25. März 2010

Nachholklausur Mathematische Grundlagen WS 09/10

Prof. Dr. Gerhard Hiß

Denken Sie daran, alle Ihre Behauptungen ausreichend zu begründen und Rechenwege nachvollziehbar zu dokumentieren.

Aufgabe 1. *(4 Punkte)*
Es seien A und B mathematische Aussagen. Zeigen Sie:

$$(A \Rightarrow \neg B) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg[(A \vee \neg B) \wedge B].$$

Aufgabe 2. *(4 Punkte)*
Es seien $M := \{5,3,-5,3,5,-3,-5,5,3,-5\}$ und $N := \{2n-1 \mid n \in \mathbb{Z}, |n| \leq 2\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad M \cup N, \quad M \cap N, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M, \quad (M \setminus N) \times (M \cap N), \quad \mathrm{Pot}(N \setminus M).$$

Aufgabe 3. *(2+4 Punkte)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a \leq b$. Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

a) $a^n b + ab^n \leq a^{n+1} + b^{n+1}$,

b) $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$.

Hinweis: Sie dürfen Teil (a) in Teil (b) benutzen, auch wenn Sie ihn vorher nicht gezeigt haben.

Aufgabe 4. *(4 Punkte)*
Wir definieren auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ die Verknüpfung $\star$ durch

$$(a,b) \star (c,d) := (a+c, b \cdot d) \quad \text{für alle } (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \star)$ ein kommutatives Monoid ist. Prüfen Sie außerdem, ob $(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \star)$ auch eine Gruppe ist.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*
Prüfen Sie, ob $\overline{133}$ in $\mathbb{Z}/226\mathbb{Z}$ invertierbar ist, und geben Sie gegebenenfalls das Inverse an (mit einem Vertreter aus $\{0\} \cup \underline{225}$).

Aufgabe 6. *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass

$$R := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x = 0 = y \text{ oder } xy > 0\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist, beschreiben Sie die Äquivalenzklassen und bestimmen Sie ein Vertretersystem.

Aufgabe 7. *(3 Punkte)*
Prüfen Sie die Abbildung

$$f : \mathrm{Pot}(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Pot}(\mathbb{R}_{\geq 0}), \quad M \mapsto M \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Aufgabe 8. *(4 Punkte)*
Die Abbildungen f und g seien definiert durch

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto [\varphi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto xt],$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad x \mapsto [\psi_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto x+t].$$

Nun sei $x \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie, ob die folgenden Ausdrücke definiert sind. Wenn nicht, begründen Sie das, wenn ja, werten Sie sie aus. (Falls das Ergebnis eine Abbildung ist, geben Sie diese vollständig mit Definitionsmenge, Zielmenge und Abbildungsvorschrift an.)

a) $(f(x))(x)$, b) $(f \circ g)(x)$, c) $f(x) \circ g(x)$, d) $f \circ (g(x))$.

Aufgabe 9. *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccc} x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 & = & -2 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 8x_4 & = & 6 \\ 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 10. *(3 Punkte)*
Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil sowie das multiplikative Inverse von $\frac{2-14i}{4-3i}$.