Klausur zu Diskrete Strukturen, WS 2010/2011

B.Sc.-Modulprüfung/Scheinklausur

Dr. A. Niemeyer, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Gruppe A
Dauer: 120 min. **Gesamtpunktzahl:** 50 **Mindestpunktzahl zum Bestehen:** 25

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden Relationen auf $\underline{6}$: (8 PUNKTE)

$$R_1 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4),(5,2),(6,6)\}.$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4),(5,3),(5,4),(5,5)(6,3),(6,4),(6,6)\}.$$

Bestimmen Sie:

(a) zwei Paare $(a_1,a_2),(b_1,b_2)$ in $\underline{6}\times\underline{6}$, so dass $S = R_1 \cup \{(a_1,a_2),(b_1,b_2)\}$ eine Äquivalenzrelation ist. (2 P.)
(b) die Äquivalenzklassen von S. (2 P.)
(c) welche der Eigenschaften reflexiv (R), symmetrisch (S), transitiv (T) und antisymmetrisch (A) die Relation R_2 besitzt. (Tragen Sie die zutreffenden Abkürzungen in das Kästchen ein.) (2 P.)
(d) ob R_2 eine Totalordnung (T), partielle Ordnung (P) oder keine dieser Ordnungen (X) ist. Tragen Sie zusätzlich zu einer der obigen Abkürzungen noch die minimalen Elemente, falls R_2 eine partielle Ordnung ist, oder das Minimum, falls R_2 eine Totalordnung ist, in das Kästchen ein. (2 P.)

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist. (12 PUNKTE)

(a) Wieviele verschiedene Worte kann man bilden, die nicht mit R beginnen und die genau aus den Buchstaben des Wortes TREPPE bestehen? (3 P.)
(b) Ein Autor hat 10 verschiedene Bücher geschrieben, davon sind 4 Kochbücher und 6 Krimis. Wieviele Möglichkeiten gibt es eine Leseprobe aus 3 Buchtiteln zusammenzustellen, wenn diese Probe mindestens zwei Krimis enthalten soll? (3 P.)
(c) Wieviele Farbzusammenstellungen gibt es um einen Blumenkasten mit 4 Blumen zu bepflanzen, wenn es rote, gelbe, pinke und blaue Blumen zur Auswahl gibt und der Kasten höchstens eine gelbe Blume enthalten soll? (Hierbei spielt die Reihenfolge, in der die Farben im Blumenkasten auftreten, keine Rolle.) (3 P.)
(d) Wieviele Möglichkeiten gibt es 5 Sträflinge auf 4 nummerierte Zellen zu verteilen, so dass keine der Zellen leer ist und Ede und Kalle sich keine Zelle teilen? (3 P.)

(a) ☐ (b) ☐ (c) ☐ (d) ☐

Aufgabe 3. Gegeben seien die Permutationen (7 PUNKTE)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $\psi = \sigma \circ \tau$.

(a) Schreiben Sie ψ als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)
(b) Berechnen Sie das Signum von ψ. (2 P.)
(c) Sei k_0 das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^k = 1$. Berechnen Sie k_0. (2 P.)

$\psi =$ ☐ sgn(ψ)= ☐ $k_0 =$ ☐

Aufgabe 4. (7 PUNKTE)

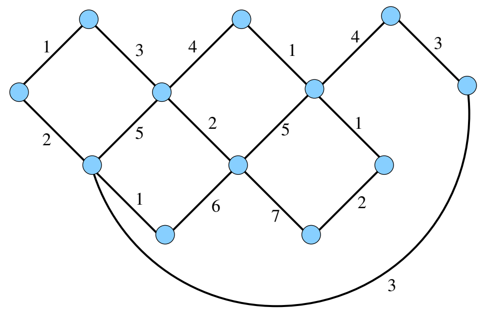
(a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(490, 155)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $d = \lambda \cdot 490 + \mu \cdot 155$. (3 P.)

(b) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl a mit $a \equiv 3 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 13^3 \pmod 7$. (2 P.)

(c) Lösen Sie die Gleichung $x \cdot \overline{155} = \overline{10}$ in $\mathbb{Z}_{490}$. (2 P.)

$d =$ ☐ $\lambda =$ ☐ $\mu =$ ☐ $a =$ ☐ $x =$ ☐

Aufgabe 5. Gegeben sei der folgende gewichtete Graph: (5 PUNKTE)



(a) Hat der Graph eine Eulertour? ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

(b) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum des gewichteten Graphen. Tragen Sie die Längen der Kanten des Spannbaums in aufsteigender Reihenfolge in das nachfolgende Kästchen ein.

☐ (3 P.)

Aufgabe 6. (5 PUNKTE)

(a) Bestimmen Sie das Inverse der reguären Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit (3 P.)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad B^{-1} = \boxed{}.$$

(b) Gegeben sei ein homogenes lineares Gleichungssystem über $\mathbb{Z}_{17}$, mit Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{Z}_{17}^{7\times8}$.

(i) Die Stufenzahl r von A ist höchstens: ☐ (1 P.)

(ii) Falls A maximale Stufenzahl hat, dann ist die Anzahl der verschiedenen Lösungen des Gleichungssystems: ☐ (2 P.)

Aufgabe 7. Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten und, mit ausführlicher Begründung, auf einem gesonderten Blatt abzugeben. (6 PUNKTE)

(a) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $d = ggT(a, b)$. Seien weiter $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $a = dx$ und $b = yd$. Zeigen Sie, dass dann $ggT(x, y) = 1$ ist. (2 P.)

(b) Beweisen Sie, dass $n^3 \equiv n \pmod 6$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2 P.)

(c) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Falls sie richtig sind, geben Sie bitte einen Beweis an, falls sie falsch sind, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(i) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $B \neq 0$. Falls $B^2 = B$ dann ist $B = E_n$. (1 P.)

(ii) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls A und B regulär sind, so ist auch $(A^{-1}B)^t$ regulär. (1 P.)

Viel Erfolg!