Z}[X]$ unzerlegbar? (Hinweis: Man benutze a) und b).) *6 Punkte*

Aufgabe 9.

Geben Sie einen Körper K mit 8 Elementen an, und bestimmen Sie alle Erzeuger der multiplikativen Gruppe von K. *6 Punkte*

Aufgabe 10.

Es sei $K = \mathbb{Z}_5(t)$ der Quotientenkörper des Polynomrings $\mathbb{Z}_5[t]$.

a) Zeigen Sie, daß das Polynom $Y^5 - t \in K[Y]$ unzerlegbar ist. *4 Punkte*

b) Es sei L der durch die Kroneckerkonstruktion zum Polynoms $Y^5 - t \in K[Y]$ gegebene Erweiterungskörper von K. Ist L eine separable Körperwereiterung von K? Begründen Sie ihre Antwort. *4 Punkte*

c) Bestimmen Sie die Automorphismen von L, die auf K die Identität ergeben. *4 Punkte*