NAME ______________________________

MATRIKELNUMMER ______________________________

STUDIENGANG: Mathe-Bachelor ☐ Mathe-Master ☐ Lehramt/Sonstige ☐

Prof. Dr. Eva Zerz WS 2012/13

Algebra[1] – Klausur am 28.3.2013
Gruppe B

- **Für jede Aufgabe ein neues Blatt verwenden**
- **Name, Matrikelnummer, Aufgabennummer auf jedes Blatt**
- Nicht mit Rot schreiben
- Es gibt **5 Aufgaben** und insgesamt **100 Punkte**

Aufgabe	Punkte	
1	20	
2	20	
3	20	
4	20	
5	20	

Viel Erfolg!

1. *(1+4+4+3+1+3+4 Pkt)*
   Mit C_2 sei die zyklische Gruppe der Ordnung 2 bezeichnet.
   Mit Q_8 sei die Quaternionengruppe der Ordnung 8 bezeichnet.
   Sei $G = C_2 \times Q_8$ das kartesische Produkt mit der komponentenweisen Struktur.
   Sei $Z(G)$ das Zentrum von G, und G' die Kommutatorgruppe von G.

   (a) Bestimmen Sie $|G|$.

   (b) Zeigen Sie, dass $|Z(G)| = 4$ und $|G'| = 2$.
   Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $|Z(Q_8)| = |Q_8'| = 2$.

   (c) Bestimmen Sie die aufsteigende Zentralreihe von G.

   (d) Bestimmen Sie die absteigende Zentralreihe von G.

   (e) Bestimmen Sie den Nilpotenzgrad von G.

   (f) Bestimmen Sie die Kommutatorreihe von G.

   (g) Bestimmen Sie eine Kompositionsreihe von G.

[1] *Es wird noch einmal daran erinnert, dass jeder Rechen- und Beweisschritt in angemessener Ausführlichkeit begründet werden muss. Punkte gibt es nur für nachvollziehbare Ergebnisse oder Schlüsse!*

2. *(10+5+5 Pkt)*

   Sei $R = \mathbb{Q}(t)[\partial; \mathrm{id}, \delta]$ die rationale Weyl-Algebra über $\mathbb{Q}$ und

   $$A = \begin{bmatrix} \partial - \frac{1}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -1 & \partial \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Jacobson-Form J von A. *Die Diagonaleinträge von J sollen in der Form $\sum_{i=0}^n a_i\partial^i$ mit $a_i \in \mathbb{Q}(t)$ und $a_n = 1$ angegeben werden.*

   (b) Folgern Sie, dass R^2/AR^2 ein zyklischer R-Rechtsmodul ist.

   (c) Begründen Sie, warum die Matrix

   $$B = \begin{bmatrix} \partial & 0 \\ 0 & \partial \end{bmatrix} \in R^{2\times 2}$$

   nicht in Jacobson-Form ist.

3. *(5+5+10 Pkt)*

   Sei K ein kommutativer Körper und H der Ring der Quaternionen über K.
   Seien $a, b, c, d \in K$ und $z = a + bi + cj + dk \in H$.
   Mit $[x, y] = xy - yx$ sei der ringtheoretische Kommutator von $x, y \in H$ bezeichnet.

   (a) Zeigen Sie, dass $[j, z] = 2di - 2bk$.

   (b) Zeigen Sie, dass $[k, [j, z]] = 4dj$.

   (c) Sei nun $K = \mathbb{F}_5$ und I ein zweiseitiges Ideal in H mit $z = 2j + k \in I$.
   Zeigen Sie: z ist nilpotent und es gilt $I = H$.

4. *(4+2+6+6+2 Pkt)*

   Sei $L \subset \mathbb{C}$ der 8. Kreisteilungskörper und $\mathrm{Aut}(L)$ seine Automorphismengruppe.

   (a) Bestimmen Sie das 8. Kreisteilungspolynom Φ_8.

   (b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(L)$.

   (c) Bestimmen Sie alle Automorphismen von L und den Isomorphietyp von $\mathrm{Aut}(L)$.

   (d) Geben Sie alle Teilkörper von L explizit an.

   (e) Welche der Teilkörper sind normal über $\mathbb{Q}$?

5. *(7+6+7 Pkt)*

   Sei K ein Körper, $f \in K[x]$ und L der Zerfällungskörper von f. Bestimmen Sie die Primfaktorzerlegung von f und $\dim_K(L)$. Bestimmen Sie alle Automorphismen von L und den Isomorphietyp der Automorphismengruppe von L.

   (a) $f = x^6 + 3$ mit $K = \mathbb{F}_7$,

   (b) $f = x^5 + 22$ mit $K = \mathbb{F}_{25}$,

   (c) $f = x^5 + 8$ mit $K = \mathbb{F}_{11}$.
   In (c) *dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass f irreduzibel ist.*