

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Ankreuzteil. Kreuzen Sie bei jeder Frage der Aufgaben 1 bis 5 entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an. Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg. Wenn Sie bei einer Frage unsicher sind, machen Sie einfach kein Kreuz.

1	Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K -Vektorraum. Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ ein Erzeugendensystem von V und (c_1, c_2, c_3) eine linear unabhängige Folge von Vektoren in V ist, dann ist \mathcal{B} eine Basis von V .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Folge von Vektoren in V und (c_1, c_2) ein Erzeugendensystem von V ist, dann ist \mathcal{B} linear abhängig.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $V = \langle b_1 \rangle \oplus \langle b_2 \rangle \oplus \langle b_3 \rangle$ mit Vektoren $b_1, b_2, b_3 \in V$ ist, dann ist (b_1, b_2, b_3) eine Basis von V .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von V ist, dann gilt $V = \langle b_1, b_2 \rangle \oplus \langle b_1, b_3 \rangle$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ eine Folge von Vektoren in V und $(b_1, b_2 - b_1, b_1 - b_2 + b_3)$ eine Basis von V ist, dann ist auch \mathcal{B} eine Basis von V .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
2	Es sei $K := \underline{7}$ der Körper mit 7 Elementen und $K[X]$ die Polynomalgebra über K .	
	$K[X]$ ist als K -Vektorraum endlich erzeugt.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Zu jedem Polynom $p \in K[X]$ gibt es ein Element $u \in K$ mit $p(u) = 1$.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Der Grad des Produktes zweier Polynome ungleich 0 aus $K[X]$ ist gleich der Summe der Grade der beiden Polynome.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Das Polynom $X + 4$ ist in $K[X]$ ein größter gemeinsamer Teiler der Polynome $X^2 + 5X + 4$ und $X^2 + 3X + 2$. (Beachten Sie $K = \underline{7}$.)	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
3	Es seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ Basen eines 2-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraums V , die gemäß $\text{bid}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $\text{bid}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ auseinander hervor gehen.	
	Gibt es einen Vektor $x \in V$ mit $\text{B}x = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\text{C}x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\text{D}x = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ mit $\text{B}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ und $\text{C}\varphi^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ -8 & -12 \end{bmatrix}$?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
4	Wir betrachten die symmetrische reelle 3×3 -Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ und die Abbildung $\alpha := (x \mapsto x^{\text{tr}}Ax): \mathbb{R}^{3 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}$.	
	Ist α eine quadratische Form?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Ist α eine affine Vektorabbildung?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Es sei Γ die Bilinearform auf $\mathbb{R}^{3 \times 1}$, deren Gram-Matrix bezüglich der Standardbasis \mathcal{S} gerade A ist. Ist $(\mathbb{R}^{3 \times 1}, \Gamma)$ ein euklidischer Vektorraum?	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
5	Es sei V ein n -dimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und φ ein invertierbarer Endomorphismus von V . Sind die folgenden Aussagen richtig?	
	Wenn $x \in V$ ein Eigenvektor von φ ist, dann ist x auch ein Eigenvektor von φ^2 .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, so dass $\text{B}\varphi^{\mathcal{B}}$ eine symmetrische Matrix ist, dann besitzt V eine Basis aus Eigenvektoren von φ .	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein
	Wenn $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix ist, dann existiert eine orthogonale Matrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, für die $T^{\text{tr}}GT$ eine Diagonalmatrix ist.	<input type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein

Ergebnisteil. Tragen Sie bei den Aufgaben 6 bis 9 jeweils nur die Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. Sie brauchen die Ergebnisse **nicht** zu begründen, für Begründungen und Ansätze gibt es aber auch **keine** Punkte. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl. Für falsche Antworten gibt es **Null** Punkte.

6	<p>Gegeben ist die Matrix $P := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$.</p> <p>Berechnen Sie die zu P inverse Matrix $P^{-1} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$. (4 Punkte)</p>
7	<p>Der Endomorphismus φ des \mathbb{Q}-Vektorraums V habe bezüglich einer Basis \mathcal{B} die Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Die Eigenwerte dieser Matrix sind 2 und 4. Bestimmen Sie eine Eigenvektorbasis \mathcal{C} von φ, geben Sie aber nur die Basiswechsellmatrix ${}_{\mathcal{B}}\text{id}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$ an. (4 Punkte)</p>
8	<p>Im Vektorraum $V = \mathbb{Z}^{1 \times 3}$ (über dem Körper $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ mit sieben Elementen) seien die Vektoren $a = [2, 0, 1]$, $b = [1, 3, 0]$ und $c = [1, 0, 2]$ sowie der Teilraum $U = \langle a, b \rangle$ gegeben.</p> <p>(a) Wie viele Nebenklassen hat U in V? <input type="text"/> (1 Punkt)</p> <p>(b) Finden Sie eine lineare Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$, $\varphi \neq 0$, bei der alle Vektoren der Nebenklasse $U + c$ dasselbe Bild haben, und geben Sie die Abbildungsmatrix ${}_{\mathcal{S}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (a, b, c)$ und der Standardbasis \mathcal{S} von V an. (2 Punkte)</p> <p>(c) Welche Dimension hat der Teilraum W, der von den Vektoren der Nebenklasse $U + [3, 4, 5]$ erzeugt wird? <input type="text"/> (2 Punkte)</p>
9	<p>In einem \mathbb{R}-Vektorraum mit Basis \mathcal{B} sei der Endomorphismus φ gegeben durch seine Matrix ${}_{\mathcal{B}}\varphi^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.</p> <p>Welchen Grad hat das Minimalpolynom von φ? <input type="text"/> (2 Punkte)</p> <p>Welche Dimensionen haben die Haupträume von φ? <input type="text"/> (2 Punkte)</p>

Schriftlicher Teil. Beantworten Sie die Aufgaben 10 bis 13 schriftlich. Beweisen Sie alle Ihre Behauptungen. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer. Fangen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite an.

10	<p>Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „lineare Abbildung“. [Geben Sie dabei alle Voraussetzungen an und schreiben Sie in vollständigen Sätzen. Vergessen Sie nicht „für alle“ bzw. „es gibt“.] (4 Punkte)</p>
11	<p>Gegeben seien K-Vektorräume V und W mit einer linearen Abbildung $\varphi: V \rightarrow W$ und Vektoren $x, y \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie die Aussage „Ist $(\varphi(x), \varphi(y))$ eine linear unabhängige Folge, so ist auch die Folge (x, y) linear unabhängig.“ [Stellen Sie den logischen Aufbau Ihrer Argumentation unmissverständlich dar.] (4 Punkte)</p>
12	<p>Für jede $n \times n$-Matrix $M \in K^{n \times n}$ über einem Körper K bezeichnen wir mit φ_M die lineare Abbildung $\varphi_M = (x \mapsto Mx): K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$. Wir betrachten Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$. Der Spaltenraum $K^{n \times 1}$ besitze eine Basis, die gleichzeitig Eigenvektorbasis bezüglich φ_A und bezüglich φ_B ist. Zeigen Sie, dass $AB = BA$ ist. (4 Punkte)</p>
13	<p>Das Minimalpolynom $m(X)$ eines Endomorphismus φ eines K-Vektorraums V habe die Form $m(X) = u(X) \cdot v(X)$ mit teilerfremden Polynomen $u(X), v(X) \in K[X]$. Berechnen Sie für den Fall $K = \mathbb{Z}$ und $u(X) = X^2 + 1$ und $v(X) = X^2 + X + 1$ Polynome $s(X)$ und $t(X)$, für die sich jeder Vektor $x \in V$ in der Form $x = (u(\varphi) \circ s(\varphi))(x) + (v(\varphi) \circ t(\varphi))(x)$ schreiben lässt. (4 Punkte)</p>