NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

STUDIENGANG: Mathe-Bachelor ☐ Mathe-Master ☐ Lehramt/Sonstige ☐

Prof. Dr. Eva Zerz WS 2012/13

Algebra[1] – Klausur am 20.2.2013
Gruppe B

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **5 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	

Viel Erfolg!

1. *(10+10 Pkt)*

   (a) Sei G eine Gruppe der Ordnung 56. Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

   (b) Sei G eine Gruppe der Ordnung 16 mit Nilpotenzgrad 3.
   Sei $Z(G)$ das Zentrum von G, und G' die Kommutatorgruppe von G.
   Zeigen Sie, dass $|Z(G)| = 2$ und $|G'| = 4$.

2. *(4+4+2+10 Pkt)*
   Sei K ein endlicher Körper mit $|K| = q$, sei $0 \neq c \in K$, und $f = x^{q-1} - c \in K[x]$.
   Sei L der Zerfällungskörper von f, und $\alpha \in L$ eine Nullstelle von f.
   Mit $\mathrm{Aut}(L)$ sei die Automorphismengruppe von L bezeichnet.
   Mit f' sei die formale Ableitung von f bezeichnet. Zeigen Sie:

   (a) Es gilt $\mathrm{ggT}(f, f') = 1$.

   (b) Die Menge der Nullstellen von f in L ist durch $\{k\alpha \mid 0 \neq k \in K\}$ gegeben.

   (c) Es gilt $L = K(\alpha)$.

   (d) Sei nun $q = 5$ und $c = 3 \in K = \mathbb{F}_5$.

      i. Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

      ii. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\mathrm{Aut}(L)$.

      iii. Bestimmen Sie alle Zwischenkörper $K \subsetneq M \subsetneq L$.

[1] *Es wird noch einmal daran erinnert, dass jeder Rechen- und Beweisschritt in angemessener Ausführlichkeit begründet werden muss. Punkte gibt es nur für nachvollziehbare Ergebnisse oder Schlüsse!*

3. *(2+4+4+4+6 Pkt)*

Sei L der Zerfällungskörper von $f = x^5 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f irreduzibel ist.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, e^{2\pi i/5})$.

(b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(L)$.

(c) Zeigen Sie: L enthält einen Körper M mit $\dim_{\mathbb{Q}}(M) = 4$, der über $\mathbb{Q}$ Galois'sch ist.

(d) Zeigen Sie: Der Körper aus (c) ist eindeutig bestimmt.

(e) Betrachten Sie nun $f = x^5 - 2 \in \mathbb{F}_{11}[x]$. Mit L sei wieder der Zerfällungskörper von f bezeichnet. *Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass f irreduzibel ist.* Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{F}_{11}}(L)$ und alle Automorphismen von L.

4. *(4+4+4+4+4 Pkt)*

Sei R ein links Artinscher Ring mit Jacobson-Radikal $J(R)$. Zeigen Sie:

(a) R ist Dedekind-endlich.

(b) Ist $r \in R$ kein Rechtsnullteiler, so ist r eine Einheit.

(c) Ist $r \in J(R)$, so ist r nilpotent.

Sei nun $R = \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und I das von $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ erzeugte Linksideal in R.

(d) Bestimmen Sie ein Linksideal J in R mit $I \oplus J = R$.

(e) Geben Sie einen idempotenten Erzeuger von I an.

5. *(4+4+4+4+4 Pkt)*

Sei K ein kommutativer Körper und H der Ring der Quaternionen über K.
Seien $a, b, c, d \in K$ und $z = a + bi + cj + dk \in H$.
Sei $\overline{z} := a - bi - cj - dk \in H$ und $n := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \in K$.

(a) Zeigen Sie, dass $z^2 - 2az + n = 0$.

(b) Folgern Sie: Ist $n = 0$, so ist z ein Rechts- und Linksnullteiler in H.
Ist $n \neq 0$, so ist z eine Einheit in H mit Inverser $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{n}$.

(c) Zeigen Sie, dass H Dedekind-endlich ist.

Sei nun $K = \mathbb{F}_3$.

(d) Bestimmen Sie alle $z \in H$ mit $az + n = 0$ *(mit den Bezeichnungen wie oben)*.

(e) Wie viele Nullteiler enthält H?