Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 20.09.2000

DIPLOMVORPRÜFUNG

Mathematik II (Diskrete Strukturen)

Aufgabe 15: (7 Punkte)
Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq n$, die folgende Kongruenz erfüllen:

$$(2^t - 1)^2 \equiv 1 \pmod{2^n}.$$

Aufgabe 16: (8 Punkte)
Es sei G ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung $n(G) \geq 3$. Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{dm}(G) = r(G)$, so besitzt G keine Brücke.

Aufgabe 17: (9 Punkte)
Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) \geq 4$ mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq \dfrac{n(G)}{2}$, und es sei M ein perfektes Matching von G mit $d(x, G) + d(y, G) \leq n(G) - 2$ für jede Kante $xy \in M$. Zeigen Sie, daß der Komplementärgraph $\bar{G}$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 18: (8 Punkte)
Es sei φ die Eulersche φ-Funktion.

a) Bestimmen Sie $\varphi(2000)$.

b) Bestimmen Sie diejenige ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 1999$, die folgende Kongruenz erfüllt:

$$(123)^{802} \equiv x \pmod{2000}.$$

Aufgabe 19: (9 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ und $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der a_n.
Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellungen aus den Beispielen 6.1 a) und 6.1 d).

Aufgabe 20: (9 Punkte)
Bestimmen Sie für $n \geq 4$ die Anzahl $F(n, n-3)$ der Permutationen aus S_n mit mindestens $n - 3$ Fixpunkten.
Gibt es mehr oder weniger als $2\dbinom{n+1}{3}$ solcher Permutationen?