Nachholklausur zur Linearen Algebra II (12. 10. 1995)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 59 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen mindestens 25 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe.

a) Was ist ein „Integritätsbereich"? *1 Punkt*

b) Was ist ein „euklidischer Ring"? *3 Punkte*

c) Was ist ein „euklidischer Vektorraum"? *2 Punkte*

Zur Erinnerung: Eine Definition besteht aus einem oder mehreren vollständigen Sätzen, alle Voraussetzungen werden angegeben, und für alle auftretenden Namen (wie z. B. K oder V) wird gesagt, was für Objekte sie bezeichnen.

Aufgabe 2.

Es sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ gegeben.

a) Berechnen Sie eine Basis für das Radikal von V bezüglich Φ.

b) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ.

c) Berechnen Sie den Rang und die Signatur von Φ.

d) Ist Φ ausgeartet? (Begründung.) *10 Punkte*

Zur Erinnerung: Verwechseln Sie jeweils die Basisvektoren nicht mit ihren Koeffizientenspalten bezüglich B.

Aufgabe 3.

Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und B die Standardbasis von V. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B = A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ gegeben.

a) Ist φ diagonalisierbar? (Begründung.)

b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

c) Es sei $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt auf V mit $[\Phi]_B = A$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ. *10 Punkte*

Aufgabe 4.
In $\mathbb{Z}$ seien die Zahlen $a = 18\,079$ und $b = 18\,281$ gegeben.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des euklidischen Algorithmus einen größten gemeinsamen Teiler d von a und b.

b) Stellen Sie d als Linearkombination von a und b dar. *6 Punkte*

Aufgabe 5.
Bestimmen Sie (bis auf Isomorphie) alle abelschen Gruppen der Ordnung 54. *4 Punkte*

Aufgabe 6.

Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}$

a) die rationale kanonische Form,

b) das charakteristische Polynom,

c) das Minimalpolynom,

d) die Weierstraßsche Normalform,

e) falls sie existiert, die Jordansche Normalform. *10 Punkte*

Aufgabe 7.
Wir betrachten alle Matrizen $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$, die das Minimalpolynom $\chi_A = (X-1)^2$ haben. Geben Sie alle Möglichkeiten für die Jordansche Normalform einer solchen Matrix an. (Mit Begründung) *6 Punkte*

Aufgabe 8.
Bestimmen Sie jeweils die Plückerkoordinaten der Teilräume

$$T_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad T_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^{4\times 1}$ (mit Standardbasis B). *7 Punkte*