Blatt 1

Sei $\big(V, (-,=)\big)$ ein euklidscher Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1 (8 = 3+3+2 Punkte).
Sei L ein Gitter in V mit Grammatrix G bezüglich einer geeigneten Basis. Bestimme

- $\min(L) := \min\{(x,x) \ : \ x \in L \setminus \{0\}\}$
- $S(L) := \{x \in L \ : \ (x,x) = \min(L)\}$
- Erzeuger von $\mathrm{Aut}(L)$
- $|\,\mathrm{Aut}(L)|$

für folgende Grammatrizen G:

(a) $G = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) $G = I_3$ die 3×3 - Einheitsmatrix.

(c) $G = I_n$ die $n \times n$ - Einheitsmatrix für beliebiges n.

(Hinweis: Jeder Automorphismus von L permutiert $S(L)$.)

Aufgabe 2 (3 Punkte).
Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V. Sei $B' = (b'_1, \dots, b'_n)$ die durch Gram-Schmidt-Orthogonalisierung aus B hervorgehende Orthogonalbasis. Zeige, daß $(b_i, b_i) \geq (b'_i, b'_i)$ stets.

Aufgabe 3 (3 Punkte).
Sei L ein Gitter in V mit Grammatrix $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich einer geeigneten Basis. Bestimme die Diskriminantengruppe $L^{\#}/L$ (als direktes Produkt zyklischer Gruppen, wie im Hauptsatz über abelsche Gruppen).

Aufgabe 4 (3 Punkte).
Sei L ein volles Gitter in V mit Gitterbasis B. Zeige, daß das Parallelepiped $\mathcal{P}(B)$ (auch Parallelotop genannt) einen Fundamentalbereich für die Operation von L auf V darstellt.