Nachholklausur zur Linearen Algebra II (6. 10. 94)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen **`wesentlichen`** Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle“ oder „es gibt ein“ wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte erforderlich. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Es sei φ ein Endomorphismus eines 4-dimensionalen Vektorraums V über dem Körper $\mathbb{Z}_2$ mit zwei Elementen; und zwar habe φ bezüglich einer gewissen Basisfolge $\mathcal{B}$ die Matrix

$$\mathrm{m}(\mathcal{B}, \varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: F.$$

Berechnen Sie die Dimension der von φ erzeugten $\mathbb{Z}_2$-Algebra–m–1 $A = \langle\varphi\rangle_{\mathbb{Z}_2-Alg-m-1}$ (als Teilalgebra von $\mathrm{End}^{\cdot}(V)$). *3 Punkte*

Aufgabe 2.

a) Definieren Sie die Redeweise „Der Vektorraum V ist die (innere) <u>direkte Summe</u> der Teilräume U_1 und U_2.“ *2 Punkte*

b) Wann heißt ein T-Raum V <u>unzerlegbarer</u> T-Raum? *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Auf dem Spaltenraum $V = \mathbf{V}_{4\times 1}(\mathbb{R})$ wird durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine lineare Abbildung

$$\varphi := (X \longmapsto AX \quad \text{für} \quad X \in V) \colon V \longrightarrow V$$

definiert. Der Vektorraum V wird durch die Setzung

$$XT := \varphi(X) \quad \text{für} \quad X \in V$$

zum T-Raum. Schreiben Sie V als direkte Summe von zyklischen Teil-T-Räumen $\langle X_i\rangle_{T-\mathrm{Raum}}$. *4 Punkte*

Aufgabe 4.
Gegeben seien ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basisfolge $\mathcal{B}$ und die lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V \text{ mit } \mathrm{M}(\mathcal{B}, \varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lautet die rationale Normalform für φ (bei Verwendung der Spaltenvorschrift)? *3 Punkte*

b) Berechnen Sie eine Basisfolge $\mathcal{K}$, d. h. die Wechselmatrix (!) $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \mathcal{K})$, bezüglich der die Matrix von φ die rationale Normalform-Matrix ist. *3 Punkte*

Aufgabe 5.
Rechnen Sie eine Lösung $Y = (x \longmapsto Y(x) = e^{xA} \cdot C$ für $x \in \mathbb{R}) \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ des Differentialgleichungssystems $\dfrac{dY(x)}{dx} = AY(x)$ für $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ aus, d. h., berechnen Sie die einzelnen Komponenten der Matrix e^{xA}! *7 Punkte*

Aufgabe 6.
Auf einem 5-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V sei eine lineare Abbildung φ durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basisfolge $\mathcal{B} = (B_1, \ldots, B_5)$ gegeben. W sei der von dem Vektor $Y = B_2 + B_5$ erzeugte T-Teilraum des T-Raums V zu $T := \varphi$.

a) Welche Dimension hat V/W? (Begründung!) *4 Punkte*

b) Berechnen Sie das Minimalpolynom $\overline{m}(t)$ der von φ auf dem Faktorraum V/W bewirkten linearen Abbildung $\overline{\varphi} \colon V/W \longrightarrow V/W$. *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Wieviele Isomorphieklassen von 6-dimensionalen T-Räumen über $\mathbb{Q}$ gibt es, bei denen die durch die Operation T bewirkte lineare Abbildung φ das Minimalpolynom $(t-1)^2$ hat?

a) Wie lautet das charakteristische Polynom von φ? (Begründung!) *3 Punkte*

b) Geben Sie zu jeder Isomorphieklasse genau ein Beispiel an. (Mit Text.) *2 Punkte*

Aufgabe 8.
Auf einem 2-dimensionalen euklidischen Vektorraum (V, Γ) sei eine orthogonale Abbildung $\varphi \colon V \longrightarrow V$ gegeben, die keinen 1-dimensionalen Teilraum invariant läßt. Jedoch sei $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert mit Eigenvektor $C = A \otimes 1 + B \otimes i \in V_{\mathbb{C}}$ der Komplexifikation $(V \otimes \mathcal{C}, \varphi_{\mathbb{C}})$. Zeigen Sie:

a) Die Matrix von φ bezüglich der Basis $\mathcal{D} := (A, -B)$ von V stimmt mit der Matrix von $\cdot\lambda$ (der Multiplikation mit λ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{C}$) bezüglich der Basis $(1, i)$ überein. (Hinweis: Berechnen Sie $\varphi_{\mathbb{C}}(C)$ auf zwei Arten.) *4 Punkte*

b) $\overline{C} := A \otimes 1 - B \otimes i$ ist ebenfalls ein Eigenvektor von $\varphi_{\mathbb{C}}$. *3 Punkte*

c) $\varphi_{\mathbb{C}}$ ist unitär bezüglich des üblichen hermiteschen Produkts $\Gamma_{\mathbb{C}}$ auf $V \otimes \mathbb{C}$, das (V, Γ) „fortsetzt“. *4 Punkte*

Aufgabe 9.
Gegeben ist ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum (V, Γ) mit einer ON-Basis $\mathcal{R}$ sowie eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow V$ durch ihre Matrix

$$\mathrm{M}(\mathcal{R}, \varphi, \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} w & -w \\ w & w \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad w := \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

a) Ist φ eine orthogonale Abbildung? (Begründung!) *3 Punkte*

b) Berechnen Sie für die Komplexifikation $(V \otimes \mathbb{C}, \varphi_{\mathbb{C}})$ eine Basis $\mathcal{C}$, bezüglich der die Matrix von $\varphi_{\mathbb{C}}$ die Jordan-Normalform hat. (D. h., geben Sie die Matrizen $\mathrm{M}(\mathcal{R} \otimes 1, \mathcal{C})$ und $\mathrm{M}(\mathcal{C}, \varphi_{\mathbb{C}}, \mathcal{C})$ an.) *5 Punkte*

c) Berechnen Sie gemäß Aufgabe 7a für einen Eigenwert λ von $\varphi_{\mathbb{C}}$ die Basis $\mathcal{D}$ und die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{D}, \varphi_{\mathbb{C}}, \mathcal{D})$. *2 Punkte*

Aufgabe 10.
Zu welcher bekannten abelschen Gruppe ist $(\mathbb{Z}_3 \dot{+} \mathbb{Z}_3)_{\mathbb{Z}} \otimes {}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4)$ isomorph? (Begründung!) *3 Punkte*

Aufgabe 11.
Es sei $V = \mathbf{V}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Läßt sich der Vektor $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in V \otimes V$ in der Form $A \otimes B$ mit $A, B \in V$ schreiben? *4 Punkte*

Aufgabe 12.
Es sei K ein Körper. Gegeben seien ein Endomorphismus $\alpha\colon V \longrightarrow V$ des K-Vektorraums V und ein Endomorphismus $\beta\colon W \longrightarrow W$ des K-Vektorraums W. Weiter sei A ein Eigenvektor von α und B ein Eigenvektor von β.

a) Wir betrachten auf $S := V \dot{+} W$ den Endomorphismus γ mit

$$(X, Y) \longmapsto (\alpha(X), \beta(Y)) \quad \text{für} \quad X \in V,\ Y \in W.$$

Ist (A, B) ein Eigenvektor von γ? Wenn ja, welche Dimension hat der Eigenraum, in dem (A, B) liegt, im Vergleich zu den Dimensionen der Eigenräume, in denen A bzw. B liegen? *4 Punkte*

b) Wir betrachten auf $T := V \otimes W$ den Endomorphismus $\alpha \otimes \beta$ mit

$$X \otimes Y \longmapsto \alpha(X) \otimes \beta(Y) \quad \text{für} \quad X \in V,\ Y \in W.$$

Ist $A \otimes B$ ein Eigenvektor von $\alpha \otimes \beta$? Wenn ja, welche Dimension hat der Eigenraum, in dem $A \otimes B$ liegt, im Vergleich zu den Dimensionen der Eigenräume, in denen A bzw. B liegen? *5 Punkte*