G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 24.10.2008.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 2

Sei $E = \big(V, (-,=)\big)$ ein euklidscher Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$.

Aufgabe 1 (10=5+5 Punkte).
Bestimme $L^{\#}$, $L^{\#}/L$ und $R(L)$ für die folgenden Wurzelgitter L.

(a) $L = \mathbb{A}_{n-1} := \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ für alle $n \geq 2$.

(b) $L = \mathbb{D}_n := \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, \ldots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ für alle $n \geq 4$.

Aufgabe 2 (11 = 3+2+3+3 Punkte).

(a) Sei L ein Wurzelgitter in E. Weiter seien $v, w \in R(L)$. Zeige

(i) σ_v ist eine Involution, d.h. σ_v hat Ordnung 2.

(ii) Ist $(v, w) = 0$ so gilt $\sigma_v \sigma_w = \sigma_w \sigma_v$ und $\sigma_v \sigma_w$ hat Ordnung 2.

(iii) Ist $(v, w) = -1$ so hat $\sigma_v \sigma_w$ Ordnung 3.

(b) Sei L ein Wurzelgitter in E. Zeige, daß die Weyl-Gruppe $W(L)$ trivial auf $L^{\#}/L$ operiert durch $L^{\#}/L \times W(L) \to L^{\#}/L,\ (x + L, g) \mapsto xg + L$.

(c) Bestimme $W(\mathbb{A}_2)$ und zeige $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_2) = \langle W(\mathbb{A}_2), \sigma_x \rangle$ wobei (mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 1) $x := (e_1 - e_2) + 2(e_2 - e_3)$.

(d) Es sei $n \geq 4$ gerade. Weiter seien $L_1 := \langle \mathbb{D}_n,\ v \rangle$ und $L_2 := \langle \mathbb{D}_n,\ v - e_1 \rangle$ mit $v := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i$.

(i) Zeige daß L_1 und L_2 zwei verschiedene Teilgitter von $\mathbb{D}_n^{\#}$ sind.

(ii) Zeige daß σ_{e_1} ein Automorphismus von $\mathbb{D}_n$ ist welcher L_1 und L_2 vertauscht.

(iii) Folgere $W(\mathbb{D}_n) \neq \mathrm{Aut}(\mathbb{D}_n)$.