1. Klausur zur „Algebra I“ (WS 94/95)

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Insgesamt werden 53 Punkte vergeben. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Beweisen Sie die folgende Aussage: Es sei $1 \neq n \in \mathbb{N}$. Enthält eine Gruppe G genau ein Element g der Ordnung n, so ist $n = 2$, und die Menge $\{1, g\}$ ist ein Normalteiler von G. *2 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei G eine Gruppe. Man beweise oder widerlege die folgende Aussage: Ist M Normalteiler von G und N Normalteiler von M, so ist N auch Normalteiler von G. *3 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei G eine Gruppe. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

i) Ist $G = A \dot{\times} B$ und sind A, B abelsche Gruppen, so ist auch G abelsch. *1 Punkt*
ii) Ist $G = A \dot{\times} B$ und sind A, B zyklische Gruppen, so ist auch G zyklisch. *1 Punkt*

Aufgabe 4.
Es sei G eine Gruppe. Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

i) Ist N ein Normalteiler von G und haben N und G/N nur Elemente der Ordnung 1 und 11, so hat G nur Elemente der Ordnung 1 und 11. *2 Punkte*
ii) Ist N ein Normalteiler von G und haben N und G/N nur Elemente der Ordnung 1 und 11, so hat G kein Element der Ordnung 13. *3 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei G die durch die Permutationen $a = (2, 6)(3, 5)$ und $b = (1, 3)(4, 5)$ erzeugte Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_6.

i) Ist G eine Untergruppe der alternierenden Gruppe A_6? (Begründung!) *1 Punkt*
ii) Bestimmen Sie die Ordnung des Elements $c = ab$. *1 Punkt*
iii) Ist die von c erzeugte Untergruppe $\langle c \rangle$ von G ein Normalteiler von G? (Begründung!) *2 Punkte*
iv) Wieviele Restklassen $\langle c \rangle g$ mit $g \in G$ gibt es? (Begründung!) *3 Punkte*

Aufgabe 6.
Gegeben sind die folgenden Untergruppen $U = \langle (1, 2), (1, 2, 3, 4) \rangle$, $V = \langle (5, 6), (5, 6, 7, 8) \rangle$ und $W = \langle (1, 2)(5, 6), (1, 2, 3, 4)(5, 6, 7, 8) \rangle$ der symmetrischen Gruppe S_8. Man zeige:

i) U und V sind in S_8 konjugiert. *2 Punkte*
ii) U und W sind in S_8 nicht konjugiert. *2 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei G die Diedergruppe D_8 der Ordnung 8, also $G = \langle a, b\rangle$ mit $a = (1, 3)$ und $b = (1, 2, 3, 4)$. Wieviele Isomorphietypen von transitiven G-Mengen mit 4 Elementen gibt es? (Begründung mit Zitat der relevanten Sätze!) *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei G eine Gruppe der Ordnung 35 und Ω eine G-Menge mit $|\Omega| = 18$. Zeigen Sie, daß es ein Element $\omega \in \Omega$ gibt, das von allen Elemente von G festgelassen wird.
5 Punkte

Aufgabe 9.
Es sei G eine endliche Gruppe und Ω eine endliche G-Menge mit $|\Omega| > 1$.

i) Beweisen Sie die folgende Aussage: Besitzt jedes Element von G mindestens einen Fixpunkt, so operiert G nicht transitiv auf Ω. *3 Punkte*
ii) Folgern Sie aus i) für $H < G$ (echte Untergruppe) und $\Omega = G//H$ die Aussage: $\bigcup_{g\in G} g^{-1}Hg \subset G$ (echte Teilmenge). *5 Punkte*

Aufgabe 10.
Zeigen Sie, daß es keine einfache Gruppe der Ordnung 12, 28 oder 56 gibt. *3 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei Γ der Graph mit Eckenmenge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und Kantenmenge

$$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{7, 1\}\}.$$

(Es handelt sich also um eine ungefärbte Halskette mit sieben Perlen!) Es sei G die von den Permutationen $a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ und $b = (2, 7)(3, 6)(4, 5)$ erzeugte Untergruppe der Automorphismengruppe von Γ.

i) Man zeige, daß alle Elemente der Ordnung 2 von G in G konjugiert sind.
3 Punkte
ii) Wieviele Typen bezüglich G von Färbungen der Ecken von Γ mit den Farben rot, blau und grün gibt es? (Begründung!) *4 Punkte*

Aufgabe 12.
Man bestimme (mit Beweis) alle Zerlegungen der additiv geschriebenen abelschen Gruppe $G = \mathbb{Z}_8 \dot{+} \mathbb{Z}_2$ als innere direkte Summe zyklischer Gruppen. Eine solche Zerlegung is ja $G = A \oplus B$ mit $A = \langle a\rangle$, $B = \langle b\rangle$, $a = (\bar{1}, \bar{0})$ und $b = (\bar{0}, \bar{1})$.
4 Punkte