G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 2.12.2008.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 7

Aufgabe 1 (6=3+3 Punkte).

(a) Berechne die Thetareihe von $\mathbb{D}_4$ bis zum Term q^8. Wieviele Elemente von Quadratlänge 8 enthält $\mathbb{D}_4$ demnach?

(b) Berechne die Thetareihe von $\mathbb{E}_7$ bis zum Term q^8. Wieviele Elemente von Quadratlänge 8 enthält $\mathbb{E}_7$ demnach?

(Hinweis: Benutze Gewichtszähler isometrischer Codegitter.)

Aufgabe 2 (3 Punkte)
Sei $N \geq 1$ und p eine Primzahl. Sei $(b_1, \ldots, b_N)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^N$ mit $(b_i, b_i) = \frac{1}{p}$ stets. Weiter sei $M = \langle b_1, \ldots, b_N \rangle_{\mathbb{Z}}$ und $a_1, \ldots, a_N \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Zeige, daß

$$\Theta_{\sum_{i=1}^N a_i b_i + pM}(q) = \prod_{i=1}^N \theta_{a_i,p}(q) \ .$$

Aufgabe 3 (9=3+3+3 Punkte)
Seien ℓ und p zwei Primzahlen mit der Eigenschaft, daß ℓ ein Quadrat modulo p ist. Weiter sei $Q := \{a \in \{1, \ldots, p-1\} \mid a \text{ ist ein Quadrat modulo } p\}$.

(a) Sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel in einem Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_\ell$. Weiter sei $p_Q(X) := \prod_{q \in Q}(X - \zeta^q)$. Zeige $p_Q \in \mathbb{F}_\ell[X]$.

(b) Sei nun $QR(\mathbb{F}_\ell, p)$ der zyklische Code der Länge p über $\mathbb{F}_\ell$ mit Erzeugerpolynom p_Q und bezeichne d sein Minimum. Zeige $d^2 \geq p$.

(c) Zeige: Ist $p \equiv -1 \mod 4$, so gilt sogar $d^2 - d + 1 \geq p$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Sei $n \geq 1$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ x \mapsto \exp\left(-\frac{\pi}{t} x x^{\mathrm{tr}}\right)$. Zeige, daß sich ihre Fouriertransformierte $\hat{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ergibt zu

$$\hat{f}(y) = t^{n/2} \exp\left(-\pi t y y^{\mathrm{tr}}\right) \ .$$

Hinweis: Der Satz von Fubini zeigt, daß man $n = 1$ annehmen darf. Nach geeigneter Substitution wird $t = 1$. Dann kann man z.B. zeigen daß die Ableitung von $\frac{\hat{f}(y)}{e^{-\pi y^2}}$ Null ist. Also ist $\hat{f}(y) = \hat{f}(0) \cdot \exp(-\pi y^2)$.