G. Nebe, M. Kirschmer

Lösung 2

Aufgabe 1.

(a) Für $1 \le i \le n-1$ sei $b_i = e_i - e_{i+1}$. Dann ist $B_{n-1} := (b_1, \dots, b_{n-1})$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathbb{A}_{n-1}$. Bezüglich dieser ist

$$\mathcal{G}(B_{n-1}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n-1 \times n-1} .$$

Sicher ist $\det(\mathcal{G}(B_1)) = 2$ und $\det(\mathcal{G}(B_2)) = 3$. Mittels Entwicklung nach der ersten Zeile und Induktion folgt für $n \ge 4$

$$\det(\mathcal{G}(B_{n-1})) = 2\det(\mathcal{G}(B_{n-2})) + \det \begin{pmatrix} -1 & * \\ 0 & \mathcal{G}(B_{n-3}) \end{pmatrix} = 2(n-1) - (n-2) = n .$$

Also ist $|\mathbb{A}_{n-1}^{\#}/\mathbb{A}_{n-1}| = n$ für alle $n \ge 2$.

Sei nun $u_{n-1} := \frac{1}{n}((n-1)e_1 - \sum_{i=2}^{n} e_i)$. Dann ist $(u_{n-1}, b_i) = 0$ für alle $2 \le i < n$ und $(u_{n-1}, b_1) = \frac{1}{n}((n-1)+1) = 1$ also ist $u_{n-1} \in \mathbb{A}_{n-1}^{\#}$. Weiter ist

$$\min\{k \ge 1 \mid ku_{n-1} \in \mathbb{A}_{n-1}\} \ge n,$$

denn $\mathbb{A}_{n-1}$ ist ein Teilgitter von $\langle e_1, \dots, e_n\rangle_{\mathbb{Z}}$. Wegen $|\mathbb{A}_{n-1}^{\#}/\mathbb{A}_{n-1}| = n$ ist damit $\mathbb{A}_{n-1}^{\#}/\mathbb{A}_{n-1} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ erzeugt von $u_{n-1} + \mathbb{A}_{n-1}$ und es ist $\mathbb{A}_{n-1}^{\#} = \langle \mathbb{A}_{n-1}, u_{n-1}\rangle_{\mathbb{Z}}$ für alle $n \ge 2$.

(b) Es sei $n \ge 4$. Wir zeigen zunächst

$$(*) \qquad D_n = \{\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \text{ und } \sum_i a_i \in 2\mathbb{Z}\} .$$

Die Inklusion $\subseteq$ ist klar. Sei umgekehrt $x := \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$ und $\sum_i a_i \in 2\mathbb{Z}$. Setze $s_i = \sum_{j=1}^{i} a_i$. Es ist $2e_n = (e_{n-1} + e_n) - (e_{n-1} - e_n) \in \mathbb{D}_n$. Also

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_n \ni s_n e_n + \sum_{i=1}^{n-1} s_i(e_i - e_{i+1}) &= s_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} s_i e_i - \sum_{j=1}^{n-2} s_j e_{j+1} + (s_n - s_{n-1})e_n \\ &= a_1 e_1 + a_n e_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i e_i = x \end{aligned}$$

Damit folgt die Inklusion $\supseteq$.

Die Zeilen der Matrix T_n sind eine Basis von $\mathbb{D}_n$ bezüglich der Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$, wobei

$$T_n := \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -1 \\ 0 & & & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit wird $\det(\mathbb{D}_n) = \det(T_n)^2 = 2^2$ und somit ist $\mathbb{D}_n^{\#}/\mathbb{D}_n$ entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Man prüft nun nach, daß $v_n := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i$ und e_1 beide in $\mathbb{D}_n^{\#}$ liegen. Nach $(*)$ gilt stets $2e_1 \in \mathbb{D}_n$ und es ist $2v_n \in \mathbb{D}_n$ genau dann wenn n gerade ist.

Für ungerades n ist somit $\mathbb{D}_n^{\#}/\mathbb{D}_n \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ erzeugt von $v_n + \mathbb{D}_n$ und $\mathbb{D}_n^{\#} = \langle \mathbb{D}_n, v_n\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Für gerades n behaupten wir, daß $e_1 \notin \langle \mathbb{D}_n, v\rangle$ gilt. Angenommen, es wäre $e_1 = w + kv$ für geeignetes $w \in \mathbb{D}_n$ und $k \in \mathbb{Z}$. Da $v + \mathbb{D}_n$ Ordnung 2 in $\mathbb{D}_n^{\#}/\mathbb{D}_n$ hat können wir $k = 1$ annehmen und erhalten $v - e_1 \in \mathbb{D}_n$ was aber $(*)$ widerspricht. Also ist $\mathbb{D}_n^{\#}/\mathbb{D}_n \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ erzeugt von $e_1 + \mathbb{D}_n$ und $v + \mathbb{D}_n$. Weiter gilt $\mathbb{D}_n^{\#} = \langle \mathbb{D}_n, e_1, v\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Sei nun $L = \mathbb{A}_{n-1}$ oder $\mathbb{D}_n$. Da L ein Teilgitter von $\langle e_1, \ldots, e_n\rangle_\mathbb{Z}$ ist, hat jedes $x \in L$ eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Also gilt $x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in R(L) \iff 2 = (x,x) = \sum_i a_i^2$. Es folgt:

$$x = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in R(L) \iff x \in L \text{ und genau zwei der } a_i \text{ liegen in } \{\pm 1\}, \text{ alle anderen sind } 0\,.$$

Mit $(*)$ folgt nun sofort $R(\mathbb{D}_n) = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \le i < j \le n\}$ und daher $|R(\mathbb{D}_n)| = 2n(n-1)$.

Seien nun $1 \le i < j \le n$. Der Vektor $e_i + e_j$ liegt dann nicht in $\mathbb{A}_{n-1}$ da er nicht senkrecht auf $\sum_{i=1}^n e_i$ steht (eine Bedingung, die offensichtlich alle Elemente aus $\mathbb{A}_{n-1}$ erfüllen). Ferner ist klar, daß $e_i - e_j$ in $\mathbb{A}_{n-1}$ liegt. Damit ist $R(\mathbb{A}_{n-1}) = \{\pm(e_i - e_j) \mid 1 \le i < j \le n\}$ und somit $|R(\mathbb{A}_{n-1})| = n(n-1)$.

Aufgabe 2

(a) (i) Es ist $V = \mathbb{R}v \oplus (\mathbb{R}v)^\perp$ eine Zerlegung von V in σ_v-invariante Teilräume. Auf $(\mathbb{R}v)^\perp$ ist σ_v die Identität, auf $\mathbb{R}v$ ist $-\sigma_v$ die Identität. Also ist $\sigma_v^2 = \mathrm{id}_V$.

(ii) Es ist $v \in (\mathbb{R}w)^\perp$ und $w \in (\mathbb{R}v)^\perp$. Dann ist $V = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w \oplus \langle v, w\rangle_\mathbb{R}^\perp$ eine Zerlegung von V in $\sigma_v\sigma_w$-invariante Teilräume. Es ist $\sigma_v\sigma_w$ die Identität auf den dritten Summanden und $-\mathrm{id}$ auf den ersten beiden. Genauso verhält es sich mit $\sigma_w\sigma_v$.

(iii) Wieder ist $\sigma_v\sigma_w$ die Identität auf $\langle v, w\rangle_\mathbb{R}^\perp$. Weiter ist

$$\begin{aligned} v\sigma_v\sigma_w &= -v\sigma_w = -v + (v,w)w = -v - w \\ w\sigma_v\sigma_w &= (w - (v,w)v)\sigma_w = (v+w)\sigma_w = v - (v,w)w - w = v\,. \end{aligned}$$

Bezüglich der Basis (v, w) hat $\sigma_v\sigma_w\mid_{\langle v,w\rangle}$ also die Matrixdarstellung $\left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix hat Ordnung 3 wie behauptet.

(b) Für $x \in L^\#$ und $v \in R(L)$ ist $(v,x) \in \mathbb{Z}$. Damit ist $x\sigma_v + L = x - (v,x)v + L = x + L$. Also ist $L^\#/L \times W(L) \to L^\#/L, (x + L, g) \mapsto (xg + L)$ wohldefiniert und eine Gruppenoperation welche trivial ist.

(c) Nach Aufgabe 1a ist $\mathbb{A}_2 = \langle b_1, b_2\rangle_\mathbb{Z}$ und $R(\mathbb{A}_2) = \{\pm b_1, \pm b_2, \pm(b_1 + b_2)\}$ mit $b_1 = e_1 - e_2$ und $b_2 = e_2 - e_3$. Bezüglich der Basis $B = (b_1, b_2)$ haben $\sigma_{b_1}, \sigma_{b_2}$ und $\sigma_{b_1+b_2}$ die Matrixdarstellungen $a := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $b := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = aba$.

Also ist $W(\mathbb{A}_2) = \langle a, b\rangle$. Nach Teil (a) hat $c := ab$ Ordnung 3. Damit ist $W(\mathbb{A}_2) \cong D_6 = S_3$. Oder aber: Wegen $a^{-1}ca = ba = ba(ab)^3 = b^2c^2 = c^2$ ist $W(\mathbb{A}_2) = \{a^r c^s \mid r \in \{0,1\},\ s \in \{0,1,2\}\}$. Also

$$W(\mathbb{A}_2) = \{I_2, a, c = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), ac = b, c^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right), ac^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\}\,.$$

Weiter ist $b_1\sigma_x = b_1 - 2\frac{(b_1,x)}{(x,x)}x = b_1$ und $b_2\sigma_x = b_2 - 2\frac{(b_2,x)}{(x,x)}x = b_2 - x = -(b_1 + b_2)$. Also ${}_B\sigma_{x\,B} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Insbesondere ist also $\sigma_x \in \mathrm{Aut}(\mathbb{A}_2) \setminus W(\mathbb{A}_2)$. Nach Blatt 1 Aufgabe 1a ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_2) \cong D_{12}$ (die dort angegebene Grammatrix ergibt sich z.B. bezüglich der Basis $(b_1, b_1 + b_2)$). Damit ist $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}_2) = \langle a, b, x\rangle$ wie behauptet.

(d) (i) Siehe 1b.

(ii) Da σ_{e_1} trivial auf $\langle e_1\rangle_\mathbb{R}^\perp$ operiert, fixiert es $e_{n-1} + e_n$ sowie $e_i - e_{i+1}$ für alle $2 \le i < n$. Weiter ist $(e_1 - e_2)\sigma_{e_1} = e_1 - e_2 - 2(e_1, e_1 - e_2)e_1 = (e_1 - e_2) - 2e_1 \in \mathbb{D}_n$. Also $\mathbb{D}_n\sigma_{e_1} \subseteq \mathbb{D}_n$ und damit $\mathbb{D}_n\sigma_{e_1} = \mathbb{D}_n$ da σ_{e_1} endliche Ordnung hat. Weiter gilt $v\sigma_{e_1} = v - 2(e_1, v)e_1 = v - e_1$ und daher $L - 1\sigma_{e_1} = L_2$. Da σ_{e_1} Ordung 2 hat folgt daraus auch $L_2\sigma_{e_1} = L_1$.

(iii) Wäre $\sigma_{e_1} \in W(\mathbb{D}_n)$, so würde σ_{e_1} trivial auf $L^\#/L$ operieren. Das ist aber wie wir gesehen haben nicht der Fall.