G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 06.01.2009.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 10

Aufgabe 1 (6=1+1+1+3 Punkte).
Sei A ein kommutativer Ring und (E, q) ein quadratischer A-Modul. Weiter sei $x \in E$ mit $q(x) \in A^*$. Es bezeichne $\sigma_x \colon E \to E$ die Spiegelung entlang x. Zeige:

(a) $\sigma_x \in O(E, q)$ und $\sigma_x(x) = -x$

(b) $\sigma_x(y) = y$ für alle $y \in E$ mit $b_q(x, y) = 0$.

(c) $\sigma_x^2 = \mathrm{id}_E$

(d) Es ist $S(E) := \langle \sigma_x \mid x \in E \text{ und } q(x) \in A^* \rangle$ ein Normalteiler in $O(E, q)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).
Sei ℓ eine Primzahlpotenz und (E, q) ein zweidimensionaler regulärer quadratischer $\mathbb{F}_\ell$-Vektorraum. Zeige, daß (E, q) entweder zur hyperbolischen Ebene $\mathbb{H}(\mathbb{F}_\ell)$ oder aber zu $(\mathbb{F}_{\ell^2}, N)$ mit $N \colon \mathbb{F}_{\ell^2} \to \mathbb{F}_\ell,\ x \mapsto x^{\ell+1}$ isometrisch ist; je nachdem ob der Wittindex 1 oder 0 ist.

Aufgabe 3 (8=3+5 Punkte).
Sei $\mathbb{F}_\ell$ ein endlicher Körper.

(a) Bestimme $O(\mathbb{H}(\mathbb{F}_\ell))$.

(b) Bestimme $O((\mathbb{F}_{\ell^2}, N))$.
Hinweis: Sei $F \colon \mathbb{F}_{\ell^2} \to \mathbb{F}_{\ell^2}, x \mapsto x^\ell$. Dann ist $(1, F)$ nach Dedekinds Lemma linear unabhängig über $\mathbb{F}_{\ell^2}$.

Aufgabe 4 (3=1+2 Punkte).
Sei A ein Körper und (E, q) ein regulärer quadratischer A-Modul mit $E \neq \{0\}$. Zeige:

(a) Ist (E, q) nicht anisotrop, so ist $q \colon E \to A$ surjektiv.

(b) Es ist $a \in A^*$ genau dann im Bild von q falls $(E, q) \perp [-a]$ nicht anisotrop ist.