

Scheinklausur zur Linearen Algebra I, WS 03/04, 1. Teil

Prof. Dr. H. Pahlings

Tragen Sie bitte auf diesem Deckblatt leserlich und in **Blockbuchstaben** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein und unterschreiben Sie.

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Eigenhändige Unterschrift: _____

	Krz	Erg	8	9	10	11	Σ
Punkte							
Nachk.							

Zum Ankreuzteil:

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Zum Ergebnisteil:

In diesem Teil müssen Sie Ihre Aussagen **nicht** begründen. Es zählt nur das richtige Ergebnis.

Zu den Aufgaben mit Begründungen:

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen.

Natürlich brauchen Sie Aussagen aus der Vorlesung nicht noch einmal zu beweisen.

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Mengen Äquivalenzrelationen auf \mathbb{Z} ?		
	$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5 \text{ teilt } a - b\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5 \text{ teilt } a + b\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^3 = b^3\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
2	Sind die folgenden Aussagen wahr?		
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + y$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x^2 + y, x)$ ist injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3, x \mapsto x^2$ ist injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
3	Sind die folgenden Mengen Teilräume in den jeweils angegebenen \mathbb{Q} -Vektorräumen?		
	$\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \text{es gibt } c \in \mathbb{Q} \text{ mit } f(x) \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_n = a_1 + \dots + a_{n-1}\} \subseteq \mathbb{Q}^n$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\left\{ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid a_{1,1}a_{2,2} = a_{1,2}a_{2,1} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2 \times 2}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
4	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit m Gleichungen in n Unbekannten ...		
	... hat keine Lösung, wenn $m > n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	... ist nicht eindeutig lösbar, falls $m < n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	... ist lösbar, wenn $m < n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	... ist eindeutig lösbar, wenn $\text{Rg } A = n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
5	Wir betrachten $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)$ und $v_4 = (1, 2, 3)$ in \mathbb{R}^3 .		
	Ist $v_4 \in \langle v_1, v_2 \rangle$?	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_3, v_4 \rangle$?	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 ?	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
6	Welche der folgenden Abbildungen sind linear?		
	$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} \mapsto x_{1,2} + x_{2,1}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(f)(x) = f(x + 1)$ für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $x \in \mathbb{R}$.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\varphi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$ (hier ist natürlich \mathbb{Z}_2 -linear gemeint)	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, Rechenteil, **Gruppe A**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

7	Bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{Z}_2^5$ mit $ \begin{array}{rccccrcr} & & & x_3 & + & x_4 & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \end{array} $
	Nur Ergebnis eintragen: <input style="width: 500px; height: 20px;" type="text"/>
	<i>(3 Punkte)</i>

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, **Gruppe A**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
8	Es sei $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ die Matrix mit den Einträgen $ a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . $ Berechnen Sie (mit Beweis!) A^k für $k = 1, 2, \dots, n$. <i>(4 Punkte)</i>
9	Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $v, w \in V$ Vektoren. Weiter sei $\varphi : V \rightarrow K$ eine K -lineare Abbildung mit $\varphi(v) = \varphi(w) = 1$. Man zeige: $\{v, w\}$ ist linear unabhängig. <i>(4 Punkte)</i>
10	Es sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{Z}_2^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{v_1, v_2, v\}$ Basis von \mathbb{Z}_2^3 ist, wobei $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$ ist. Begründen Sie Ihr Ergebnis. <i>(4 Punkte)</i>
11	Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, X \mapsto AX - XA$ gegeben mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Zeigen Sie, dass φ linear ist und geben Sie eine Basis von Kern φ und Bild φ an (natürlich auch mit Beweis). <i>(5 Punkte)</i>

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003

Lineare Algebra I, WS 2003/04, Prof. Dr. H. Pahlings

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.

Auswertung der Multiple-Choice-Aufgaben: Ein richtiges Kreuz ergibt +1 Punkt, ein falsches Kreuz ergibt -1 Punkt, keine Angabe zählt 0 Punkte. In jeder Aufgabe bekommen Sie mindestens 0 Punkte.

1	Sind die folgenden Mengen Äquivalenzrelationen auf \mathbb{Z} ?		
	$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^5 = b^5\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt } a - b\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \text{ teilt } a + b\}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
2	Sind die folgenden Aussagen wahr?		
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^3 - y$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3, x \mapsto x^2$ ist surjektiv.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto (x^2 + y, x^2)$ ist injektiv.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
3	Sind die folgenden Mengen Teilräume in den jeweils angegebenen \mathbb{Q} -Vektorräumen?		
	$\left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid a_{1,1}a_{2,2} = a_{1,2}a_{2,1} \right\} \subseteq \mathbb{Q}^{2 \times 2}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^n \mid a_n = a_1 + \dots + a_{n-1} + 1\} \subseteq \mathbb{Q}^n$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \text{es gibt } c \in \mathbb{Q} \text{ mit } f(x) \leq c \text{ für alle } x \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
4	Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit m Gleichungen in n Unbekannten ...		
	... ist eindeutig lösbar, wenn $\text{Rg } A = m$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	... hat eine Lösung, wenn $m \leq n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	... ist eindeutig lösbar, falls $m = n$ ist und $\text{Rg } A = n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	... ist unlösbar, wenn $m > n$ ist.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
5	Wir betrachten $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, -1)$ und $v_4 = (1, 2, 4)$ in \mathbb{R}^3 .		
	Ist $v_4 \in \langle v_2, v_1 \rangle$?	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\langle v_2, v_1 \rangle = \langle v_4, v_3 \rangle$?	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 ?	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
6	Welche der folgenden Abbildungen sind linear?		
	$\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{pmatrix} \mapsto x_{1,2} - x_{2,1}$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit $\varphi(f)(x) = f(2 \cdot x + 1)$ für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ und $x \in \mathbb{R}$.	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot (y + 1)$	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein
	$\varphi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2, x \mapsto x^2$ (hier ist natürlich \mathbb{Z}_2 -linear gemeint)	<input type="checkbox"/> Ja	<input type="checkbox"/> Nein

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, Rechenteil, **Gruppe B**

Bearbeiten Sie die folgende Rechenaufgabe und schreiben Sie die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie brauchen Ihre Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für die richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für eine falsche Antwort gibt es **Null** Punkte.

7	Bestimmen Sie die Menge aller $(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{Z}_2^5$ mit $\begin{aligned} x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$
	<div style="border: 1px solid black; width: 500px; height: 20px; margin: 0 auto;"></div> <p style="text-align: right;">(3 Punkte)</p>

Scheinklausur 1. Teil, 12.12.2003, **Gruppe B**

Beantworten Sie die folgenden Aufgaben schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.	
8	Es sei $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{für } i = j + 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$ <p>Berechnen Sie (mit Beweis!) A^k für $k = 1, 2, \dots, n$. (4 Punkte)</p>
9	Es seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $v, w \in V$ Vektoren. Weiter sei $\varphi : V \rightarrow K$ eine K -lineare Abbildung mit $\varphi(v) = \varphi(w) = 1$. Man zeige: $\{v, w\}$ ist linear unabhängig. (4 Punkte)
10	Es sei $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie alle $v \in \mathbb{Z}_2^3$ mit der Eigenschaft, dass $\{v_1, v_2, v\}$ Basis von \mathbb{Z}_2^3 ist, wobei $v_1 = (1, 1, 0)$ und $v_2 = (0, 1, 0)$ ist. Begründen Sie Ihr Ergebnis. (4 Punkte)
11	Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, X \mapsto AX - XA$ gegeben mit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Zeigen Sie, dass φ linear ist und geben Sie eine Basis von Kern φ und Bild φ an (natürlich auch mit Beweis). (5 Punkte)