30.3.2007

Klausur Lineare Algebra II

Prof. Dr. G. Nebe, M. Kirschmer, A. Günther

Tragen Sie auf diesem Deckblatt bitte Ihren Namen in *Blockbuchstaben* sowie Ihre Matrikelnummer ein.

Name, Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Bearbeitungszeit: 120 Minuten
erlaubte Hilfsmittel: keine

Aufgabe	maximal	erreicht	Korrektor
1	9		
2	9		
3	8		
4	6		
5	6		
6	6		
7	6		
Summe	50		

Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.
Beachten Sie, daß der Lösungsweg und die Rechnungen mit in die Bewertung eingehen.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Sei

$$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie Matrizen $L, P, U \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ mit $LPU = N$; dabei seien L eine untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und U eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}.$$

Bestimmen Sie die Jordannormalform J von A sowie eine Matrix $X \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{F}_2)$ mit $X^{-1}AX = J$.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Bestimmen Sie die affine Normalform der Quadrik $\mathrm{Null}(p(x)) \subset \mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ mit

$$p(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_2 + 6x_3 + 2\,.$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}_3$ der 3-dimensionale euklidische affine Raum mit dem Standardskalarprodukt. Seien G und H die folgenden affinen Unterräume von $\mathcal{E}$:

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_2 - x_3 = 1 \right\}, \quad G := \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_a.$$

Bestimmen Sie $\mathrm{Dim}(H)$, $\mathrm{Dim}(G)$ und $d(H, G)$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

In $\mathcal{P}(\mathbb{F}_3^4)$ seien die folgenden Punkte gegeben:

$$Q := \mathbb{F}_3^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; R := \mathbb{F}_3^* \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; S := \mathbb{F}_3^* \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; T := \mathbb{F}_3^* \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; T' := \mathbb{F}_3^* \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Doppelverhältnisse $DV(Q, R, S, T)$ und $DV(Q, R, S, T')$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & -4 & -6 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die Invariantenteiler von A.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Es seien K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $E := \mathrm{End}_K(\mathcal{V})$.

Zeigen Sie, daß es genau eine surjektive K-lineare Abbildung $\varepsilon\colon E \otimes E \to E$ gibt mit $\varepsilon(\varphi \otimes \psi) = \varphi \circ \psi$ für alle $\varphi, \psi \in E$.