Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums $V = \mathbb{R}^{1\times 3}$ sind Teilräume von V?

(a) $M_1 = \{\,[\,a, b, c\,] \in V \mid a + b + c = 0\,\}$,

(b) $M_2 = \{\,[\,a, b, c\,] \in V \mid a^2 + b^2 + c^2 = 0\,\}$,

(c) $M_3 = \{\,[\,a, b, c\,] \in V \mid a^3 + b^3 + c^3 = 0\,\}$.

(Antwort jeweils mit Begründung.) *6 Punkte*

Aufgabe 2.
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir berechnen daraus eine neue Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, indem wir zunächst auf A die Zeilenumformung $Z_2 \mid Z_2 + 2\,Z_1$ und dann auf die so entstandene Matrix die Zeilenumformung $Z_3 \mid Z_3 - Z_1 + 3\,Z_2$ anwenden. Schreiben Sie B als Produkt zweier Matrizen, von denen eine gleich A ist. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & -9 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$ eine Basis des Zeilenraums und eine Basis des Spaltenraums.

(b) Begründen Sie Ihre Berechnungsmethode für die Basis des Zeilenraums. *6 Punkte*

Aufgabe 4.
Invertieren Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Matrix $M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Max behauptet:

Sind u, v Vektoren eines Vektorraums V und ist $v \in \langle u \rangle$, so ist die Folge (u, v) linear abhängig.

Moritz behauptet:

Sind u, v Vektoren eines Vektorraums V und ist die Folge (u, v) linear abhängig, so gilt $v \in \langle u \rangle$.

Wer hat Recht? Beide, einer, keiner? Falls nicht beide: Für welche Vektorräume sind beide Aussagen wahr? (Es kommt auf die sorgfältige und vollständige Argumentation an.) *6 Punkte*

Aufgabe 6.
Berechnen Sie das Rechtsradikal $A^{\perp} = \{y \in \mathbb{Q}^{4\times 1} \mid x \cdot A \cdot y = 0 \;\text{ für alle }\; x \in \mathbb{Q}^{1\times 3}\}$ zur Matrix A aus Aufgabe 3. Begründen Sie dabei Ihr Vorgehen. *5 Punkte*

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das die Lösungsmenge $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$ hat. (Erklären Sie, wie Sie darauf kommen, und zeigen Sie, dass es die Bedingung erfüllt.) *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Geben Sie ein (konkretes) Beispiel für eine surjektive lineare Abbildung an, so dass die Dimension des Kerns dreimal so groß ist wie die Dimension des Bildes. *3 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur

Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 9.
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen Polynomfunktionen f und g auf $\mathbb{R}$ „n-äquivalent“ (bei $x = 0$) nennen, wenn ihre Differenz die Form $(f-g)(x) = x^n \cdot q(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ für eine Polynomfunktion $q \in P(\mathbb{R})$ hat.

(a) Zeigen Sie, dass n-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf $P(\mathbb{R})$ ist.

(b) Geben Sie für $n = 1$ ein Repräsentanten<u>system</u> für die Äquivalenzklassen an.

(c) Kann man (allgemein) die n-Äquivalenzklassen als Elemente eines Faktorraums von $P(\mathbb{R})$ schreiben? (Begründung.) *6 Punkte*

Aufgabe 10.
Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{2001} = \mathbb{Z}/2001\,\mathbb{Z}$ betrachten wir die Elemente $a = \overline{49}$ und $b = \overline{81}$.

(a) Prüfen Sie möglichst einfach nach, ob die Elemente a und b invertierbar sind.

(b) Berechnen Sie die Inversen von a und b, soweit sie existieren. (Erläutern Sie dabei Ihre Rechnung.) *5 Punkte*

Aufgabe 11.
Gegeben seien ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ und ein Skalarprodukt $\Gamma\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Dabei sei ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}\Gamma_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{C}}\Gamma_{\mathcal{C}}$.

(b) Ist Γ nicht ausgeartet? Ist Γ positiv definit? (Antwort mit Begründung.) *5 Punkte*

Aufgabe 12.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basisfolge von V und Ψ das durch ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ gegebene Skalarprodukt auf V. Berechnen Sie eine Basisfolge $\mathcal{C}$ von V, für die ${}^{\mathcal{C}}\Psi_{\mathcal{C}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(Empfehlung: Vermeiden Sie Brüche.) *5 Punkte*

Aufgabe 13.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 1 seien die Vektoren

$$a = (x \mapsto 3 + 2x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = (x \mapsto 1 - x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gegeben. Geben Sie positiv definite Skalarprodukte Γ_1 und Γ_2 auf $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ an, so dass a und b bezüglich Γ_1 orthogonal, aber bezüglich Γ_2 nicht orthogonal sind. *4 Punkte*

Aufgabe 14.
Wir betrachten $\mathbb{R}^{1\times 2}$ als euklidischen Vektorraum bezüglich des Skalarprodukts Φ mit ${}^{\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ bezüglich der Standardbasisfolge $\mathcal{S}$.

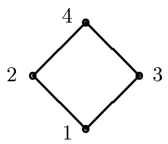
Welcher Vektor in $\langle\, [3,3]\,\rangle$ approximiert den Vektor $[0,3]$ am besten? (Begründung.) *4 Punkte*

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 15.
Beschreiben Sie für jede natürliche Zahl $L \geq 3$ ein Poset P mit den folgenden Eigenschaften: L ist die Länge der längsten Kette von P und jedes Element von P liegt in einer Kette der Länge L; trotzdem besitzt P auch eine maximale (= gesättigte) Kette der Länge $< L$, ja sogar maximale Ketten aller Längen k für $1 < k < L$. *7 Punkte*

Aufgabe 16.
Definieren Sie die Verfeinerungsordnung für das Poset $\mathcal{P}_n$ aller Mengenpartitionen von $\{1, \ldots, n\}$ und die entsprechende Überdeckungsrelation. Zeichnen Sie das Unterposet von $\mathcal{P}_4$, welches als Elemente alle Partitionen von



in *konvexe* Blöcke enthält. (Beschriften Sie die Elemente geeignet!) Welche Elemente von $\mathcal{P}_4$ kommen dabei nicht vor? *8 Punkte*

Aufgabe 17.
Gegeben sei ein konvexes n-Eck, bei dem sich nie mehr als zwei Verbindungsgeraden von je 2 Ecken in einem Punkt schneiden. Wie viele Schnittpunkte von je zwei Verbindungsgeraden liegen echt im Inneren des n-Ecks (also nicht außerhalb und nicht auf dem Rand)? *9 Punkte*

Aufgabe 18.
Die *Eulerzahlen* $A(n,k)$ zählen die Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k *Anstiegen*, wobei ein Platz i ein Anstieg von π ist, wenn $\pi(i) < \pi(i+1)$ gilt. (Man setzt $A(0,0) := 1$, $A(0,k) := 0$ für $k \geq 1$). Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursionsformel

$$A(n,k) = (n-k)\,A(n-1,k-1) + (k+1)\,A(n-1,k).$$

9 Punkte

Aufgabe 19.
Gegeben sei die lineare Rekursion

$$f(n+4) - 3\,f(n+3) - 6\,f(n+2) + 28\,f(n+1) - 24\,f(n) = 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$f(0) = 1,\ f(1) = 3,\ f(2) = 13,\ f(3) = 35.$$

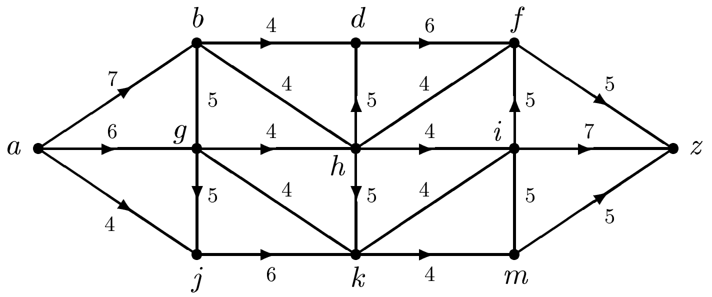
Berechnen Sie die explizite Lösung und geben Sie eine rationale erzeugende Funktion für die Koeffizienten $f(n)$ an. *12 Punkte*

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 20.
Zeigen Sie: In jeder Gruppe von $n \geq 2$ Personen sind immer (mindestens) zwei, welche mit der gleichen Anzahl anderer Personen in der Gruppe bekannt sind. ("Bekanntsein" wird als irreflexive, symmetrische Relation aufgefaßt, welche im Allgemeinen nicht transitiv ist.) Formulieren Sie die Behauptung auch in der Sprache der Graphentheorie. *8 Punkte*

Aufgabe 21.
Bestimmen und skizzieren Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk (mindestens) vier maximale Flüsse mit ganzzahligen Werten. (Ungerichtete Kanten können dabei in beiden Richtungen mit der angegebenen Kapazität durchlaufen werden).



Ist es möglich, zwei maximale Flüsse mit verschiedenen *zugehörigen* minimalen Schnitten $L = (A, \overline{A})$ zu finden? *8 Punkte*

Aufgabe 22.
Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (E, K)$ mit $|E| = n$ und $|K| > \binom{n-1}{2}$ zusammenhängend ist. Gibt es einen unzusammenhängenden Graphen mit n Ecken und $|K| = \binom{n-1}{2}$ Kanten? *7 Punkte*
