Nachholklausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ SS 92

Aufgabe 1. **3 Punkte**
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die $n \equiv 4 \mod 7$, $n \equiv -9 \mod 11$ und $n \equiv -3 \mod 5$ gilt.

Aufgabe 2. **2+2 Punkte**
(a) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 360 mit zwei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 360 mit drei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. **3+3 Punkte**
(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{3\times 3}(\mathbf{Z}_2)$.

(b) Es sei s ein Element aus den reellen Zahlen $\mathbf{R}$ mit $s^2 = 5$ und $a = s + 3$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbf{Q}$.

Aufgabe 4. **3 Punkte**
Es sei $I \subseteq \mathbf{Z}_2[x]$ das von $x^5 + x^4 + x^2 + 1$ und $x^5 + x^3 + x^2 + 1$ erzeugte Hauptideal in $\mathbf{Z}_2[x]$. Bestimmen Sie ein Polynom g aus $\mathbf{Z}_2[x]$, so daß $I = \mathbf{Z}_2[x]g(x)$ gilt.

Aufgabe 5. **5 Punkte**
Es sei A eine freie Boolesche Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, x_3\}$. Es seien Elemente $f = x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ und $g = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$ aus A geben. Gilt $f = g$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6. **4 Punkte**
Es seien zwei Polynome $f = x^6 + x^4 + x^3 + 1$ und $g = x^3 + x^2 + 1$ aus $\mathbf{Z}_2[x]$ gegeben. Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von f und g sowie Polynome u und v aus $\mathbf{Z}_2[x]$, für die $d = u * f + v * g$ gilt.

Aufgabe 7. **5 Punkte**
Bestimmen Sie die ganzzahligen Lösungen $x \in \mathcal{V}_{4\times 1}(\mathbf{Z})$ der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 14 & 4 \\ 6 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. **4 Punkte**

Es sei P die Pyramide . Es sei M die Menge der Ecken, Kanten und Flächen außer der quadratischen Grundfläche sowie P und $\emptyset$. Dann ist $(M, \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge mit 19 Elementen. Bestimmen Sie die Eulercharakteristik des zugehörigen Verbandes.

Aufgabe 9. **2+8 Punkte**

(a) Bestimmen Sie $\mu(0,1)$ des Verbandes .

(b) Es sei V ein endlicher Verband mit kleinstem Element 0 und größten Element 1. Es gebe genau ein maximales Element m ungleich 0 unterhalb von 1. Zeigen Sie, daß $\mu(0,1) = 0$ gilt.
HINWEIS: Betrachten Sie Ketten von 0 nach 1 und unterscheiden Sie dabei, ob das vorletzte Element der Kette m ist oder nicht.

Aufgabe 10. **2+3+4 Punkte**
Es sei $f = x^3 + x + 1$ aus $\mathbf{Z}_2[x]$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie ein unverkürzbares Erzeugendensystem von $R = \mathbf{Z}_2[x]/(f \cdot \mathbf{Z}_2[x])$ als Ring-mit-1.

(b) Ist R ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie ein primitives Element p von R und berechnen Sie p^{49}.

Aufgabe 11. **3+3 Punkte**
Es sei $M = \{(2,1,1,1), (3,2,7,7), (2,1,7,1), (3,2,7,13)\} \subset \mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})$. Weiter sei U die von M erzeugte Untergruppe von $\mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})$.

(a) Zeigen Sie, daß die Faktorgruppe $\mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})/U$ isomorph zu $\mathbf{Z}_6 \dot{+} \mathbf{Z}_6$ ist.

(b) Gegeben Sie zwei verschieden lange, unverkürzbare Erzeugendensysteme für $\mathbf{Z}_6 \dot{+} \mathbf{Z}_6$ an.

Aufgabe 12. **4 Punkte**
Wieviele verschiedene Typen von Halsketten mit 5 Perlen gibt es, wenn jede Perle blau, rot, gelb oder grün sein kann?

Aufgabe 13. **5 Punkte**
Es sei s die positive, reelle Zahl, für die $s^2 = 2$ gilt. Bestimmen Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes ein Polynom f kleinsten Grades aus $\mathbf{Q}[x]$, so daß $f(s) = 3$ und $f(-1) = 4$ gilt.
HINWEIS: Wie lautet das Minimalpolynom von s?