

Stark Perfekte Gitter und Sphärische Designs

Vortrag zum Seminar Gitter und Codes, 20.06.2011

Nina Neidhardt und Jan Rosendahl

Ziel dieser Arbeit ist es, die lokalen Extremstellen der Dichtefunktion näher zu beschreiben. Wir suchen ein Kriterium, welches uns hilft extreme Gitter zu finden. Als Vorbereitung dazu untersuchen wir zunächst in Abschnitt 1 einige ausgewählte Polynome, deren Eigenschaften später nützlich sein werden. Anschließend führen wir im 2. Absatz den Begriff des *sphärischen t -Designs* ein und zeigen, dass Gitter, deren Mengen an kürzesten Vektoren sphärischen 4-Designs sind, extrem sind. Wir untersuchen die Eigenschaften von stark perfekten Gittern im Allgemeinen und klassifizieren im Anschluß daran die stark perfekten Wurzelgitter, sowie exemplarisch die stark perfekten Gitter der Dimension 7.

§1 Der Raum der Polynome

(1.1) Definition

$\mathbb{R}[X] := \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ bezeichne den *Polynomring* in n Unbestimmten. Für einen Multiindex $i = (i_1, \dots, i_n)$ definieren wir das Monom $X^i := X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ vom Grad $|i| := \sum_{j=1}^n i_j$ sowie den *Multinomialkoeffizient*

$$\binom{|i|}{i} := \frac{|i|!}{i_1! \dots i_n!}.$$

Weiter bezeichne $\mathcal{F}_{n,m} := \mathcal{F}_m$ den Raum aller Polynome in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vom Grad m . Ist $T_m := \{i = (i_1, \dots, i_n) \mid |i| = m\}$ so bilden die Monome X^i mit $i \in T_m$ eine \mathbb{R} -Basis von $\mathcal{F}_{n,m}$. Für $f := \sum_{i \in T_m} a_i X^i$ und $g := \sum_{i \in T_m} b_i X^i$ in $\mathcal{F}_{n,m}$ definieren wir das Skalarprodukt

$$[f, g] := \sum_{i \in T_m} \binom{|i|}{i}^{-1} a_i b_i.$$

Dies definiert ein euklidisches Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{n,m}$ für die die Monome X^i eine OG-Basis bilden mit $[X^i, X^i] = \binom{|i|}{i}^{-1}$. ◇

(1.2) Beispiel

Sei $\omega := \sum_{j=1}^n X_j^2 \in \mathcal{F}_{n,2}$.

Für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ setzen wir $\rho_\alpha := \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \in \mathcal{F}_{n,1}$.

Dann sind $\omega^{m/2}$ und ρ_α^m in $\mathcal{F}_{n,m}$ ◇

(1.3) Bemerkung

Die orthogonale Gruppe

$$O_n(\mathbb{R}) := \{\sigma \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \sigma \sigma^{tr} = 1\}$$

operiert auf $\mathcal{F}_{n,m}$ vermöge $(\sigma, f) \mapsto \sigma f := f(X\sigma)$.

Dann ist $\sigma \rho_\alpha = \rho_{\alpha\sigma}$ und $\sigma \omega = \omega$ für alle $\sigma \in O_n(\mathbb{R})$. ◇

Beweis

$O_n(\mathbb{R})$ operiert von rechts auf $\mathcal{F}_{n,m}$ da $(I_n)(f) = f(XI_n) = f(X)$

und für alle $\sigma, \delta \in O_n(\mathbb{R})$ gilt: $(\sigma\delta)(f) = f(X(\sigma\delta)) = (\delta)(f(X\sigma)) = (\delta)((\sigma)(f))$.

Sei $\sigma := (\sigma_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Dann ist

$$\begin{aligned} (\sigma \rho_\alpha)(X) &= \rho_\alpha(X\sigma) = \rho_\alpha\left(\sum_{i=1}^n X_i \sigma_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n X_i \sigma_{in}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} X_i = \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \alpha_j\right) = \sum_{i=1}^n X_i (\alpha\sigma)_i = \rho_{\alpha\sigma}(X). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung $\sigma \rho_\alpha = \rho_{\alpha\sigma}$. Wir wenden uns nun $\sigma \omega = \omega$ zu.

Mit

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \sigma_{kj} = (\sigma \sigma^{tr})_{i,k} = \delta_{ik}.$$

ist weiterhin

$$\begin{aligned} (\sigma \omega)(X) &= (\omega)(X\sigma) = (\omega)\left(\sum_{i=1}^n X_i \sigma_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n X_i \sigma_{in}\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \sigma_{ij} X_i\right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{ij} \sigma_{kj} X_i X_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \delta_{ik} X_i X_k = \sum_{i=1}^n X_i^2 = \omega(X) \end{aligned}$$

(1.4) Lemma

Für $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$[f, \rho_\alpha^m] = f(\alpha).$$

Beweis

Es gilt mit dem Multinomialssatz (*)

$$\rho_\alpha^m = (\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n)^m \stackrel{(*)}{=} \sum_{i \in T_m} \binom{m}{i} \alpha_1^{i_1} \dots \alpha_n^{i_n} X^i = \sum_{i \in T_m} \binom{m}{i} \alpha^i X^i$$

Ist $f = \sum_{i \in T_m} b_i X^i \in \mathcal{F}_{n,m}$ ein beliebiges Polynom, so ist nach der Definition des Skalarproduktes (1.1)

$$[f, \rho_\alpha^m] = \sum_{i \in T_m} b_i \alpha^i = f(\alpha). \quad \square$$

(1.5) Folgerung

$$\mathcal{F}_{n,m} = \langle \rho_\alpha^m \mid \alpha \in \mathbb{R}^n \rangle$$

Beweis

Sei $U := \langle \rho_\alpha^m \mid \alpha \in \mathbb{R}^n \rangle$.

Da $\rho_\alpha^m \in \mathcal{F}_{n,m}$, gilt $U \leq \mathcal{F}_{n,m}$, mit $U \perp U^\perp = \mathcal{F}_{n,m}$.

Es genügt zu zeigen, dass $U^\perp = \{0\}$ ist.

Sei also $f \in U^\perp$ (und damit insbesondere $f \in \mathcal{F}_{n,m}$).

Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$, dass $0 \stackrel{f \in U^\perp}{=} [f, \rho_\alpha^m] \stackrel{(1.4)}{=} f(\alpha)$. Also ist $f = 0$.

Da also $U \perp \{0\} = \mathcal{F}_{n,m}$, folgt $U = \mathcal{F}_{n,m}$.

(1.6) Erinnerung

Der Operator

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$$

heißt der *Laplace-Operator*. Dies ist eine Abbildung von $\mathcal{F}_{n,m}$ nach $\mathcal{F}_{n,m-2}$.

$$\text{Harm}_{n,m} := \ker(\Delta) := \{f \in \mathcal{F}_{n,m} \mid \Delta(f) = 0\}$$

heißt der Raum der *harmonischen Polynome* vom Grad m in n Variablen. ◇

(1.7) Beispiel

a) $\Delta(\rho_\alpha^m) = m(m-1)(\alpha, \alpha)\rho_\alpha^{m-2}$

b) $\Delta(\omega^\ell) = 2\ell(2\ell + n - 2)\omega^{\ell-1}$

c) $\Delta(\omega^\ell \rho_\alpha^k) = 2\ell(2\ell + 2k + n - 2)\omega^{\ell-1}\rho_\alpha^k + k(k-1)(\alpha, \alpha)\omega^\ell \rho_\alpha^{k-2}$

d) Für $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ist

$$P_\alpha^{(2)} := \rho_\alpha^2 - \frac{(\alpha, \alpha)}{n}\omega \in \text{Harm}_{n,2}$$
◇

Beweis

a) Mit der Kettenregel erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \rho_\alpha^m = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j X_j \right)^m = m \alpha_i \rho_\alpha^{m-1} \quad (1)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \Delta(\rho_\alpha^m) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} (\rho_\alpha^m) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n m \cdot \alpha_i \cdot \frac{\partial}{\partial X_i} (\rho_\alpha^{m-1}) \\
 &\stackrel{(1)}{=} \sum_{i=1}^n m \cdot (m-1) \cdot \alpha_i^2 \cdot (\rho_\alpha^{m-2}) \\
 &= m \cdot (m-1) \cdot (\rho_\alpha^{m-2}) \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}_{(\alpha, \alpha)} \\
 &= m(m-1)(\alpha, \alpha) \rho_\alpha^{m-2}
 \end{aligned}$$

b) Wir leiten zunächst wieder mit der Kettenregel ab:

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \omega^\ell = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 \right)^\ell = \left(\sum_{j=1}^n X_j^2 \right)^{\ell-1} \cdot \ell \cdot 2 \cdot X_i \quad (2)$$

Jetzt rechnen wir mit der Produktregel (3) leicht nach:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega^\ell) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} \omega^\ell \\
 &\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^n 2 \ell \frac{\partial}{\partial X_i} (X_i \omega^{\ell-1}) \\
 &\stackrel{(2)(3)}{=} \sum_{i=1}^n 2 \ell (\omega^{\ell-1} + X_i^2 \omega^{\ell-2} 2 (\ell-1)) \\
 &= 2 \ell \cdot \left(n \omega^{\ell-1} + 2 (\ell-1) \omega^{\ell-2} \underbrace{\sum_{i=1}^n X_i^2}_\omega \right) \\
 &= 2 \ell \cdot (n + 2\ell - 2) \omega^{\ell-1}
 \end{aligned}$$

c) Elementares Nachrechnen liefert:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega^\ell \rho_\alpha^k) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial X_i^2} (\omega^\ell \cdot \rho_\alpha^k) \\
 &\stackrel{(1),(2),(3)}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\ell \omega^{(\ell-1)}(2X_i) \rho_\alpha^k + k \rho_\alpha^{k-1} \alpha_i \omega^\ell \right) \\
 &\stackrel{(1),(2),(3)}{=} \sum_{i=1}^n \ell(\ell-1) \omega^{(\ell-2)}(2X_i)(2X_i) \rho_\alpha^k + \ell \omega^{(\ell-1)}(2X_i) k \rho_\alpha^{k-1} \alpha_i \\
 &\quad + \ell \omega^{(\ell-1)} 2 \rho_\alpha^k + k(k-1) \rho_\alpha^{k-2} \alpha_i \alpha_i \omega^\ell + k \rho_\alpha^{k-1} \alpha_i \ell \omega^{\ell-1}(2X_i) \\
 &= 4\ell(\ell-1) \omega^{(\ell-2)} \rho_\alpha^k \sum_{i=1}^n X_i^2 + 2\ell k \omega^{(\ell-1)} \rho_\alpha^{k-1} \sum_{i=1}^n (\alpha_i X_i) \\
 &\quad + 2\ell \omega^{(\ell-1)} \rho_\alpha^k \sum_{i=1}^n 1 + k(k-1) \omega^\ell \rho_\alpha^{k-2} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\ell k \omega^{\ell-1} \rho_\alpha^{k-1} \sum_{i=1}^n (\alpha_i X_i) \\
 &= 4\ell(\ell-1) \omega^{(\ell-1)} \rho_\alpha^k + 2\ell k \omega^{(\ell-1)} \rho_\alpha^k + 2n\ell \omega^{(\ell-1)} \rho_\alpha^k \\
 &\quad + k(k-1) (\alpha, \alpha) \omega^\ell \rho_\alpha^{k-2} + 2\ell k \omega^{\ell-1} \rho_\alpha^k \\
 &= 2\ell(2\ell-2+2k+n) \omega^{\ell-1} \rho_\alpha^k + k(k-1) (\alpha, \alpha) \rho_\alpha^{k-2} \omega^\ell
 \end{aligned}$$

d) Wir wenden den Laplace-Operator an und erhalten:

$$\Delta \left(\rho_\alpha^2 - \frac{(\alpha, \alpha)}{n} \omega \right) \stackrel{(a),(b)}{=} 2(2-1)(\alpha, \alpha) \rho_\alpha^0 - \frac{(\alpha, \alpha)}{n} 2(2+n-2) \omega^0 = 0 \quad \square$$

Den Beweis für die orthogonale Zerlegung von $\mathcal{F}_{n,m}$ in irreduzible $O_n(\mathbb{R})$ -invariante Teilmoduln in den Sätzen (1.12) und (1.17), der den Rest dieses Abschnittes ausmacht übernehmen wir aus dem Skript "Gitter und Codes" des Sommersemesters 2007 von Prof. Dr. G. Nebe und Dr. M. Künzer, wobei wir einen Beweis für die Aussage in Satz (1.9) hinzugefügt haben.

(1.8) Bemerkung

Sei $\nabla := (\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n})$. Es gilt dann für $f, g \in \mathcal{F}_{n,m}$ dass

$$m![f, g] = f(\nabla)g.$$

Beweis

Die Abbildung $(a, b) \mapsto a(\nabla)b$ ist bilinear auf $\mathcal{F}_{n,m} \times \mathcal{F}_{n,m}$ also genügt es die Gleichheit für Monome nachzurechnen. Sind $i, j \in T_m$, so ist $X^i(\nabla)X^j = 0$ falls $i \neq j$ und ansonsten ergibt sich $i_1! \cdots i_n!$. □

(1.9) Bemerkung

Der Laplace-Operator ist ein $O_n(\mathbb{R})$ -invarianter Differentialoperator. D.h. es gilt für $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ und $g \in O_n(\mathbb{R})$, dass

$$\Delta(gf) = g(\Delta f).$$

Beweis

Wir zeigen die Aussage für alle ρ_α^m , da diese den Erzeuger von $\mathcal{F}_{n,m}$ darstellen und der Laplace-Operator Δ linear ist.

Sei also $\alpha \in \mathbb{R}^n$ und $g \in O_n(\mathbb{R})$:

$$\Delta(g\rho_\alpha^m) \stackrel{(1.3)}{=} \Delta(\rho_\alpha^m g) \stackrel{(1.7)}{=} m(m-1)\rho_\alpha^{m-2} = g(m(m-1)\rho_\alpha^{m-2}) = g(\Delta(\rho_\alpha^m)) \quad \square$$

(1.10) Bemerkung

Jedes durch ω teilbare harmonische Polynom ist gleich 0.

Beweis

Sei $f \in \text{Harm}_{n,m}$ und $g \in \mathcal{F}_{n,m-2}$ mit $f = \omega g$. Dann ist

$$[f, f] = [g\omega, f] = g(\nabla)\omega(\nabla)f = g(\nabla)\Delta f = 0$$

da f harmonisch ist. Also ist $f = 0$, da das Skalarprodukt positiv definit ist. \square

(1.11) Satz

$\Delta : \mathcal{F}_{n,m} \rightarrow \mathcal{F}_{n,m-2}$ ist surjektiv. \diamond

Beweis

Sei $g \in \mathcal{F}_{n,m-2}$ im orthogonalen Komplement von $\text{Bild}(\Delta)$. Dann ist $\omega g \in \mathcal{F}_{n,m}$ und für $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ gilt

$$m![\omega g, f] = (g\omega)(\nabla)f = g(\nabla)\omega(\nabla)f = g(\nabla)\Delta(f) = (m-2)![g, \Delta f] = 0.$$

Also ist $\omega g \in \mathcal{F}_{n,m}^\perp = \{0\}$ und damit $g = 0$. \square

(1.12) Satz

$$\mathcal{F}_{n,m} = \text{Harm}_{n,m} \perp \omega \text{Harm}_{n,m-2} \perp \omega^2 \text{Harm}_{n,m-4} \perp \dots \perp \omega^{\lfloor m/2 \rfloor} \text{Harm}_{n,m-2\lfloor m/2 \rfloor}$$

ist eine Zerlegung von $\mathcal{F}_{n,m}$ in irreduzible $O_n(\mathbb{R})$ -invariante Teilmoduln. \diamond

Beweis

Da $\Delta : \mathcal{F}_{n,m} \rightarrow \mathcal{F}_{n,m-2}$ surjektiv ist, ist $\mathcal{F}_{n,m} = \text{Harm}_{n,m} \perp \omega \mathcal{F}_{n,m-2}$, da jedes durch ω teilbare Polynom in $\mathcal{F}_{n,m}$ senkrecht auf allen harmonischen Polynomen steht (siehe oben) oder auch wegen $O_n(\mathbb{R})$ -Invarianz des Skalarprodukts $[-, =]$, die Sie in den Übungen zeigen. Die Zerlegung in $O(n)$ -invariante Teilmoduln erhält man nun durch Induktion. Die Irreduzibilität von $\text{Harm}_{n,m}$ beweisen wir im Rest dieses Abschnitts. Daraus ergibt sich, dass die O_n -Teilmoduln $V_j := \omega^j \text{Harm}_{n,m-2j} \leq \mathcal{F}_{n,m}$ für $j = 0, \dots, \lfloor m/2 \rfloor$ paarweise senkrecht aufeinander stehen. Denn ist $f \in V_j$ mit $[f, g] \neq 0$ für ein $g \in V_k$ so ist die Abbildung $\alpha_f : h \mapsto [f, h]$ eine Abbildung $\neq 0$ in $V_k^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_k, \mathbb{R})$ und die Abbildung $\alpha : V_j \rightarrow V_k^*, g \mapsto \alpha_g$ ist ein O_n -Homomorphismus $\neq 0$. Da sowohl V_j als auch V_k^* irreduzible O_n -Moduln sind, ist α also ein Isomorphismus, was aus Dimensionsgründen unmöglich ist. \square

Bemerkung: Die Orthogonalität der Zerlegung läßt sich auch elementar nachrechnen. Sind $f \in \text{Harm}_{m-2k}, g \in \text{Harm}_{m-2l}$ harmonisch so ist

$$[\omega^k f, \omega^l g] = c \delta_{k,l} [f, g]$$

für eine von n, k und m abhängige Konstante c . Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \Delta(\omega^k f) &= \omega \Delta(\omega^{k-1} f) + \Delta(\omega)(\omega^{k-1} f) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega}{\partial X_i} \frac{\partial \omega^{k-1} f}{\partial X_i} \\ &= \omega \Delta(\omega^{k-1} f) + (2n + 2(m-2)) \omega^{k-1} f \\ &= \omega^2 \Delta(\omega^{k-2} f) + (2n + 2(m-2) + 2(m-4)) \omega^{k-1} f \\ &= \omega^k \Delta(f) + (2n + 2(m-2) + 2(m-4) + \dots) \omega^{k-1} f \\ &= \text{const.} \omega^{k-1} f \end{aligned}$$

da $\Delta(f) = 0$. Induktiv ergibt sich damit $\Delta^k(\omega^k f) = c(n, m, k) f$ und daher für $l \geq k$:

$$[\omega^l g, \omega^k f] = g(\nabla) \Delta^{l-k}(\Delta^k(\omega^k f)) = c(n, m, k) [\omega^{l-k} g, f] = \begin{cases} 0 & l \neq k \\ c(n, m, k) [g, f] & l = k \end{cases} .$$

(1.13) Bemerkung

Sei $\mathcal{M} := \{f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$ der Raum aller stetigen reellen Funktionen auf der Sphäre. Da S^{n-1} kompakt ist, ist jedes $f \in \mathcal{M}$ integrierbar und

$$(f, g) := \int_{S^{n-1}} f(x)g(x)dx$$

definiert ein $O_n(\mathbb{R})$ -invariantes Skalarprodukt auf \mathcal{M} . Sei V ein $O_n(\mathbb{R})$ -invarianter Teilraum von \mathcal{M} endlicher Dimension $N = \dim(V)$ und (f_1, \dots, f_N) eine ON-Basis von V . Definieren

$$\alpha_V : S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}, \alpha_V(x_1, x_2) := \sum_{i=1}^N f_i(x_1) f_i(x_2).$$

Dann hängt α_V nicht von der Wahl der ON-Basis ab und $\alpha_V(x_1, x_2)$ hängt nur von dem inneren Produkt (x_1, x_2) ab, d.h. $\alpha_V(x_1, x_2) = \alpha_V(y_1, y_2)$ falls $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

Beweis

Für $\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ und $f, g \in \mathcal{M}$ ist

$$(\sigma f, \sigma g) := \int_{S^{n-1}} (fg)(x\sigma) dx = \det(\sigma) \int_{S^{n-1}\sigma} (fg)(x) dx = (f, g).$$

Sei (g_1, \dots, g_N) eine weitere ON-Basis von V und $g_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} f_j$. Da beides ON-Basen sind, ist die Basiswechselmatrix (α_{ij}) orthogonal, d.h. $\sum_{i=1}^N \alpha_{ji} \alpha_{ki} = \delta_{jk}$. Also gilt

$$\sum_{i=1}^N g_i(x_1) g_i(x_2) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} f_j(x_1) f_k(x_2) = \sum_{i=1}^N f_i(x_1) f_i(x_2).$$

Seien jetzt $x_1, x_2, y_1, y_2 \in S^{n-1}$ mit $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Dann gibt es $\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ so daß $x_1\sigma = y_1$ und $x_2\sigma = y_2$. Also ist

$$\alpha_V(y_1, y_2) = \alpha_V(x_1\sigma, x_2\sigma) = \sum_{i=1}^N f_i(x_1\sigma) f_i(x_2\sigma) = \sum_{i=1}^N (\sigma f_i)(x_1) (\sigma f_i)(x_2).$$

Nun ist mit (f_1, \dots, f_N) auch $(\sigma f_1, \dots, \sigma f_N)$ eine ON-Basis von V und daher $\alpha_V(y_1, y_2) = \alpha_V(x_1, x_2)$. □

(1.14) Definition

Sei $e \in S^{n-1}$ fest gewählt. Eine *zonale sphärische Funktion* ist eine reelle Funktion $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in S^{n-1}$ für die $(x, e) = (y, e)$ gilt. ◇

(1.15) Bemerkung

Jeder endlich dimensionale $O_n(\mathbb{R})$ -invariante Teilraum $0 \neq V \leq \mathcal{M}$ enthält eine zonale Funktion $f \neq 0$.

Beweis

Sei α_V wie eben und definieren $\alpha : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ als $\alpha(x) := \alpha_V(x, e) = \sum_{i=1}^N f_i(e) f_i(x)$. Dann ist $\alpha \in V$ eine zonale Funktion. Diese ist $\neq 0$, denn sonst ist $0 = \alpha(e) = \sum_{i=1}^N f_i(e)^2$ also $f_i(e) = 0$ für alle i . Da (f_1, \dots, f_N) eine Basis von V war gilt dann auch $f(e) = 0$ für alle $f \in V$. Für $x \in S^{n-1}$ gibt es jedoch ein $\sigma \in O_n(\mathbb{R})$ mit $e\sigma = x$. Damit ist auch $f(x) = (\sigma f)(e) = 0$ für beliebiges $f \in V$ und $x \in S^{n-1}$, also $V = 0$. □

(1.16) Folgerung

Ist V ein endlich dimensionaler $O_n(\mathbb{R})$ -invarianter Teilraum von \mathcal{M} , so dass die zonalen Funktionen in V einen eindimensionalen Teilraum bilden, dann ist V irreduzibel, d.h. jeder $O_n(\mathbb{R})$ invariante Teilmodul $W \leq V$ ist entweder 0 oder V .

Beweis

Sei $0 \neq W \neq V$ ein $O_n(\mathbb{R})$ -invarianter Teilmodul von $V = W \perp W^\perp$. Dann ist auch W^\perp O_n -invariant und die beiden zonalen Funktionen $x \mapsto \alpha_W(x, e)$ und $x \mapsto \alpha_{W^\perp}(x, e)$ sind linear unabhängig. \square

(1.17) Satz

$\text{Harm}_{m,n}$ ist ein irreduzibler $O_n(\mathbb{R})$ -Modul. \diamond

Beweis

Seien $f, g \in \text{Harm}_{m,n}$ zonale Funktionen ungleich 0. Da harmonische Polynome nicht durch ω teilbar sind, können wir nach Multiplikation mit einer reellen Zahl annehmen dass

$$\begin{aligned} f(x) &= (x, e)^m + \alpha_1 \omega(x) (x, e)^{m-2} + \dots \\ g(x) &= (x, e)^m + \beta_1 \omega(x) (x, e)^{m-2} + \dots \end{aligned}$$

Die Differenz $f - g$ ist dann ein harmonisches Polynom, das durch ω teilbar ist, also $f - g = 0$ und daher $f = g$. \square

§2 Sphärische Designs

Im Folgenden nehmen wir $n \geq 2$ an.

(2.1) Definition

Sei $t \in \mathbb{N}$. Eine endliche, nicht-leere Teilmenge $\mathcal{X} \subset S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x) = 1\}$ heißt *sphärisches t -Design*, falls für alle $m \leq t$ und $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ gilt

$$\int_{S^{n-1}} f(x) dx = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x).$$

◇

(2.2) Bemerkung

Die symmetrische Bilinearform

$$(f, g) \mapsto \int_{S^{n-1}} f(x)g(x) dx$$

ist ein $O_n(\mathbb{R})$ invariantes Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{n,m}$.

◇

Beweis

Es gilt mit der Transformationsformel:

$$(\sigma f, \sigma g) = \int_{S^{n-1}} f(x\sigma)g(x\sigma) dx = \int_{S^{n-1}} f(x) \underbrace{|\det(\sigma)|}_{=1} g(x) dx = \int_{S^{n-1}} f(x)g(x) dx = (f, g).$$

(2.3) Satz

Für eine endliche, nicht-leere Teilmenge $\mathcal{X} \subset S^{n-1}$ sind äquivalent:

- (a) \mathcal{X} ist ein sphärisches t -design.
- (b) Für alle $m \leq t$ und alle Polynome $f \in \mathcal{F}_{n,m}$ ist

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) = \sum_{x \in \mathcal{X}} (\sigma f)(x) \text{ für alle } \sigma \in O_n(\mathbb{R}).$$

- (c) Für jedes $1 \leq m \leq t$ und jedes harmonische Polynom $f \in \text{Harm}_{n,m}$ ist

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) = 0.$$

◇

- (d) Sei $\{g, u\} = \{t, t-1\}$ und u ungerade, g gerade. Dann gibt es eine Konstante c_g mit

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^g = c_g (\alpha, \alpha)^{g/2} \text{ und } \sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^u = 0 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}^n.$$

Beweis

a) \Rightarrow b)

Es gilt mit a) für alle $m \leq t$ und alle Polynome $f \in \mathcal{F}_{n,m}$:

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} f(x\sigma) = |\mathcal{X}| \cdot \int_{S^{n-1}} f(x\sigma) dx = |\mathcal{X}| \cdot \int_{S^{n-1}} f(x) |det(\sigma)| dx = |\mathcal{X}| \cdot \int_{S^{n-1}} f(x) dx = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

b) \Rightarrow c)

Aus b) folgt, dass die Abbildung

$$\phi : \text{Harm}_{n,m} \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x)$$

$O_n(\mathbb{R})$ -invariant ist.

Also ist ihr Kern $K := \{f \in \text{Harm}_{n,m} \mid \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) = 0\}$ ein $O_n(\mathbb{R})$ -invarianter Teilraum von $\text{Harm}_{n,m}$.

Wegen der Irreduzibilität von $\text{Harm}_{n,m}$ folgt daraus $K = \{0\}$ oder $K = \text{Harm}_{n,m}$.

1. Fall:

Aus $K = \{0\}$ folgt, dass ϕ injektiv ist und somit $\dim(\text{Harm}_{n,m}) \leq \dim(\mathbb{R}) = 1$.

Dann gilt jedoch bereits $m=0$, c) fordert nur für $1 \leq m \leq t$ und ist somit erfüllt.

2. Fall: Aus $K = \text{Harm}_{n,m}$ folgt sofort c)

c) \Rightarrow d)

Induktion über t

(Es gilt $(x, \alpha)^g = \rho_\alpha^g$, $\omega(x) = (x, x) = 1$ für alle $x \in \mathcal{X} \subset S^{n-1}$)

IA: Für t=1 gilt: g=0, u=1, für t=2 gilt: g=2, u=1.

Also ist zu zeigen, dass die Gleichungen für g=0, u=1 und g=2 gelten.

g=0: $\sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^0 = \sum_{x \in \mathcal{X}} 1 = |\mathcal{X}| = c_0 \cdot 1 = c_0(\alpha, \alpha)^{0/2}$

u=1: $\sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^1 = \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^1 \stackrel{c)}{=} 0$, da $\Delta \rho_\alpha = 0$, also $\rho_\alpha \in \text{Harm}_{n,m}$.

g=2: Nach (1.7) d) gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}} \left(\rho_\alpha^2(x) - \frac{(\alpha, \alpha)}{n} \omega(x) \right) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^2(x) &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{\frac{(\alpha, \alpha)}{n} \omega(x)}_{=1} = \frac{(\alpha, \alpha)}{n} |\mathcal{X}| \\ \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^2 &= \frac{|\mathcal{X}|}{n} (\alpha, \alpha) = c_2(\alpha, \alpha)^{2/2} \end{aligned}$$

IV: Aussage d) gelte für alle $j \leq t - 2$

IS: $t - 2 \Rightarrow t$:

Sei $t \geq 2$.

Wir wollen zeigen, dass $d_j \in \mathbb{R}$ existieren mit:

$$\Delta \rho_\alpha^t = \Delta \left(\sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-2} d_j (\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} \rho_\alpha^j \omega^{(t-j)/2} \right)$$

Mit (1.7)(a) gilt: $\Delta\rho_\alpha^t = t(t-1)(\alpha, \alpha)\rho_\alpha^{t-2}$ und mit (1.7)(c) gilt:

$$\begin{aligned} & \Delta \left(\sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-2} d_j(\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} \rho_\alpha^j \omega^{(t-j)/2} \right) \\ &= \sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-2} d_j(\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} \left[(t-j)(t+j+n-2)\omega^{(t-j-2)/2} \rho_\alpha^j + j(j-1)(\alpha, \alpha)\omega^{(t-j)/2} \rho_\alpha^{j-2} \right] \end{aligned}$$

Da wir die Gleichung nur für $x \in \mathcal{X}$ brauchen, ersetzen wir $\omega(x) = 1$.

Sortieren wir die Gleichung nach ρ_α^j (mit Indexverschiebung), folgt weiter:

$$\begin{aligned} &= d_{t-2}(\alpha, \alpha)2(2t+n-4)\rho_\alpha^{t-2} \\ &+ \sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-4} \rho_\alpha^j \omega^{(t-j-2)/2} \left[d_j(\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} (t-j)(t+j+n-2) + (\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} d_{j+2}(j+2)(j+1) \right] \end{aligned}$$

Nun sehen wir, dass der Koeffizient von ρ_α^{t-2} nur von d_{t-2} abhängt. Wähle also $d_{t-2} = \frac{t(t-1)}{2(2t+n-4)}$ und die anderen d_j so, dass die restlichen Summanden verschwinden.

Dann ist die obige Gleichung erfüllt. Also können sich die beiden Polynome nur um ein harmonisches Polynom h unterscheiden und es gilt:

$$\rho_\alpha^t = h + \sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-2} d_j(\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} \rho_\alpha^j \omega^{(t-j)/2}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}} (x, a)^t &= \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^t(x) = \underbrace{\sum_{x \in \mathcal{X}} h(x)}_{\stackrel{c}{=} 0} + \sum_{x \in \mathcal{X}} \sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-1} d_j(\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} \rho_\alpha^j(x) \underbrace{\omega(x)}_{=1} \\ &= \sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-1} d_j(\alpha, \alpha)^{(t-j)/2} \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^j(x) \stackrel{(*)}{=} \begin{cases} 0 & t \text{ ungerade} \\ c_t(\alpha, \alpha)^{t/2} & t \text{ gerade} \end{cases} \\ \star : \left\{ \begin{array}{l} \text{für } t \text{ ungerade gilt: } \quad j < t, j \text{ ungerade} \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^j(x) \stackrel{(IV)}{=} 0 \\ \text{für } t \text{ gerade gilt:} \quad \quad j < t, j \text{ gerade} \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^j(x) \stackrel{(IV)}{=} c_j(\alpha, \alpha)^{j/2} \\ \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^t(x) = \underbrace{\sum_{j=0, j \equiv_2 t}^{t-1} d_j c_j(\alpha, \alpha)^{(t-j+j)/2}}_{c_t} \end{array} \right. \end{aligned}$$

d) \Rightarrow a)

Da nach (1.5) die ρ_α^m den Raum $\mathcal{F}_{n,m}$ erzeugen, genügt es die Gleichung

$$\int_{S^{n-1}} f(x) dx = \frac{1}{|\mathcal{X}|} \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x).$$

für $f = \rho_\alpha^m$ mit $0 \leq m \leq t$ und $\alpha \in \mathbb{R}^n$ beliebig nachzurechnen.

Nach den Voraussetzungen (d) wissen wir bereits, dass

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^m(x) = \begin{cases} 0 & m \text{ ungerade} \\ c_m(\alpha, \alpha)^{m/2} & m \text{ gerade.} \end{cases}$$

für $m = t$ oder $m = t - 1$, wobei laut (2.4) die Konstante c_m eindeutig festgelegt ist. Wendet man auf beide Seiten den Laplace-Operator Δ bezüglich α an, so erhält man:

1. Fall: m ungerade:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^m(x) &= 0 \\ \Rightarrow \Delta \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^m(x) \right) &= \Delta(0) \\ \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} m(m-1) \underbrace{(x, x)}_{=1} \rho_\alpha^{m-2}(x) &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^{m-2}(x) &= 0 \end{aligned}$$

2. Fall: m gerade:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^m(x) &= c_m(\alpha, \alpha)^{m/2} \\ \Rightarrow \Delta \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^{m-2}(x) \right) &= \Delta \left(c_m(\alpha, \alpha)^{m/2} \right) \\ \stackrel{(1.7)}{\Rightarrow} \sum_{x \in \mathcal{X}} m(m-1) \underbrace{(x, x)}_{=1} \rho_\alpha^{m-2}(x) &= c_m \cdot \frac{2m}{2} \left(\frac{2m}{2} + n - 2 \right) (\alpha, \alpha)^{(m-2)/2} \\ \Rightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_\alpha^{m-2}(x) &= \underbrace{c_m \cdot \frac{m+n-2}{m-1}}_{\stackrel{(2.4)}{=} c_{m-2}} (\alpha, \alpha)^{(m-2)/2} \quad \square \end{aligned}$$

Also gelten die Gleichungen aus d) induktiv für alle $m \leq t$.

Jetzt bleibt nur noch zu zeigen, dass:

$$\int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^m dx \stackrel{!}{=} \begin{cases} 0 & m \text{ ungerade} \\ \frac{c_m}{|\mathcal{X}|} (\alpha, \alpha)^{m/2} & m \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beachte: Im folgenden sind die α unsere Variablen, $\rho_\alpha^m(x) = \rho_x^m(\alpha)$.

Dabei ist das Integral auf der linken Seite $O_n(\mathbb{R})$ invariant und aus $F_{n,m}$.

Nach Satz(1.12) gilt, dass

$\mathcal{F}_{n,m} = \text{Harm}_{n,m} \perp \omega \text{Harm}_{n,m-2} \perp \omega^2 \text{Harm}_{n,m-4} \perp \dots \perp \omega^{\lfloor m/2 \rfloor} \text{Harm}_{n,m-2\lfloor m/2 \rfloor}$ eine Zerlegung von $\mathcal{F}_{n,m}$ in irreduzible $O_n(\mathbb{R})$ -invariante Teilmoduln ist.

Schreibe $\int_{S^{n-1}} \rho_x^m(\alpha) dx = \sum_{j=0}^m \omega^j \cdot h_j$, $h_j \in \text{Harm}_{n,m-2j}$.

Da f_m und ω $O_n(\mathbb{R})$ -invariant sind, muss auch h_j $O_n(\mathbb{R})$ -invariant sein.

Also ist $\langle h_j \rangle$ ein $O_n(\mathbb{R})$ -invarianter Teilraum von $\text{Harm}_{n,m-2j}$.

Da $\text{Harm}_{n,m-2j} O_n(\mathbb{R})$ -irreduzibel ist, folgt daraus $\langle h_j \rangle = 0$ oder $\langle h_j \rangle = \text{Harm}_{n,m-2j} = \mathbb{R} = \text{Harm}_{n,0}$, da $\dim(\langle h_j \rangle) = 1$
 $\Leftrightarrow j = \frac{m}{2}$.

1. Fall: m ungerade.

$$\Leftrightarrow \langle h_j \rangle = 0 \Leftrightarrow h_j = 0 \Leftrightarrow \int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^m dx = 0$$

2. Fall: m gerade.

$$\Leftrightarrow h_j = 0 \text{ für alle } j \leq m, h_m \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^m(x) dx = h_m(\alpha, \alpha)^{m/2}$$

Behauptung: $h_m = \frac{c_m}{|\mathcal{X}|}$

Beweis durch Induktion:

$$\text{IA: für } m = 0 \text{ gilt: } h_0 = h_0(\alpha, \alpha)^{0/2} = \int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^0(x) dx = \text{vol}(S^{n-1}) = 1 = d_0 \cdot 1 = \frac{c_0}{|\mathcal{X}|}$$

IS: $m - 2 \mapsto m$:

Wir wenden auf die Gleichung $h_m(\alpha, \alpha)^{m/2} = \int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^m(x) dx$ den Laplace-Operator bezüglich α an. Der Laplace-Operator bezüglich α vertauscht mit der Integration nach x :

$$\Delta (h_m \cdot (\alpha, \alpha)^{m/2}) = \Delta \left(\int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^m(x) dx \right) = \int_{S^{n-1}} \Delta (\rho_x^m(\alpha)) dx$$

$$\stackrel{(1.7)}{\Leftrightarrow} h_m \cdot m(m+n-2) = \int_{S^{n-1}} m(m-1) \underbrace{(x, x)}_{=1} \rho_x^{m-2}(\alpha) dx$$

$$= m(m-1) h_{m-2}(\alpha, \alpha)^{(m-2)/2} \stackrel{(IV)}{=} m(m-1) \frac{c_{m-2}}{|\mathcal{X}|} (\alpha, \alpha)^{(m-2)/2}$$

$$\Leftrightarrow h_m = \frac{m-1}{m+n-2} \frac{c_{m-2}}{|\mathcal{X}|} \stackrel{(2.4)}{=} \frac{c_m}{|\mathcal{X}|}$$

\Rightarrow Behauptung

$$\Rightarrow \int_{S^{n-1}} \rho_\alpha^m dx = \begin{cases} 0 & m \text{ ungerade} \\ \frac{c_m}{|\mathcal{X}|} (\alpha, \alpha)^{m/2} & m \text{ gerade.} \end{cases}$$

(2.4) Bemerkung

Die Konstante c_g in Satz (2.3)(d) ist gegeben durch

$$c_g = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (g-1)}{n(n+2)(n+4) \cdots (n+g-2)} |\mathcal{X}|.$$

Beweis

Wir wenden den Laplace-Operator bezüglich α auf die linke Seite der Gleichung $\sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^g = c_g (\alpha, \alpha)^{g/2}$ aus 2.3 (d) an. Wir erhalten also:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} \sum_{x \in \mathcal{X}} (x, \alpha)^g = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_x(\alpha)^g \stackrel{(1.7)(a)}{=} \sum_{x \in \mathcal{X}} g(g-1) (x, x) \rho_x(\alpha)^{g-2}$$

Das gleiche Vorgehen für die rechte Seite der Gleichung liefert:

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} c_g(\alpha, \alpha)^{g/2} = \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i^2} c_g \omega(\alpha)^{g/2} \stackrel{(1.7)(b)}{=} c_g g(g+n-2)\omega(\alpha)^{g/2-1}$$

$g/2$ -faches Anwenden des Laplace-Operators (wieder bzgl. α) liefert für die besagte Gleichung 2.3 (d) also:

$$\begin{aligned} g! \sum_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{(x, x)^{\frac{g}{2}}}_{=1, \text{ da } x \in \mathcal{X} \subset S^{n-1}} &= c_g \cdot g \cdot (g-2) \cdots 2 \cdot (g+n-2) \cdot (g-2+n-2) \cdots (2+n-2) \\ \Leftrightarrow g! \cdot |\mathcal{X}| &= c_g \cdot g \cdot (g-2) \cdots 2 \cdot (g+n-2) \cdot (g-2+n-2) \cdots (2+n-2) \\ \Leftrightarrow c_g &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (g-1)}{n(n+2)(n+4) \cdots (n+g-2)} |\mathcal{X}| \quad \square \end{aligned}$$

(2.5) Bemerkung

Häufig wird \mathcal{X} symmetrisch sein (z.B. $\mathcal{X} = S(L)$), das heißt mit $x \in \mathcal{X}$ ist auch $-x \in \mathcal{X}$. Dann ist die 2. Gleichung in Satz 2.3 (d) trivialerweise immer erfüllt. \diamond

(2.6) Erinnerung

Ein Gitter L heißt *eutaktisch*, falls seine Grammatrix $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, positiv definit ist und es $\lambda_x > 0$ für alle $x \in S(F)$ gibt, so dass:

$$F^{-1} = \sum_{x \in S(F)} \lambda_x x^t x$$

Dies ist äquivalent zu der Bedingung, es $\gamma_y > 0 \forall y \in S(L)$ gibt mit:

$$I_n = \sum_{y \in S(L)} \gamma_y y^t y \quad \diamond$$

Beweis

Sei t_1, \dots, t_n eine Basis von L und $T := (t_1 \dots t_n)$ Matrix. Dann ist $TT^t = F$ die Grammatrix des Gitters.

Für das Verhältnis der Minima von L und F gilt:

$$\begin{aligned} \min(F) &= \min\{\ell F \ell^t \mid 0 \neq \ell \in \mathbb{Z}^n\} \\ &\stackrel{F=TT^t}{=} \min\{\underbrace{(\ell T)}_{\in L} \underbrace{(T^t \ell^t)}_{=(\ell T)^t} \mid 0 \neq \ell \in \mathbb{Z}^n\} \\ &= \min\{xx^t \mid x \in L\} = \min(L) \end{aligned}$$

und für die Menge der kürzesten Vektoren:

$$\begin{aligned} S(F) \cdot T &= \{\ell \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \neq \ell F \ell^t = \min(F)\} \cdot T \\ &= \{\underbrace{\ell T}_{\in L} \mid \ell \in \mathbb{Z}^n \text{ und } 0 \neq \underbrace{\ell T}_{\in L} \underbrace{T^t \ell^t}_{=(\ell T)^t} = \min(L)\} \\ &= S(L) \end{aligned}$$

Da als F Grammatrix von L eutaktisch ist, gibt es $\lambda_x > 0 \quad \forall x \in S(F)$ derart, dass:

$$\sum_{x \in S(F)} \lambda_x x^t x = F^{-1} = (TT^t)^{-1} = T^{-t} T^{-1}$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit T^t bzw. T von links bzw. rechts erhalten wir

$$\begin{aligned} I_n &= T^t (T^{-t} T^{-1}) T = \sum_{x \in S(F)} \lambda_x (T^t x^t) (x T) \\ &= \sum_{x \in S(F)} \lambda_x (x T)^t (x T) \\ &= \sum_{y \in S(F) \cdot T} \lambda_{y T^{-1}} y^t y \\ &= \sum_{y \in S(L)} \gamma_y y^t y \end{aligned}$$

mit $\gamma_y := \lambda_{y \cdot T^{-1}}$.

□

Anmerkung: Eutaktisch zu sein ist eine Eigenschaft der Ähnlichkeitsklasse von $[F]$. Darum ist Eutaxie in (2.6) wohldefiniert.

(2.7) Definition

Ein Gitter L heißt *stark eutaktisch*, falls L eutaktisch ist und alle Eutaxiekoeffizienten λ_x mit $x \in S(L)$ gleich gewählt werden können. ◇

(2.8) Satz

Ein Gitter L ist stark eutaktisch, genau dann wenn $S(L)$ ein sphärisches 2-Design ist. ◇

Beweis

Nach (2.6) und (2.7) ist L genau dann stark eutaktisch, wenn es ein $\lambda > 0$ gibt, sodass:

$$I_n = \lambda \sum_{x \in S(L)} x^t x. \quad (\star)$$

" \Leftarrow "

Sei $S(L)$ ein sphärisches 2-Design. Nach der 1. Gleichung in (2.3)(d) für $g = 2$ existiert $c_2 \in \mathbb{R}$:

$$c_2(\alpha, \alpha) = \sum_{x \in S(L)} (\alpha, x)^2. \quad (**)$$

Die Wahl von $\alpha := e_i$ $1 \leq i \leq n$ liefert:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c_2} \sum_{x \in S(L)} x^t x \right)_{i,i} &= e_i \left(\frac{1}{c_2} \sum_{x \in S(L)} x^t x \right) e_i^t \\ &= \frac{1}{c_2} \sum_{x \in S(L)} \underbrace{(e_i x^t)}_{(e_i, x)} \underbrace{(x e_i^t)}_{(x, e_i)} \\ &= \sum_{x \in S(L)} (e_i, x)^2 \\ &\stackrel{(**)}{=} (e_i, e_i) = 1. \end{aligned}$$

Wir wissen also über $\frac{1}{c_2} \sum_{x \in S(L)} x^t x =: D =: (d_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ bereits, dass $d_{i,i} = 1$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wir bestimmen nun die verbliebenen Einträge, wobei D als Summe symmetrischer Matrizen symmetrisch ist. Sei $i \neq j$:

$$\begin{aligned} 2 &= (e_i + e_j, e_i + e_j) \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{c_2} \sum_{x \in S(L)} (e_i + e_j, x)^2 \\ &= \frac{1}{c_2} \sum_{x \in S(L)} (e_i + e_j) x^t x (e_i + e_j)^t = (e_i + e_j) \cdot D \cdot (e_i + e_j) \\ &= d_{i,i} + d_{i,j} + d_{j,i} + d_{j,j} \\ &= 2 + d_{i,j} \quad \Rightarrow d_{i,j} = 0 \end{aligned}$$

Also ist $D = I_n$ und damit folgt die Behauptung.

" \Rightarrow "

Multiplikation von (*) mit $\alpha \in \mathbb{R}$ bzw. α^t ergibt:

$$(\alpha, \alpha) = \alpha I_n \alpha^t = \lambda \sum_{x \in S(L)} \underbrace{\alpha x^t}_{(\alpha, x)} \underbrace{x \alpha^t}_{(x, \alpha)} = \lambda \sum_{x \in S(L)} (\alpha, x)^2$$

Somit ist die erste Gleichung in (2.3) (d) für $g = 2$ der Konstanten $c_2 = \frac{1}{\lambda}$ erfüllt. Die zweite Gleichung ist sowohl für $u = 1$ als auch für $u = 3$ nach (2.5) trivial erfüllt. \square

(2.9) Definition

Ein Gitter L heißt *stark perfekt*, falls $S(L)$ ein sphärisches 4-Design ist. ◇

(2.10) Hauptsatz

Stark perfekte Gitter sind perfekt und eutaktisch und daher lokale Maxima der Dichtefunktion. ◇

Beweis

Sei L ein stark perfektes Gitter, wobei wir \mathbb{C} annehmen, dass $\min(L) = 1$ (sonst skalieren wir das Gitter zunächst entsprechend). Da $S(L)$ ein sphärisches 4-Design ist, folgt mit Satz (2.8) sofort, dass L eutaktisch ist.

Es bleibt nun zu zeigen, dass L auch perfekt ist, also dass

$$M := \langle x^t x \mid x \in S(L) \rangle = \text{Sym}_n(\mathbb{R}).$$

Dabei ist die Inklusion " \subseteq " klar. Wir konzentrieren uns also auf die Richtung " \supseteq ". Dazu wählen wir ein $A \in \text{Sym}_n(\mathbb{R})$ aus dem Orthogonalraum von M bezüglich des Skalarprodukts $[A, B] := \text{Spur}(A^t B)$ und setzen $p_A(X_1, \dots, X_n) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij} X_i X_j \in \mathcal{F}_{n,2}$. Für beliebiges $x \in S(L)$ gilt also:

$$0 = \text{Spur}(Ax^t x) = xAx^t = p_A(x)$$

Man sieht leicht ein, dass p_A^2 in $\mathcal{F}_{n,4}$ liegt. Da $S(L)$ nach Voraussetzung ein sphärisches 4-Design ist, gilt:

$$\int_{S^{(n-1)}} p_A^2(x) dx = \frac{1}{|S(L)|} \sum_{x \in S(L)} \underbrace{p_A(x)^2}_{=0} = 0$$

Da p_A^2 nichtnegativ und als Polynom stetig ist, erhalten wir, dass $p_A^2 = 0$ fast überall und, mit der Stetigkeit der Funktion, $p_A = 0 \quad \forall x \in S^{n-1}$. Daraus folgt $0 = A$ für beliebiges $A \in M^\perp \Leftrightarrow M^\perp = \{0\}$ und damit die Behauptung.

□

§3 Gitter vom minimalen Typ

(3.1) Satz

Sei $\mathcal{X} = -\mathcal{X} \subset S^{n-1}$. Dann gilt

$$\sum_{x,y \in \mathcal{X}} (x,y)^{2\ell} \geq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell - 1)}{n(n+2)(n+4) \cdots (n+2\ell - 2)} |\mathcal{X}|^2$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}$ mit Gleichheit, genau dann wenn \mathcal{X} ein sphärisches $(2\ell + 1)$ -design ist. \diamond

Beweis

Wir setzen $c := \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell - 1)}{n(n+2)(n+4) \cdots (n+2\ell - 2)} |\mathcal{X}|$ wie oben und somit wie in (2.4) und untersuchen das Polynom:

$$p := \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_x^{2\ell} \right) - c\omega^\ell$$

Dabei ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} p(y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_x^{2\ell}(y) &= c\omega^\ell(y) \\ \Leftrightarrow \sum_{x \in \mathcal{X}} (x,y)^{2\ell} &= c(y,y)^\ell. \end{aligned}$$

Das ist die erste Gleichung aus (2.3)(d). Die zweite Gleichung ist wegen der Symmetrie von \mathcal{X} mit (2.5) erfüllt. Also ist $p(y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$ äquivalent dazu, dass \mathcal{X} ein sphärisches $(2\ell + 1)$ -Design ist.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall $0 \leq [p, p]$. Dafür benötigen wir die folgende Gleichheit, die wir mit (\star) bezeichnen:

$$\begin{aligned} [\omega^\ell, \omega^\ell] &\stackrel{(1.5)}{=} \frac{1}{(2\ell)!} \Delta^\ell(\omega^\ell) \\ &\stackrel{(1.7)}{=} \frac{1}{(2\ell)!} \Delta^{\ell-1} \left(2\ell(2\ell + n - 2)\omega^{\ell-1} \right) \\ &= \frac{1}{(2\ell)!} \cdot 2\ell(2\ell - 2) \cdots 2 \cdot (n + 2\ell - 2) \cdots (n + 4)(n + 2)n \\ &= \frac{n(n + 2)(n + 4) \cdots (n + 2\ell - 2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\ell - 1)} \\ &= \frac{1}{c} |\mathcal{X}| \end{aligned}$$

Wie angekündigt interessiert uns eigentlich der Fall $[p, p] \geq 0$, wobei gilt, dass $(x, x) = 1$, da $x \in \mathcal{X} \subset S^{n-1}$:

$$\begin{aligned}
 0 \leq [p, p] &\stackrel{\text{Def.}}{=} \left[\left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_x^{2\ell} \right) - c\omega^\ell, \left(\sum_{x \in \mathcal{X}} \rho_x^{2\ell} \right) - c\omega^\ell \right] \\
 &= \sum_{x, y \in \mathcal{X}} [\rho_x^{2\ell}, \rho_y^{2\ell}] - 2c \sum_{x \in \mathcal{X}} [\rho_x^{2\ell}, \omega^\ell] + c^2 [\omega^\ell, \omega^\ell] \\
 &\stackrel{(1.4)}{=} \sum_{x, y \in \mathcal{X}} \underbrace{\rho_x^{2\ell}(y)}_{(x, y)^\ell} - 2c \sum_{x \in \mathcal{X}} \underbrace{\omega^\ell(x)}_{(x, x)^\ell=1} + c^2 \underbrace{[\omega^\ell, \omega^\ell]}_{\frac{1}{c}|\mathcal{X}| \text{ nach } (\star)} \\
 &= \sum_{x, y \in \mathcal{X}} (x, y)^{2\ell} - c|\mathcal{X}| \quad \square
 \end{aligned}$$

(3.2) Bemerkung

Ein Gitter L von Minimum m ist stark perfekt, genau dann wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^4 = \frac{3|S(L)|}{n(n+2)} m^2 (\alpha, \alpha)^2$$

Außerdem gilt für alle stark perfekten Gitter:

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^2 = \frac{|S(L)|}{n} m (\alpha, \alpha).$$

Beweis

Wir skalieren L zunächst so, dass $S(L) \subset S^{n-1}$, also mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{m}}$. Dann ist L stark perfekt genau dann, wenn $\frac{1}{\sqrt{m}}S(L) \subseteq S^{n-1}$ ein sphärisches 4-Design, das ist nach (2.3)(d) äquivalent dazu, dass

$$\sum_{x \in S(L)} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} x, \alpha \right)^4 = c_4(\alpha, \alpha)^2 = \frac{3|S(L)|}{n(n+2)} (\alpha, \alpha)^2,$$

da die zweite Gleichung in (2.3) auf der symmetrischen Menge $\frac{1}{\sqrt{m}}S(L)$ trivial erfüllt ist (siehe (2.5)). Damit und der Linearität des Skalarproduktes folgt die erste Behauptung. Ist $S(L)$ ein sphärisches 4-Design, so ist es insbesondere ein sphärisches 2-Design. Die zweite Gleichung folgt analog. \square

(3.3) Folgerung

Setzt man $\alpha = \zeta_1 \alpha_1 + \zeta_2 \alpha_2$ in die erste Gleichung in (3.2) ein, so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich (bei $\zeta_1 \zeta_2$)

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha_1)^2 (x, \alpha_2)^2 = \frac{m^2 |S(L)|}{n(n+2)} (2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)).$$

(3.4) Satz

Stark perfekte Gitter sind irreduzibel, d.h. orthogonal unzerlegbar. \diamond

Beweis

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an $L = L_1 \perp L_2$. Wir wählen $0 \neq \alpha_1 \in L_1$, sowie $0 \neq \alpha_2 \in L_2$. Da für jedes $x \in S(L)$ nun entweder $\alpha_1 \perp x$ oder $\alpha_2 \perp x$ gilt erhalten wir mit (3.3):

$$0 = \sum_{x \in S(L)} (x, \alpha_1)^2 (x, \alpha_2)^2 = \frac{m^2 |S(L)|}{n(n+2)} (2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)) > 0$$

und somit den gewünschten Widerspruch. \square

(3.5) Satz

Sei L ein stark perfektes Gitter der Dimension n . Dann ist $\min(L) \min(L^\#) \geq \frac{n+2}{3}$. \diamond

Beweis

Sei $m := \min(L)$, $m' := \min(L^\#)$ und $\alpha \in S(L^\#)$. Die beiden Gleichungen aus (3.2) liefern dann:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^4 &= \frac{3|S(L)|}{n(n+2)} m^2 \underbrace{(\alpha, \alpha)^2}_{m'} = \frac{3|S(L)|}{n(n+2)} (mm')^2 \\ \sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^2 &= \frac{|S(L)|}{n} mm' \end{aligned}$$

Die Differenz dieser beiden Gleichung ergibt:

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^2 ((x, \alpha)^2 - 1) = \frac{|S(L)| mm'}{n} \left(\frac{3mm'}{n+2} - 1 \right).$$

Dies ist jedoch ≥ 0 , da auf der linken Seite aus der Definition des dualen Gitters folgt, dass $(x, \alpha) \in \mathbb{Z}$ für alle $x \in S(L)$. Also ist insbesondere $(x, \alpha)^2$ gleich 0, 1 oder ≥ 4 . Es gilt also $\frac{3mm'}{n+2} - 1 \geq 0$ und damit $mm' \geq \frac{n+2}{3}$. \square

(3.6) Definition

Ein stark perfektes Gitter, bei dem Gleichheit gilt in Satz (3.5) heißt *vom minimalem Typ*. \diamond

(3.7) Bemerkung

Ein stark perfektes Gitter L ist vom minimalen Typ, genau dann wenn für alle $\alpha \in S(L^\#)$ und alle $x \in S(L)$ gilt, dass $(x, \alpha) \in \{0, \pm 1\}$.

Beweis

Sei L vom minimalen Typ und $m := \min(L), m' := \min(L^\#)$. Also ist L stark perfekt und $\min(L) \min(L^\#) = mm' = \frac{n+2}{3}$. Im Beweis von (3.5) sehen wir, dass für alle stark perfekten Gitter die folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^2 ((x, \alpha)^2 - 1) = \frac{|S(L)| mm'}{n} \underbrace{\left(\frac{\overbrace{3 mm'}^{\frac{n+2}{3}}}{n+2} - 1 \right)}_{=0} = 0.$$

Da alle Summanden auf der linken Seite nicht-negativ sind muss jeweils $(x, \alpha) = 0$ oder $(x, \alpha)^2 - 1 = 0$ und damit die Behauptung gelten. \square

§4 Stark perfekte Wurzelgitter

(4.1) Erinnerung

Jedes Wurzelgitter ist orthogonale Summe der Wurzelgitter A_n, D_m ($m \geq 4$), E_6, E_7, E_8 .¹◇

(4.2) Bemerkung

Sei L ein volles Gitter, dann gilt

a) $(L^\#)^\# = L$

b) $\text{Aut}(L^\#) = \text{Aut}(L)$ ◇

Beweis

a) Seien die Spalten der Matrix A eine Basis von L , dann sind die Spalten von A^{-t} eine Basis von $L^\#$. Die Spalten von $(A^{-t})^{-t} = A$ sind wiederum Basis von L .

b) Seien $\sigma \in \text{Aut}(L), \ell \in L$ und $x \in L^\#$. Da $L\sigma = L$ existiert ein $\bar{\ell} \in L$, sodass $\bar{\ell}\sigma = \ell$. Das liefert:

$$(x\sigma, \ell) = (x\sigma, \bar{\ell}\sigma) = (x, \bar{\ell}) \in \mathbb{Z}.$$

Also $x\sigma \in L^\#$, weswegen $\text{Aut}(L^\#)\sigma = \text{Aut}(L^\#)$ und somit $\text{Aut}(L) \subseteq \text{Aut}(L^\#)$.

Analog erhält man $\text{Aut}(L^\#) \subseteq \text{Aut}((L^\#)^\#) \stackrel{a)}{=} \text{Aut}(L)$. □

(4.3) Satz

Ist $G = \text{Aut}(L)$ absolut irreduzibel, so ist L stark eutaktisch. ◇

Beweis

$G = \text{Aut}(L) = \{g \in O_n(\mathbb{R}) \mid Lg = L\}$. Da $\ell \in S(L) \Leftrightarrow \ell^G \subseteq S(L)$ ist, ist $S(L)$ eine Vereinigung von G -Bahnen z.B. $S(L) = \bigcup_{\ell \in S(L)} \ell^G$. Folglich ist $S(L)$ unter G abgeschlossen und invariant. Also erfüllt $F := \sum_{x \in S(L)} x^{tr}x$ für alle $\sigma \in G$:

$$\sigma^t F \sigma = \sum_{x \in S(L)} (x\sigma)^t (x\sigma) = \sum_{S(L)\sigma} x^t x = F$$

G ist absolut irreduzibel, d.h. $\{F \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid gFg^t = F \forall g \in O_n(\mathbb{R})\} =: M$ ist eindimensional. Da I_n trivialerweise in M folgt $M = \{\lambda I_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und somit $F = \lambda I_n$ für ein $\lambda > 0$, da F als Summe von positiv semidefiniten Matrizen selber positiv semidefinit ist. Das liefert:

$$\frac{1}{\lambda} F = \frac{1}{\lambda} \sum_{S(L)} x^t x = I_n. \quad \square$$

(4.4) Folgerung

Irreduzible Wurzelgitter sind stark eutaktisch². ◇

¹(2.6) im Vortrag *Wurzelgitter und Spielgelungsgruppen* von Sascha Düerkop vom 11. April 2011

²folgt mit (2.18) Skript *Gitter und Codes* aus dem SS 2007 von Prof. Dr. G. Nebe und Dr. M. Künzer

(4.5) Erinnerung

Sei L ein irreduzibles Wurzelgitter der Dimension n und $s := |R(L)| = |S(L)|$. Dann heißt $h := s/n$ die *Coxeter-Zahl* von L .

Für $r \in R(L)$ bezeichne

$$n_0 := |\{x \in R(L) \mid (x, r) = 0\}| \quad \text{und} \\ n_1 := |\{x \in R(L) \mid (x, r) = 1\}|. \quad \diamond$$

(4.6) Bemerkung

Die Coxeter-Zahlen der irreduziblen Wurzelgitter sind $h(\mathbb{A}_n) = n + 1$, $h(\mathbb{D}_n) = 2(n - 1)$, $h(\mathbb{E}_6) = 12$, $h(\mathbb{E}_7) = 18$ und $h(\mathbb{E}_8) = 30$.

	h	s	n_0	n_1	t – Design
\mathbb{A}_1	2	2	0	0	$t \leq \infty$
\mathbb{A}_2	3	6	0	2	$t \leq 5$
$\mathbb{A}_n (n \geq 3)$	$n + 1$	$n(n + 1)$	$(n - 1)(n - 2)$	$2(n - 1)$	$t \leq 3$
\mathbb{D}_4	6	24	6	8	$t \leq 5$
$\mathbb{D}_n (n \geq 5)$	$2(n - 1)$	$2n(n - 1)$	$2(n^2 - 5n + 7)$	$4(n - 2)$	$t \leq 3$
\mathbb{E}_6	12	72	30	20	$t \leq 5$
\mathbb{E}_7	18	126	60	32	$t \leq 5$
\mathbb{E}_8	30	240	126	56	$t \leq 7$

(4.7) Satz

Mit den Bezeichnungen aus Definition (4.5) gilt:

- (a) n_0 und n_1 sind unabhängig von der Wahl von $r \in R(L)$.
- (b) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\sum_{x \in R(L)} (x, \alpha)^2 = 2h(\alpha, \alpha).$$

- (c) $n_0 + 2n_1 = s - 2$.
- (d) $n_1 = 2h - 4$.
- (e) $n_0 = s - 2 - 2n_1 = hn - 2 - 4h + 8 = h(n - 4) + 6$. ◇

Beweis

- a) Die Weyl-Gruppe operiert transitiv auf $R(L)$, d.h. für alle $r_1, r_2 \in R(L)$ gibt es ein $\sigma \in W(L)$ derart, dass $r_1\sigma = r_2$. Mit der O_n -Invarianz des Skalarproduktes erhalten wir:

$$n_0 = |\{x \in R(L) \mid (x\sigma, r_1\sigma) = 0\}| = |\{x \in \underbrace{R(L)\sigma}_{R(L)} \mid (x, r_2) = 0\}|$$

Analoges vorgehen liefert das Ergebnis für n_1 .

- b) Nach (4.4) ist L stark eutaktisch $\stackrel{(2.8)}{\Leftrightarrow} S(L)$ ist sphärisches 2-Design. Satz (2.3)(d) mit c_2 aus (2.4) liefert (wobei wir $x \in L$ mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ skalieren, also folgt $\frac{1}{\sqrt{2}}S(L) \subseteq S^{n-1}$):

$$\sum_{x \in S(L)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x, \alpha \right)^2 = \frac{1}{n} \underbrace{|S(L)|}_{h} (\alpha, \alpha)$$

Und damit die gewünschte Behauptung.

- c) Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung gilt für alle $x, y \in R(L)$:

$$(x, y)^2 \leq \underbrace{(x, x)}_{=2} \underbrace{(y, y)}_{=2} = 4$$

Also $(x, y) \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Dabei ist $n_1 = n_{-1} := |\{x \in R(L) ; (x, r) = -1\}|$ (ebenfalls wieder für beliebiges $r \in S(L)$ wobei n_{-1} wie n_0 von der Wahl von r unabhängig ist). Außerdem ist $(x, y) = \pm 2 \Leftrightarrow x = \pm y$. Kombinatorisch ergibt sich:

$$n_0 + 2 \cdot n_1 + 2 = |S(L)| = s$$

- d) Einsetzen von $\alpha = r \in R(L)$ in (b) und Zählen der möglichen Skalarprodukte liefert

$$2n_1 + 8 = 0 \cdot n_0 + 1 \cdot n_1 + (-1)^2 \cdot n_1 + 2^2 \cdot 2 = \sum_{x \in R(L)} (x, r)^2 \stackrel{(b)}{=} 2h(r, r) = 4h.$$

- e) Folgt unmittelbar aus (c), (d) und der Definition von h . □

(4.8) Satz

Sei L ein stark perfektes Wurzelgitter. Dann ist L isometrisch zu A_1, A_2, D_4, E_6, E_7 , oder E_8 . ◇

Beweis

Mit Satz (3.4) wissen wir, dass L irreduzibel ist. Die einzigen irreduziblen Wurzelgitter $A_n, D_n (n \geq 4), E_6, E_7, E_8$. Wir müssen also lediglich diese darauf hin überprüfen stark perfekt zu sein. Zu einer Wurzel $\alpha \in R(L)$ definieren wir, wie bereits aus (4.5) bekannt $n_1 := |\{x \in R(L) \mid (x, \alpha) = 1\}|$. Auflisten der möglichen Ergebnisse des Skalarproduktes (x, α) für festes $\alpha \in R(L)$ liefert:

$$\begin{aligned} \sum_{x \in R(L)} (x, \alpha)^2 &= 2n_1 + 8 && \stackrel{(4.7)(e)}{=} 4h \\ 2n_1 + \underbrace{2 \cdot 2^4}_{32} &= \sum_{x \in R(L)} (x, \alpha)^4 && \stackrel{(3.2)}{=} \frac{3^h}{n(n+2)} 2^2 2^2 = 48h / (n + 2) \end{aligned}$$

Die Differenz dieser Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}
 24 = 32 - 8 &= \left(\frac{48h}{n+2} - 2n_1 \right) - (4h - 2n_1) = 4h \cdot \left(\frac{12}{n+2} - 1 \right) \\
 &\Leftrightarrow 6(n+2) = h(10-n) \\
 &\Leftrightarrow \frac{6(n+2)}{10-n} = h > 0 \quad \square
 \end{aligned}$$

Da $h > 0$ muss $n \leq 9$ sein. Da nur die oben aufgelisteten Gitter als stark perfekte Wurzelgitter in Frage kommen wissen wir aus der Tabelle in (4.6), dass die Coxeter-Zahlen ganzzahlig sein muss. Folglich können wir die Dimensionen $n = 3$ und $n = 5$ ausschließen. Übrig bleiben die Dimensionen $n = 1, 2, 4, 6, 7, 8, 9$.

Wir bestimmen für jede dieser Dimensionen die Coxeter-Zahl und vergleichen mit Tabelle (4.6), die alle irreduziblen Wurzelgitter auflistet.

Für $n = 9$ ist $h = \frac{6(9+2)}{10-9} = 66$, also $h(\mathbb{A}_9) = 10 \neq 66 \neq 16 = h(\mathbb{D}_9)$, ein Widerspruch

Für $n = 8$ ist $h = 30$, also $L = \mathbb{E}_8$, da $h(\mathbb{A}_8) = 9 \neq 30 \neq 14 = h(\mathbb{D}_8)$

Für $n = 7$ ist $h = 18$, also $L = \mathbb{E}_7$, da $h(\mathbb{A}_7) = 8 \neq 18 \neq 12 = h(\mathbb{D}_7)$

Für $n = 6$ ist $h = 12$, also $L = \mathbb{E}_6$

Für $n = 4$ ist $h = 6$, also $L = \mathbb{D}_4$

Für $n = 2$ ist $h = 3$, also $L = \mathbb{A}_2$

Für $n = 1$ ist $h = 2$, also $L = \mathbb{A}_1$

(4.9) Folgerung

Stark perfekte Wurzelgitter $\neq \mathbb{E}_8$ sind vom minimalen Typ. ◇

Beweis

Prüfe die Bedingung $\min(L^\#) = \frac{n+2}{3 \cdot 2}$ aus Definition (3.6) für die obigen Wurzelgitter. □

§5 Klassifikation stark perfekter Gitter

(5.1) Bemerkung

Sei $\alpha \in \mathbb{R}^n$, L ein stark perfektes Gitter, $S(L) = X \cup -X$ die Menge seiner kürzesten Vektoren, $L \leq \mathbb{R}^n$ mit $\min(L) = m$ und $s := |X|$ die halbe Kusszahl von L . Definiere folgende Funktionen:

$$G_1(\alpha) = \frac{sm}{n}(\alpha, \alpha)$$

und

$$G_2(\alpha) = \frac{3sm^2}{n(n+2)}(\alpha, \alpha)^2$$

Für zwei $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^n$ betrachte folgende Funktion:

$$G_3(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{sm^2}{n(n+2)}(2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2))$$

Dann gilt für $\alpha \in L^\#$ dass $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$, $G_3(\alpha_1, \alpha_2)$ und $C(\alpha) := \frac{1}{12}(G_2(\alpha) - G_1(\alpha)) = \frac{sm}{12n(n+2)}(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Beweis

Da L ein stark perfektes Gitter ist, gilt nach (3.2)

und mit $(x, \alpha)^2 = (-x, \alpha)^2$, also $\sum_{x \in X \cup -X} (x, \alpha)^2 = 2 \sum_{x \in X} (x, \alpha)^2$:

Mit (★):

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^2 = \frac{|S(L)|}{n} m(\alpha, \alpha) \Leftrightarrow \sum_{x \in X} (x, \alpha)^2 = \frac{sm}{n}(\alpha, \alpha) = G_1(\alpha)$$

Mit (★★):

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^4 = \frac{3|S(L)|m^2}{n(n+2)}(\alpha, \alpha)^2 \Leftrightarrow \sum_{x \in X} (x, \alpha)^4 = \frac{3sm^2}{n(n+2)}(\alpha, \alpha)^2 = G_2(\alpha)$$

Setzt man in diese Gleichung $(\xi_1 \alpha_1 + \xi_2 \alpha_2)$ ein, dann erhält man eine Gleichung mit den Variablen ξ_1, ξ_2 .

Ein Koeffizientenvergleich von $\xi_1^2 \xi_2^2$ ergibt dann:

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha_1)^2 (x, \alpha_2)^2 = \frac{sm^2}{n(n+2)}(2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)) = G_3(\alpha_1, \alpha_2)$$

Für $\alpha \in L^\#, x \in L$ ist $j := (x, \alpha) \in \mathbb{Z}$, $j^2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Also sind $G_1(\alpha)$, $G_2(\alpha)$ und $G_3(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Es gilt:

$j^2(j-1)(j+1) \in 4\mathbb{Z}$, da entweder

$j \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow j^2 \in 4\mathbb{Z}$, oder $(j-1) \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow (j-1)(j+1) \in 4\mathbb{Z}$ und

$j^2(j-1)(j+1) \in 3\mathbb{Z}$, da entweder $j, j-1$ oder $j+1 \in 3\mathbb{Z}$

$\Rightarrow j^4 - j^2 = j^2(j-1)(j+1) \in 12\mathbb{Z}$

Also folgt: $C_\alpha = \sum_{x \in X} \frac{1}{12} ((x, \alpha)^4 - (x, \alpha)^2) = \sum_{x \in X} \frac{1}{12} (j^4 - j^2) \in \mathbb{Z}$

$C_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, da $j^4 \geq j^2$ für alle $j \in \mathbb{Z}$,

(5.2) Folgerung

Die stark perfekten Gitter der Dimension ≤ 8 sind

vertreten durch

$\mathbb{Z}, \mathbb{A}_2, \mathbb{D}_4, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_6^\#, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_7^\#$ und \mathbb{E}_8 .

Beweis

Teste die Bedingungen für alle Gitter dieser Dimensionen durch.

Wir rechnen als Beispiel die Dimension 7 vor. □

§6 Klassifikation stark perfekter Gitter der Dimension 7

(6.1) Satz

Sei L ein stark perfektes Gitter in Dimension 7. Dann ist L von minimalem Typ d.h. $\min(L) \min(L^\#) = 3$. \diamond

Beweis

Sei nun L ein stark perfektes Gitter der Dimension $n = 7$ mit $\min(L) =: m$, $S(L) = X \cup -X$, $|S(L)| = 2s$ und $\min(L^\#) = r$.

Dann ergibt sich mit Satz (3.5):

$$\frac{7+2}{3} = 3 \leq mr$$

und für eine Basis $\{b_1, \dots, b_7\}$ von L , $\{b'_1, \dots, b'_7\}$ von $L^\#$ folgt mit der Hermite Ungleichung³:

$$\begin{aligned} \min(L)^7 \min(L^\#)^7 &\leq \prod_{i=1}^7 (b_i, b_i) \prod_{i=1}^7 (b'_i, b'_i) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 2} \cdot \underbrace{\det(L)^7 \det(L^\#)^7}_{=1} \\ &\Leftrightarrow \min(L) \min(L^\#) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^6 \leq 5,62. \end{aligned}$$

Ist also $\alpha \in S(L^*)$ und $x \in S(L)$, so ist mit Cauchy-Schwarz:

$$(x, \alpha)^2 \leq (x, x)(\alpha, \alpha) = \min(L) \min(L^\#) \leq 5,62, \text{ also } (\alpha, x) \in \{0, \pm 1, \pm 2\}.$$

Sei $\alpha \in S(L^\#)$ fest gewählt, $s := |S(L)|$, $mr := \min(L^\#) \min(L) \in \mathbb{Q}$ und

$$n_i := |\{x \in S(L) \mid (x, \alpha) = i\}| \text{ für } i = 0, 1, 2.$$

Da $(x, \alpha) \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$, gilt also $|S(L)| = n_0 + 2n_1 + 2n_2$.

Da $S(L)$ ein 4-design ist findet man mit (3.2)(*) für alle $\alpha \in S(L^\#)$:

$$\sum_{x \in S(L)} (x, \alpha)^2 = \frac{|S(L)|}{n} m(\alpha, \alpha)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x \in S(L), (x, \alpha) = 0} 0^2 + \sum_{x \in S(L), (x, \alpha) = \pm 1} (\pm 1)^2 + \sum_{x \in S(L), (x, \alpha) = \pm 2} (\pm 2)^2 = \frac{2smr}{7}$$

³(1.3) im Vortrag *Dichte Kugelpackungen* von Andrés Goens und Ansgar Wigger vom 30. Mai 2011

$$\Leftrightarrow 2n_0 \cdot 0 + 2n_1 \cdot 1 + 2n_2 \cdot 4 = \frac{2smr}{7}$$

Analog ergibt sich mit (3.2)(**):

$$2n_0 \cdot 0 + 2n_1 \cdot 1 + 2n_2 \cdot 16 = \frac{2s(mr)^2}{7}$$

Also ergeben sich insgesamt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (\star)_1 : n_0/2 + n_1 + n_2 &= s \\ (\star)_2 : n_1 + 4n_2 &= \frac{smr}{7} \\ (\star)_3 : n_1 + 16n_2 &= \frac{s(mr)^2}{3 \cdot 7}. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist eindeutig nach $n_0 = 2(s - n_1 - n_2)$, n_1 und n_2 auflösbar und es ergibt sich

$$n_2 = \frac{(mr - 3)mrs}{2^2 3^2 7}.$$

Hier kommen wir mit unserem bisherigen Wissensstand nicht weiter und greifen daher auf hier nicht näher Bewiesenes zurück:

Wir benutzen die Hermite Konstante von Kumar und Elkies, $\gamma_7 \leq 1,866$.

Zudem kann man mit Hilfe Linearer Programmierung feststellen, dass $s \leq 70$ sein muss. Es gilt⁴:

$$\frac{\min(L)}{\det(L)^{1/n}} \leq \gamma_7$$

$$\Rightarrow \min(L)\min(L^\#) \leq \gamma_7^2 \sqrt[7]{\det(L)\det(L^\#)} \stackrel{(\star)}{=} \gamma_7^2 = 1,866^2 \leq 3,5$$

(\star): Es gilt⁵: $\det(L)\det(L^\#) = 1$

Weiterhin gilt für alle $x \in S(L)$, $\alpha \in S(L^\#)$ mit Cauchy-Schwarz:

$$(x, \alpha)^2 \leq (x, x)(\alpha, \alpha) = \min(L)\min(L^\#) \leq 3,5$$

$\Rightarrow (x, \alpha) \in \{0, \pm 1\} \stackrel{(3.7)}{\Rightarrow} L$ ist ein Gitter von minimalem Typ.

Mit (3.6) gilt: $\min(L)\min(L^\#) = \frac{7+2}{3} = 3$ □

(6.2) Satz

Sei L ein stark perfektes Gitter in Dimension 7. Dann ist L ähnlich zu \mathbb{E}_7 oder $\mathbb{E}_7^\#$. \diamond

⁴(2.2) im Vortrag *Dichte Kugelpackungen* von Andrés Goens und Ansgar Wigger vom 30. Mai 2011

⁵(1.1) im Vortrag *Wurzelgitter und Spiegelungsgruppen* von Sascha Dürkop vom 11. April 2011

Beweis

Mit (6.1)(**) gilt: $n_1 = \frac{3s}{7}$. Definiere $t = \frac{s}{7}$. Da $s \leq 70$, gilt $t \leq 10$.

Mit (5.1) gilt für alle $\alpha \in L^\#$: $G_1(\alpha) = \frac{sm}{n}(\alpha, \alpha) = z \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\alpha, \alpha) = \frac{zn}{sm} \in \mathbb{Q}$

1.Fall:

t ist gerade.

Wir skalieren L so, dass $m := \min(L) = 3/2$. Dann ist $r := \min(L^\#) = 2$ und für beliebiges $\alpha \in L^\#$ ist

$$C(\alpha) = \sum_{x \in X} \frac{1}{12} ((x, \alpha)^4 - (x, \alpha)^2) \stackrel{(5.1)}{=} \frac{t}{2^4} (\alpha, \alpha) ((\alpha, \alpha) - 2) = z \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Mit der PQ-Formel erhalten wir:

$$(\alpha, \alpha) = 1 \pm \sqrt{\frac{2^4}{t}z + 1}$$

Da t durch kein ungerades Quadrat teilbar und ungleich 16 ist, gibt es teilerfremde $p, q \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2^4}{t} = 2\frac{p}{q}$, und q durch kein ungerades Quadrat teilbar.

$$\Rightarrow (\alpha, \alpha) = 1 \pm \sqrt{\frac{p}{q}2z + 1}$$

Da $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Q}$, gibt es $x \in \mathbb{N}$ mit $q = xz$ und $\sqrt{\frac{p}{q}2z + 1} = \sqrt{2px + 1} \in \mathbb{Q}$

\Rightarrow es existiert $u \in \mathbb{Q}$ mit $u^2 = 2px + 1 \Rightarrow u$ ungerade

$\Rightarrow (\alpha, \alpha) = 1 \pm \sqrt{2px + 1} = 1 + u$ gerade

$\Rightarrow L^\#$ ist ein gerades Gitter.

$$\Rightarrow (*)^6 L^\# \subset (L^\#)^\# \stackrel{(4.2)}{=} L$$

Weiter gilt mit $\frac{\min(L^\#)}{\det(L^\#)^{1/7}} \leq \gamma_7$ und $\min(L)(\det(L^\#))^{1/7} = \frac{\min(L)}{\det(L)^{1/7}} \leq \gamma_7$:

$$1,62 = (\frac{2}{1,866})^7 = (\frac{\min(L)}{\gamma_7})^7 \leq \det(L^\#) \leq (\frac{\gamma_7}{\min(L)})^7 = (\frac{1,866 \cdot 2}{3})^7 = 4,6$$

Da $L^\#$ gerade ist, ist $L^\#$ ganz und $\det(L^\#) \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow \det(L^\#) \in \{2, 3, 4\}$$

Es gilt zudem (*): $\det(L^\#) = |L^\# / L|$.

Sei $x \in S(L)$, $g := |x + L^\#| \in \mathbb{N} \Rightarrow g | \det(L^\#)$

$$\Rightarrow gx \in L^\# \Rightarrow \|gx\|^2 = g^2 \|x\|^2 \stackrel{x \in S(L)}{=} g^2 \cdot \frac{3}{2} = 2z, z \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow g^2 = \frac{4}{3}z \Rightarrow g = 2\sqrt{\frac{z}{3}} \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2 \mid g \Rightarrow 2 \mid \det(L^\#)$$

$$\Rightarrow \det(L^\#) \in \{2, 4\}$$

Durch systematisches Auflisten aller solcher Gitter findet man, dass $L^\# \cong \mathbb{E}_7$ also $L \cong \mathbb{E}_7^\#$ ist.

⁶(1.1) im Vortrag *Wurzelgitter und Spiegelungsgruppen* von Sascha Dürkop vom 11. April 2011

2.Fall:

t ist ungerade.

Wir skalieren L so, dass $\min(L) = 1$, also $\min(L^\#) = 3$.

Mit (5.1) gilt für alle $\alpha \in L^\#$:

$$C(\alpha) = \frac{sm}{12n(n+2)}(\alpha, \alpha)(3(\alpha, \alpha) - (n+2)) = \frac{sm}{12 \cdot 7 \cdot 9}(\alpha, \alpha)(3(\alpha, \alpha) - 9)$$

$$\stackrel{\frac{s}{7}=t}{=} \frac{t}{2^2 \cdot 3^2}(\alpha, \alpha)((\alpha, \alpha) - 3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Annahme: $(\alpha, \alpha) \in 3\mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in L^\#$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}L^\#$ ist ein ganzes Gitter mit Minimum 1

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}L^\# \subset (\frac{1}{\sqrt{3}}L^\#)^\# = \sqrt{3}L$, denn für $l \in L^\#$ ist $\sqrt{3}l \in (\frac{1}{\sqrt{3}}L^\#)$

$\Rightarrow \min(\sqrt{3}L) = 3 \cdot \min(L) = 3 \cdot 1 = 3$.

Da $\frac{1}{\sqrt{3}}L^\# \subset \sqrt{3}L$, folgt $3 = \min(\sqrt{3}L) \leq \min \frac{1}{\sqrt{3}}L^\# = 1$

\Rightarrow Widerspruch

Da t ungerade, muss gelten: $((\alpha, \alpha) - 3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} = 4\mathbb{Z}, z \in \mathbb{Z}$

Mit der PQ-Formel erhalten wir wiederum:

$$(\alpha, \alpha) = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{16z+9} \in \mathbb{Q}$$

Wegen $3 \leq (\alpha, \alpha)$ folgt $(\alpha, \alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{16z+9}$

Wiederum folgt $\sqrt{16z+9}$ ungerade, also $(\alpha, \alpha) \in \mathbb{Z}$

Für alle $\alpha, \beta \in L^\#$ gilt dann mit (5.1):

$$\begin{aligned} G_3(\alpha, \beta) &= \frac{sm^2}{n(n+2)}(2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)) \\ &= \underbrace{\frac{s \cdot 1^2}{7 \cdot 9}}_{\frac{s}{7 \cdot 9} = \frac{t}{9} = 1} (2(\alpha_1, \alpha_2)^2 + (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow 2(\alpha, \beta)^2 = z \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (\alpha, \beta) = \sqrt{\frac{z}{2}} \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow L^\#$ ist ein ganzes Gitter.

\Rightarrow Es existiert ein $\alpha \in L^\#$ mit $(\alpha, \alpha) \notin 3\mathbb{Z}$

Da $C_\alpha \in \mathbb{Z}$ für alle $\alpha \in L^\#$, muss $t = 9$ gelten.

Sei Γ das gerade Teilgitter von $L^\#$.

Dann gilt für alle $\alpha \in \Gamma$: $(\alpha, \alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{16z+9} = 2x, x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \sqrt{16z+9} = 1 + 4y, y \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = \frac{-9+1+8y+16y^2}{16} = \frac{y-1}{2} + y^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y$ ungerade, also $y = 1 + 2v, v \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow 1 + 4y = 5 + 8v$

$$\Rightarrow (\alpha, \alpha) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(5 + 8v) = 4 + 4v,$$

also ist (α, α) sogar durch 4 teilbar für alle $\alpha \in \Gamma$ und $\Gamma' = \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma$ ist ein gerades Gitter.

Dann gilt:

$$\det(\Gamma) = \det(\sqrt{2}\Gamma') = \det(\text{Gram}(\sqrt{2}\Gamma')) = \det(2\text{Gram}(\Gamma')) = 2^7 \det(\Gamma').$$

Da Γ' ein ganzes Gitter ist, also $\det(\Gamma') \in \mathbb{Z}$, ist $\det(\Gamma)$ durch 2^7 teilbar.

Wiederum mit der Hermiten Konstante gilt:

$$25 \leq \left(\frac{3}{1,866}\right)^7 = \left(\frac{\min(L^\#)}{\gamma_7}\right)^7 = \det(L^\#) \leq \min(L)\gamma_7^7 = 1 \cdot 1,866^7 \leq 80$$

Da Γ das gerade Teilgitter von $L^\#$ ist, gibt es eine Basiswechselmatrix T mit $L^\#T = \Gamma$

$$\Rightarrow \det(\Gamma) = \det(L^\#T) = \det(\text{Gram}(L^\#T)) = \det(T^t \text{Gram}(L^\#) T) = \det(L^\#) \det(T)^2$$

Da für alle $x \in L^\#$ $(2x, 2x) = 4(x, x) \in 4\mathbb{Z}$ und damit $2x \in \Gamma$,

gilt $\det(T) = |L^\#/\Gamma| = 2$, also $\det(\Gamma) = 4\det(L^\#)$

$$\Rightarrow 100 \leq \det(\Gamma) \leq 320$$

$$\Rightarrow \det(\Gamma) \in \{128, 256\}$$

$$\Rightarrow \det(\Gamma') \in \{1, 2\}$$

Mit Γ gerade erhält man wiederum durch systematisches Auflisten

$$\Gamma' \cong \mathbb{E}_7, \text{ also } \Gamma \cong \sqrt{2}\mathbb{E}_7.$$

Da $\Gamma \subset L^\#$, folgt für alle $\alpha \in L, x \in \Gamma : (\alpha, x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow L \subset \Gamma^\# \cong (\sqrt{2}\mathbb{E}_7)^\# = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}_7^\#$.

Das Gitter L ist also ein Teilgitter vom Index ≤ 2 in $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}_7^\#$ mit Minimum 1.

Nun gibt es $2^7 - 1 = 127$ solcher Teilgitter (für jeden Basisvektor b ist entweder b oder $2b$ in der Basis von L). Die kann man aber leicht mit dem Rechner durchsuchen.

Man findet $L \cong \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbb{E}_7$ in diesem Fall.