27. März 2008

Wiederholungsklausur
Mathematische Grundlagen WS 07/08
Prof. Dr. Gabriele Nebe

Name: ______________________________, **Matrikelnummer:** _______________

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Es sei $M := \{n \in \underline{9} \setminus \underline{3} \mid n \text{ ungerade}\}$ und $N := \{7,7,5,7,6,5,7\}$. Bestimmen Sie

$$|M|, \quad |N|, \quad M \setminus N, \quad N \setminus M, \quad \mathrm{Pot}(M \cap N), \quad |\mathrm{Pot}(M \cup N)|.$$

Aufgabe 2 *(2 Punkte)*
Geben Sie die folgende komplexe Zahl in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an: $\dfrac{-1+13i}{-1+3i}$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie die Matrizen AB und BA für

$$A := \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 1 \\ -1 & i & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 3}, \qquad B := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 2}.$$

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie zu $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 2}$ die Menge $L := \{B \in \mathbb{F}_2^{2\times 3} \mid BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$. Wie viele Elemente besitzt diese Menge?

Aufgabe 5 *(4 Punkte)*
Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ a \mapsto [a]$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus ist. Geben Sie ein Rechtsinverses an, und zeigen Sie, dass dies kein Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 6 *(4 Punkte)*
Berechnen Sie in $\mathbb{Z}/37\mathbb{Z}$ und stellen Sie die Ergebnisse mit Hilfe von Vertretern aus der Menge $\{0\} \cup \underline{36}$ dar:

$$[111] - [70], \quad [368] \cdot [40], \quad [6]^{2008}, \quad [6]^{-1}.$$

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*
Es seien $f := X^4 + X^2, g := X^3 - X^2 + X - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Berechnen Sie den $\mathrm{ggT}(f,g)$ sowie $a, b \in \mathbb{R}[X]$ mit $af + bg = \mathrm{ggT}(f,g)$.

Aufgabe 8 *(4 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die folgende Relation auf $\mathbb{R}$ eine Äquivalenzrelation ist, und geben Sie die Äquivalenzklassen an.

$$R := \{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x+y)(x-y) = 0 \}$$

Aufgabe 9 *(4 Punkte)*
Die Abbildungen $f : \underline{4} \to \underline{5}$ und $g : \underline{5} \to \underline{4}$ seien gegeben durch:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline f(i) & 2 & 4 & 3 & 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{c||c|c|c|c|c} i & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline g(i) & 1 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array}.$$

Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$, und geben sie an, ob f, g, $f \circ g$ und $g \circ f$ jeweils injektiv/surjektiv/bijektiv sind oder nicht (mit Begründung). Geben Sie im Falle der Bijektivität die Umkehrabbildung an.

Aufgabe 10 *(6 Punkte)*
Es seien $k, n \in \mathbb{N}$ und X die Anzahl der Möglichkeiten, k Elemente aus der Menge $\underline{n}$ mit Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge so auszuwählen, dass jedes der n Elemente mindestens einmal vorkommt. Zeigen Sie:

$$|X| = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{n-j+k-1}{k}.$$

(*Zu beachten:* Es ist $|M(0,k)| = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.)