Klausur zur Linearen Algebra II (29. 6. 98)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jeder Seite nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Von den 9 gegebenen Aufgaben für insgesamt 64 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 25 Punkte notwendig. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden, und achten Sie bei Beweisen auf die Vollständigkeit Ihrer Argumentation.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Es sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Wenn es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, so daß $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, in deren Haupdiagonalen nur Nullen stehen, dann ist φ nilpotent (also $\chi_\varphi = X^n$).

(b) Ist φ unipotent (also $\chi_\varphi = (X-1)^n$), dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, so daß $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ eine obere Dreiecksmatrix ist, in deren Haupdiagonalen nur Einsen stehen. *2 + 3 = 5 Punkte*

Aufgabe 2.

Beweisen Sie, ohne eine solche Trigonalisierung durchzuführen, daß die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

simultan trigonalisierbar sind, d. h., daß es eine Matrix $T \in GL_3(\mathbb{R})$ gibt, so daß die beiden Matrizen $T^{-1}AT$ und $T^{-1}BT$ obere Dreiecksmatrizen sind. *6 Punkte*

Aufgabe 3.

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 7 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Bestimmen Sie

(a) mit Hilfe des Invariantenteileralgorithmus die Invariantenteiler von $XE_3 - A$ und dann daraus

(b) die Frobenius-Normalform von A,

(c) die Weierstraß-Normalform von A

(d) und, wenn sie existiert, die Jordan-Normalform von A. *7 + 2 + 2 + 2 = 13 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1 und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Beweisen Sie: Sind zwei Matrizen $A, B \in R^{n\times n}$ ähnlich, so sind sie äquivalent. (Geben Sie insbesondere die Definitionen der beiden Begriffe jeweils mit ihren Voraussetzungen an.)

(b) Sei nun $R = K$ ein Körper. Geben Sie zwei quadratische Matrizen über K an, die äquivalent, aber nicht ähnlich sind, und beweisen Sie das. (Es kommt auf die Argumentation an.)

3 + 5 = 8 Punkte

Aufgabe 5.
Ähnliche Matrizen haben bekanntlich dasselbe charakteristische Polynom. Wie viele Ähnlichkeitsklassen (über $\mathbb{R}$) von reellen Matrizen gibt es zum charakteristischen Polynom
$$f = (X^2 + X + 1)^2 \, (X^2 + 2X + 2)^3 \in \mathbb{R}[X]\,?$$
Hinweis: Schreiben Sie keine Repräsentanten für die Klassen hin, denn das sind riesige 10×10-Matrizen, sondern bestimmen Sie nur ihre Anzahl (natürlich mit Begründung). *6 Punkte*

Aufgabe 6.
Über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ mit zwei Elementen seien die Polynome
$$f = X^7 + X^3 + X + 1 \quad \text{und} \quad g = X^5 + X^3 + X$$
gegeben. Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler d von f und g sowie zwei Polynome $a, b \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $af + bg = d$. *8 Punkte*

Aufgabe 7.
Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ sei die Basis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} := \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix} \}$ gegeben, und es sei β die Standardbilinearform auf V. Berechnen Sie mit Hilfe des Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis $\mathcal{C} = \{w_1, w_2, w_3\}$ von V bezüglich β, so daß $w_1 \in \langle v_1 \rangle$ ist. *7 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Eine Bilinearform β auf V sei durch die Matrix $B = B^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\beta) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des modifizierten Gauß-Algorithmus eine Orthogonalbasis $\mathcal{C}$ von V bezüglich β, und geben Sie die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ und die Strukturmatrix $B^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\beta)$ an.

(b) Ist β ausgeartet? (Begründung.)

(c) Ist β positiv definit? (Begründung.) *5 + 1 + 1 = 7 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und β eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf V. Für φ aus $\mathrm{End}_K(V)$ bezeichnen wir mit $\varphi^\dagger$ die zu φ adjungierte Abbildung bezüglich β. Zeigen Sie: Für alle $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$ gilt $(\varphi + \psi)^\dagger = \varphi^\dagger + \psi^\dagger$.

(Hinweis: Es kommt auf die sorgfältige Argumentation an. Wo geht z. B. die Voraussetzung ein, daß β nicht-ausgeartet ist?) *4 Punkte*