G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 16.12.2008.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 9

Aufgabe 1 (6=2+2+2 Punkte).

Sei v eine vollständige diskrete Bewertung mit Bewertungsring R und $f(X) \in R[X]$. Weiter sei $a_0 \in R$ mit $d := v(f(a_0)) - 2v(f'(a_0)) > 0$ gegeben. Setze $a_n := a_{n-1} - f(a_{n-1})/f'(a_{n-1})$ für $n \geq 1$ und schreibe $a := \lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) Zeige, daß $v(f(a_n)) \geq (2^n - 1)d + v(f(a_0))$ für alle $n \geq 0$.

(b) Zeige, daß $v(a_n - a) = v(f(a_n)) - v(f'(a_0))$ für alle $n \geq 0$.

(c) Zeige, daß $v(a_n - a) \geq 2^n d + v(f'(a_0))$ für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 2 (11 = 2+2+2+2+3 Punkte).

Für jedes der folgenden Polynome $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ bestimme jeweils die Anzahl der verschiedenen Nullstellen in $\mathbb{Z}_p$ sowie eine Näherung 6-ter Ordnung jeder Nullstelle, d.h. die ersten 6 Ziffern der Standarddarstellung (vgl. dazu Aufgabe 1).

(a) $f(X) = X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

(b) $f(X) = X^3 - 2 \in \mathbb{Z}_5[X]$.

(c) $f(X) = X^2 - 3X - 9 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

(d) $f(X) = X^3 + 1 \in \mathbb{Z}_7[X]$.

(e) $f(X) = X^3 + X^2 - X + 17 \in \mathbb{Z}_3[X]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte).

Sei p eine Primzahl. Bestimme den Isomorphietyp von $\mathbb{Z}_p^*/(\mathbb{Z}_p^*)^2$ und $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$ sowie Erzeuger dieser Gruppen im Fall $p = 2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte).

Sei A ein kommutativer Ring, E ein endlich erzeugter freier A-Modul und b eine symmetrische Bilinearform auf E. Weiter sei $G = (b(e_i, e_j))_{i,j}$ die Grammatrix von b bezüglich einer A-Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von E.

Zeige, daß E genau dann regulär ist, wenn $\det(G) \in A^*$ gilt.

Folgere, daß ein volles ganzes Gitter L in einem Euklidischen Raum $(V, (-,=))$ genau dann regulär ist wenn $L = L^\#$ gilt.