G. Nebe, M. Kirschmer Abgabe am 27.01.2009.

Gitter und Codes, WS 08/09

Blatt 13

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sei N eine Untergruppe einer endlichen abelschen Gruppe A. Zeige, daß sich jeder Homomorphismus $N \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ zu einem Homomorphismus $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ fortsetzen läßt.

Aufgabe 2 (9=3+3+3 Punkte).
Für $k = 1, 3$ und $\ell = 1, 3, 5, 7$ seien

$$\begin{aligned} \phi_k &:= (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, q) \text{ mit } q(1 + 2\mathbb{Z}) = \frac{k}{4} + \mathbb{Z} \\ \psi_\ell &:= (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, q) \text{ mit } q(1 + 4\mathbb{Z}) = \frac{\ell}{8} + \mathbb{Z} \\ \chi &:= (\mathbb{F}_4, \frac{1}{2}N) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, q) \text{ mit } q(x) = \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \text{ für alle } x \neq 0. \end{aligned}$$

Zeige, daß in $WQ(2)$ gilt:

(a) $m[\psi_1] = [\psi_{m \bmod 8}]$ für alle ungeraden $m \in \mathbb{Z}$.

(b) $4[\psi_1] = [\chi]$

(c) $[\phi_1] + [\phi_3] = 0$

Aufgabe 3 (7=3+4 Punkte).
Für ein gerades Gitter L in einem Euklidischen Vektorraum (V, b) versehen wir die Diskriminantengruppe $L^\#/L$ mit der quadratischen Form

$$q\colon L^\#/L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z},\ q(\ell + L) := \frac{1}{2}b(\ell, \ell) + \mathbb{Z}\,.$$

Bestimme die Gauss-Summe $\Gamma((L^\#/L, q))$ für die folgenden Gitter L.

(a) $L = \mathbb{E}_k$ für $k = 6, 7, 8$.

(b) $L = \mathbb{D}_n$ mit $n \geq 4$.

Aufgabe 4 (5 Punkte).
Sei p eine ungerade Primzahl. Bestimme die Isometrieklassen aller 4-dimensionaler regulärer quadratischer $\mathbb{Q}_p$-Vektorräume.