Lineare Algebra I, WS 2002/03, Prof. Dr. U. Schoenwaelder **Gruppe A**

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003

Name: ______________________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003, **Ankreuzteil, Gruppe A**

Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 5 entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

1	Sind die folgenden Aussagen über einen vierdimensionalen $\underline{3}$-Vektorraum V und einen affinen Raum $\mathcal{P}$ über V richtig?		
	V hat genau 40 eindimensionale Teilräume.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	$\mathcal{P}$ hat genau 80 Geraden.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Jeder 2-dimensionale Teilraum von V hat mindestens 10 Vektoren.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	V besitzt über 300000 linear unabhängige Folgen von Vektoren, die jeweils einen 3-dimensionalen Teilraum erzeugen.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
2	Sind die folgenden Abbildungen $\varphi : V \to W$ zwischen den K-Vektorräumen V und W linear?		
	$K = \mathbb{R},\ V = W = K[X]$, $\varphi = (p_0X^0 + p_1X^1 + \cdots + p_nX^n \mapsto p_1X^1 + \cdots + p_nX^n)$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	$K = \mathbb{R},\ V = W = K$-Polynome vom Grad ≤ 1, $\varphi = (p(X) \mapsto p(X) + 1)$.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	$K = \mathbb{R},\ V =$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ W = \mathbb{R}$, $\varphi = (f \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)\,dx)$.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
3	Es seien K ein Körper und V und W Vektorräume über K. Weiter sei $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung.		
	Ist φ injektiv und (v_1, v_2, v_3) eine Basis von V, dann ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Wenn φ injektiv ist, dann ist dim $V \leq$ dim W.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Sind $v_1, v_2, v_3 \in V$ und ist $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \varphi(v_3))$ linear unabhängig, dann ist (v_1, v_2, v_3) linear abhängig.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
4	Es sei V der vierdimensionale $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$.		
	Es gibt einen Endomorphismus von V, der die Eigenwerte 1, 2 und 3 hat und sonst keine.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Es gibt zu jedem $c \in \mathbb{C}$ genau einen Endomorphismus von V, der einen vierdimensionalen Eigenraum zum Eigenwert c hat.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Jeder Endomorphismus von V hat vier paarweise verschiedene Eigenwerte.	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Ein Endomorphismus φ von V ist genau dann invertierbar, wenn 0 nicht Eigenwert von φ ist.	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
5	Wir betrachten $\mathbb{R}$-Vektorräume V mit einem Endomorphismus φ.		
	Gibt es ein Beispiel, wo das $\mathbb{R}$-Polynom $X - 3$ das Minimalpolynom von φ teilt und der Hauptraum zu $X - 3$ keine Eigenvektorbasis besitzt?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Gibt es ein Beispiel, wo das Minimalpolynom von φ gleich $(X - 3)^2(X - 5)^2$ ist und V keine Eigenvektorbasis besitzt?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein
	Gibt es ein Beispiel, wo die Summe aller Haupträume nicht der ganze Vektorraum ist?	☐ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
	Gibt es zu einem gegebenen Hauptraum T immer ein Polynom p, so dass T gleich Kern $p(\varphi)$ und die Summe aller anderen Haupträume gleich Bild $p(\varphi)$ ist?	$\boxed{\square}$ Ja	☐ Nein

Name: ________________________ **Matrikelnummer:** ________________

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003, **Ergebnisteil, Gruppe A**

Tragen Sie bei den Aufgaben 6 bis 9 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

6 In einem reellen affinen Raum $(\mathcal{P}, V, *)$ sei ein Dreieck $[A, B, C]$ durch seine beschreibenden Vektoren a, b, c bezüglich eines Ursprungs U gegeben. Es sei δ eine invertierbare lineare Abbildung von V nach V und $\Delta = (U * x \mapsto U * \delta(x))$ die zugehörige Abbildung von $\mathcal{P}$ nach $\mathcal{P}$. Welchen beschreibenden Vektor hat der Seitenhalbierenden-Schnittpunkt des Bilddreiecks $[\Delta(A), \Delta(B), \Delta(C)]$?

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ *(4 Punkte)*

7 Es sei $\alpha : V \to W$ eine lineare Abbildung mit der Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{C}}\alpha^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

Geben Sie das Bild $\boxed{}$ der Spalte $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ unter der verpflanzten Abbildung $\alpha' : \mathbb{R}^{4\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ an.

(3 Punkte)

8 Wir fassen den Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen als 2-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ auf. Dann ist die Multiplikation $\psi_\lambda = (z \mapsto z \cdot \lambda \text{ für } z \in \mathbb{C}) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit einer festen Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ offenbar ein Endomorphismus von $\mathbb{C}$. Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{C}}\psi_\lambda^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{bmatrix}$ bezüglich der Basen $\mathcal{B} = (1, i)$ und $\mathcal{C} = (\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - \frac{i}{2})$ von $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ für $\lambda = 1 + 2i$. *(4 Punkte)*

9 Der Endomorphismus φ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums V habe bezüglich einer Basis $\mathcal{B}$ die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 15 & -8 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind -2 und -3. Bestimmen Sie eine Eigenvektorbasis $\mathcal{C}$ von φ und geben Sie die Basiswechselmatrix ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{bmatrix}$ an. *(4 Punkte)*

Scheinklausur (Teil B), 14.2.2003, **schriftlicher Teil, Gruppe A**

Beantworten Sie die Aufgaben 10 bis 13 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen.
Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

10 Gegeben sind die Vektorräume $V = \underline{3}^{1\times 2}$ und $W = \underline{3}^{2\times 1}$ über dem Körper $\underline{3} = \{0, 1, 2\}$ sowie die Abbildung $\varphi = \left([a, b] \mapsto \begin{bmatrix} a + 2b \\ a - b^3 \end{bmatrix} \right) : V \to W$. Ist φ linear? (Antwort mit Beweis.) *(5 Punkte)*

11 Gegeben seien φ-invariante Teilräume $T \le T' \le V$ eines Vektorraums V mit Endomorphismus φ. Beweisen Sie für die Minimalpolynome, dass m_T ein Teiler von $m_{T'}$ ist. *(4 Punkte)*

12 Es sei V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und φ ein Endomorphismus von V. Weiter seien ein Vektor $v \in V$ und sein φ-Erzeugnis $T = {}_{\varphi}\langle v \rangle$ gegeben. Zeigen Sie: Ist $p(X)$ ein K-Polynom mit $p(\varphi)(v) = 0$, so ist $p(\varphi)|_T$ die Nullabbildung. *(4 Punkte)*

13 Es sei τ eine Verschiebung auf dem Vektorraum V und $\varphi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass dann $\alpha := \varphi \circ \tau : V \to W$ eine affine Vektorabbildung ist. *(4 Punkte)*