Semesterklausur zur Linearen Algebra II (1. 7. 94)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur `eine` Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen `wesentlichen` Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Formulieren Sie vollständige Sätze (keine logischen Pfeile!) und vergessen Sie nicht, jedes „für alle" oder „es gibt ein" wirklich hinzuschreiben. Alle Bezeichnungen, die Sie benutzen und die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte erforderlich. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{V}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ und $\varphi_A\colon \mathbf{V}_{1\times 4}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{V}_{1\times 4}(\mathbb{R})$ die zugehörige lineare Abbildung $\varphi_A = (X \longmapsto XA$ für $X \in \mathbf{V}_{1\times 4}(\mathbb{R}))$. Berechnen Sie eine Fächerbasis von $(\mathbf{V}_{1\times 4}(\mathbb{R}), \varphi_A)$. *5 Punkte*

Aufgabe 2.

Gegeben seien ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basisfolge $\mathcal{B}$ und die lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow V \text{ mit } \mathrm{M}(\mathcal{B}, \varphi, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lautet die rationale Normalform für φ (bei Verwendung der Spaltenvorschrift)? *3 Punkte*

b) Berechnen Sie eine Basisfolge $\mathcal{K}$, d. h. die Wechselmatrix (!) $\mathrm{M}(\mathcal{B}, \mathcal{K})$, bezüglich der die Matrix von φ die rationale Normalform-Matrix ist. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

Rechnen Sie eine Lösung $Y = (x \longmapsto Y(x) = e^{xA} \cdot C$ für $x \in \mathbb{R}) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbf{V}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ des Differentialgleichungssystems $\dfrac{dY(x)}{dx} = AY(x)$ für $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aus. *7 Punkte*

Aufgabe 4.

a) Formulieren Sie eine Definition für den Begriff „Minimalpolynom eines Vektorrraum-Endomorphismus". *3 Punkte*

b) Es sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Hat dann jeder Endomorphismus $\varphi\colon V \longrightarrow V$ ein Minimalpolynom? Begründung! *2 Punkte*

Aufgabe 5.
Auf einem 5-dimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorraum V sei eine lineare Abbildung φ durch die Matrix $\mathrm{M}(\mathcal{B},\varphi,\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ bezüglich einer Basisfolge $\mathcal{B} = (B_1,\ldots,B_5)$ gegeben. W sei der von den Vektoren $X = B_3 + B_4$ und $Y = B_2 + B_5$ erzeugte $\underline{\varphi\text{-Teilraum}}$.

a) Berechnen Sie das Minimalpolynom $m'(t)$ von $\varphi' := \varphi|_W$. *3 Punkte*

b) Welche Dimension hat W? Begründung! *2 Punkte*

Aufgabe 6.
Welche der drei Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ sind über $\mathbb{R}$ zueinander ähnlich? *4 Punkte*

Aufgabe 7.
Ähnliche Matrizen haben bekanntlich dasselbe charakteristische Polynom. Wieviele Ähnlichkeitsklassen (über $\mathbb{R}$) von reellen Matrizen gibt es zum charakteristischen Polynom

$$c(t) = (t^2+t+1)^2\,(t^2+t-1)^3\,?$$

Hinweis: Welche rationalen Normalform-Matrizen kommen in Frage? *3 Punkte*

Aufgabe 8.
Wir betrachten die Polynome $p(t) = t^2 + 2t + 1$ und $q(t) = t^2 + t - 1$ aus $\mathbb{Q}[t]$.

a) Stellen Sie den (normierten) größten gemeinsamen Teiler der Polynome $p(t)$ und $q(t)$ als $\mathbb{Q}[t]$-Linearkombination von p und q dar. *2 Punkte*

b) Berechnen Sie in der Faktoralgebra $\mathbb{Q}[t]/p(t)\mathbb{Q}[t]$ das inverse Element der Restklasse $\overline{q(t)} = q(t) + p(t)\mathbb{Q}[t]$, falls es existiert. *2 Punkte*

c) Geben Sie eine quadratische $\mathbb{Q}$-Matrix A an, deren Algebra-Erzeugnis $\langle A\rangle_{\mathbb{Q}\text{-Alg-m-1}}$ isomorph zu $\mathbb{Q}[t]/p(t)\mathbb{Q}[t]$ ist als K-Algebren-m-1. Geben Sie einen solchen Isomorphismus an.

3 Punkte

d) Wir betrachten $V = \mathbb{Q}[t]/p(t)\mathbb{Q}[t]$ als T-Raum, also als $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit der linearen Abbildung $\varphi = (\,\overline{x(t)} \longmapsto \overline{x(t)\cdot t}$ für $x(t) \in \mathbb{Q}[t]\,)$. Schreiben Sie V als innere direkte Summe primärer zyklischer T-Räume, und geben Sie für jeden Summanden einen Erzeuger und die Stufe an. *2 Punkte*

Aufgabe 9.
Zu welcher bekannten abelschen Gruppe ist $(\mathbb{Z}_3)_{\mathbb{Z}} \otimes {}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_8)$ isomorph? Begründung! *2 Punkte*

Aufgabe 10.
Es sei $V = \mathbf{V}_{2\times 1}(\mathbb{R})$. Läßt sich der Vektor $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \in V \otimes V$ in der Form $A \otimes B$ mit $A, B \in V$ schreiben? *4 Punkte*

Aufgabe 11.
V sei ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Geben Sie (ohne Begründung)

a) einen K-Vektorraum-Isomorphismus $\alpha\colon V \otimes V \longrightarrow \mathbf{V}_{n\times n}(K)$ und *1 Punkt*

b) einen K-Vektorraum-Isomorphismus $\tau\colon V \otimes V \longrightarrow \mathcal{T}^2(V)$ an. *2 Punkte*

Aufgabe 12.
Es sei K ein Körper, und es bezeichne $E = \operatorname{End}^{\cdot}(V)$ die K-Algebra aller Endomorphismen eines n-dimensionalen K-Vektorraums V.

a) Definieren Sie eine K-lineare Abbildung $\varepsilon\colon {}_K(E \otimes E) \longrightarrow {}_KE$ mit $\varepsilon(\varphi \otimes \psi) = \varphi \cdot \psi$ für $\varphi, \psi \in E$. *3 Punkte*

b) Welche Dimension hat Kern ε im Fall $n = 5$? *2 Punkte*

Aufgabe 13.
(V, Γ) sei ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \longrightarrow V$ ein unitärer Endomorphismus. Zeigen Sie unter Benutzung der relevanten Definitionen, daß alle Eigenwerte λ von φ den Betrag 1 haben ($\lambda \cdot \overline{\lambda} = 1$) und daß Eigenvektorräume zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind. *4 Punkte*