Semesterklausur zur Linearen Algebra II (7. 7. 95)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe, und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Von den 8 gegebenen Aufgaben für insgesamt 65 Punkte können Sie eine beliebige Auswahl in beliebiger Reihenfolge bearbeiten. Sie brauchen mindestens 25 Punkte, um einen Übungsschein zu erhalten. Bitte beachten Sie bei der Bearbeitung der Aufgaben, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösungen bilden. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Formulieren Sie Definitionen für die folgenden Begriffe.

(a) Was ist eine „Sesquilinearform“, und wann heißt sie „hermitesch“?

(b) Wann heißen zwei Matrizen „ähnlich“, wann „äquivalent“?

(c) Es seien a, b und d Elemente eines Integritätsbereichs. Wann heißt d ein „größter gemeinsamer Teiler“ von a und b? *7 Punkte*

Aufgabe 2.
Es sei V ein 3-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorrraum und $B = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basisfolge von V. Ein Skalarprodukt Φ auf V sei durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ.

(b) Ist Φ positiv definit? (Begründung.)

(c) Berechnen Sie den Rang und die Signatur von Φ.

(d) Ist Φ ausgeartet? (Begründung.) *8 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei $V = \mathbb{Q}^{3\times 1}$ und B die Standardbasis von V. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ sei durch die Abbildungsmatrix ${}_B[\varphi]_B = A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Ist φ diagonalisierbar? (Begründung.)

(b) Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$, so daß $P^{-1}AP$ Diagonalgestalt hat.

(c) Es sei $\Phi\colon V \times V \to \mathbb{Q}$ ein Skalarprodukt auf V mit $[\Phi]_B = A$. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ. *10 Punkte*

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie in $\mathbb{Z}_2[X]$ einen größten gemeinsamen Teiler d der Polynome
$$f_1 = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{und} \quad f_2 = X^5 + X^4 + X^2 + 1.$$

(b) Stellen Sie d in der Form $a \cdot f_1 + b \cdot f_2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[X]$ dar. *6 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei $f = (X^2 + 1)(X + 1)^2 \in \mathbb{R}[X]$.

(a) Zeigen Sie: Haben zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{5\times5}$ das Polynom f als Minimalpolynom, d. h., ist $\mu_A = \mu_B = f$, so sind A und B ähnlich.

(b) Wieviele Klassen ähnlicher Matrizen, die f als Minimalpolynom haben, gibt es in $\mathbb{R}^{6\times6}$? (Mit Beweis.) *9 Punkte*

Aufgabe 6.

Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times4}$

(a) die rationale kanonische Form,

(b) das charakteristische Polynom,

(c) das Minimalpolynom,

(d) die Weierstraßsche Normalform,

(e) falls sie existiert, die Jordansche Normalform. *10 Punkte*

Aufgabe 7.

Es sei $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{2\times1}$.

(a) Geben Sie für jeden der beiden $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ eine Basis an, und zeigen Sie, daß die beiden Vektorräume isomorph sind.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keinen Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ mit $\varphi(u, v) = u \otimes v$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^2$.

(c) Läßt sich der Vektor $z = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ in der Form $u \otimes v$ mit $u, v \in \mathbb{R}^2$ schreiben? (Hinweis: Benutzen Sie die eindeutige Darstellung von z und $u \otimes v$ in einer Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$.) *10 Punkte*

Aufgabe 8.

In einem euklidischen Ring R seien zwei Elemente $a, b \in R$ mit $1 \in \operatorname{ggT}(a, b)$ gegeben. Zeigen Sie:
$$R/aR \otimes R/bR \cong \{0\}$$
(als R-Moduln). *5 Punkte*