G. Nebe, M. Kirschmer

Lösung 6

Aufgabe 1.
Seien $a := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{smallmatrix}\right)$ und $b := \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{smallmatrix}\right)$ in der Gruppe G_{II}. Dann ist $(ab)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \cdot I_2$. Wegen $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = i$ ist $(ab)^3 = z \cdot I_2$ für eine primitive 8-te Einheitswurzel $z \in \mathbb{C}$.
Also ist $p_C(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y]$ invariant unter zI_2. Sei $N = \deg(p_C)$ die Länge des Codes. Da p_C homogen ist folgt, $p_C(X,Y) = p_C(zX,zY) = z^N p_C(X,Y)$. Damit ist $z^N = 1$, also $N \in 8\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. Seien $g := X^8 + 14X^4Y^4 + X^8$ und $\triangle := X^4Y^4(X^4 - Y^4)^4$.

(a) Nach dem Satz von Gleason ist $p_C(X,Y) = g^6 + rg^3\triangle + s\triangle^2$. Der Koeffizient von $X^{44}Y^4$ ist $84 + r$. Dieser ist Null, da $d(C) = 12$. Also ist $r = -84$. Der Koeffizient von $X^{40}Y^8$ ist $s - 246$. Also ist $s = 246$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} p_C(X,Y) &= g^6 - 84g^3\triangle + 246\triangle^2 \\ &= X^{48} + 17296X^{36}Y^{12} + 535095X^{32}Y^{16} + 3995376X^{28}Y^{20} \\ &+ 7681680X^{24}Y^{24} + 3995376X^{20}Y^{28} + 535095X^{16}Y^{32} + 17296X^{12}Y^{36} + Y^{48}\,. \end{aligned}$$

(b) Diesmal ist $p_C(X,Y) = g^9 + rg^6\triangle + sg^3\triangle^2 + t\triangle^3$. Der Koeffizient von $X^{68}Y^4$ ist $126 + r$, also ist $r = -126$. Analog folgert man zukzessive $s = 3015$ und $t = -4398$. Damit wird

$$\begin{aligned} p_C(X,Y) &= g^9 - 126g^6\triangle + 3015g^3\triangle^2 - 4398\triangle^3 \\ &= X^{72} + 249849X^{56}Y^{16} + 18106704X^{52}Y^{20} + 462962955X^{48}Y^{24} \\ &+ 4397342400X^{44}Y^{28} + 16602715899X^{40}Y^{32} + 25756721120X^{36}Y^{36} \\ &+ 16602715899X^{32}Y^{40} + 4397342400X^{28}Y^{44} + 462962955X^{24}Y^{48} \\ &+ 18106704X^{20}Y^{52} + 249849X^{16}Y^{56} + Y^{72}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3.

(a) Die Transposition $(1, n+1)$ vertauscht v mit $v + w$ und läßt d_{2n} invariant.

(b) Es ist $\dim d_{2n}^{+} = \dim z_{2n} = 1 + \dim d_{2n} = 1 + \dim g_n = 1 + (n-1) = n$. Daher genügt es $d_{2n}^{+} \subseteq (d_{2n}^{+})^{\perp}$ und $z_{2n} \subseteq z_{2n}^{\perp}$ zu zeigen. Für $c, c' \in g_n$ ist $(c,c) \cdot (c',c') = 2(c \cdot c') = 0$. Also ist $d_{2n} \subseteq d_{dn}^{\perp}$. Mit $v \cdot v = 0 = w \cdot w$ und $w \cdot (c,c) = 2c_1 = 0$ für alle $c \in g_n$ sowie $v \cdot (c,c) = (1,\dots,1) \cdot c = 0$ für alle $c \in g_n$ folgt die Behauptung.

(c) Sei $B = (b_1, \dots, b_{2n})$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^{1\times 2n}$ mit $(b_i, b_i) = \frac{1}{2}$ stets. Weiter sei $M := \langle b_1, \dots, b_{2n}\rangle_{\mathbb{Z}}$.

(i) Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von $\mathbb{F}_2^n$. Dann ist $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n)$ ein Basis von g_n. Wegen $w = (e_1, e_1) \in z_{2n}$ bilden $(e_1, e_1), \dots, (e_n, e_n)$ eine Basis von z_{2n}. Daher ist $\{b_i + b_{n+i} \mid 1 \le i \le n\} \cup \{2b_j \mid n+1 \le j \le 2n\}$ eine Basis von $L_{z_{2n}}$. Damit bilden aber auch die $2n$ Vektoren $b_i \pm b_{n+i}$ mit $1 \le i \le n$ eine Basis von $L_{z_{2n}}$. Diese Vektoren haben Länge 1 und sind paarweise orthogonal. Das war zu zeigen.

(ii) Wir beginnen mit folgender
Bemerkung Sei L ein ganzes Gitter. Dann ist

$$L^{ev} := \{x \in L \mid (x,x) \in 2\mathbb{Z}\}$$

das maximale gerade Teilgitter von L. Weiter ist $[L : L^{ev}] = 2$ falls L nicht gerade ist.

Beweis: Sicher ist L^{ev} ein $\mathbb{Z}$-Teilmodul von L, also ein Teilgitter. Weiter ist L^{ev} per Definition gerade und es enthält jedes andere gerade Teilgitter. Sei nun $\varphi\colon L \to \mathbb{F}_2$, $x \mapsto (x,x)+2\mathbb{Z}$. Dann ist φ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen mit Kern L^{ev}. Falls L nicht gerade ist, ist φ surjektiv. Daher ist dann $[L : L^{ev}] = |\mathbb{F}_2| = 2$.

Nun zur eigentlichen Aufgabe. Im Beweis von Aufgabe 4d auf Blatt 2 haben wir gezeigt, daß $\mathbb{D}_{2n}$ das maximale gerade Teilgitter des Standardgitters ist.

Wir behaupten nun, daß $L_{d_{2n}}$ das maximale gerade Teilgitter von $L_{z_{2n}}$ ist. Daraus folgt dann sofort die Behauptung, da Isometrien von ganzen Gittern die maximalen geraden Teilgitter aufeinander abbilden müssen.

Wie schon zuvor folgt, daß $B' := \{b_i + b_{i+1} + b_{n+i} + b_{n+i+1} \mid 1 \le i \le n-1\} \cup \{2b_j \mid n \le j \le 2b\}$ eine Basis von $L_{d_{2n}}$ bildet. Da je zwei dieser Vektoren ein ganzzahliges Skalarprodukt haben, ist $L_{d_{2n}}$ ganz. Weiter ist das Skalarprodukt eines Basisvektors mit sich selbst gerade. Also ist $L_{d_{2n}}$ gerade.

Es wird $L_{z_{2n}}$ erzeugt von $L_{d_{2n}}$ und $b_1 + b_{n+1}$. Wegen $2(b_1 + b_{n+1}) \in 2M \subseteq L_{d_{2n}}$ ist $[L_{z_{2n}} : L_{d_{2n}}] = 2$. Daher ist $L_{d_{2n}}$ das maximale gerade Teilgitter von $L_{z_{2n}}$.

(iii) Es ist $L_{d_{2n}^+} = \langle L_{d_{2n}}, x\rangle$ mit $x := \sum_{i=1}^n b_i$. Dann ist $(x,x) = \frac{n}{2} \in \mathbb{Z}$ und $(x,b) \in \mathbb{Z}$ für alle $b \in B'$. Also ist $L_{d_{2n}^+}$ ganz. Nach Aufgabe 4d von Blatt 2 besitzt $\mathbb{D}_{2n}$ genau 3 echte ganze Obergitter, nämlich das Standardgitter sowie die Gitter welche wir dort mit L_1 sowie L_2 bezeichnet haben. Weiter haben wir dort gezeigt, daß L_1 isometrisch ist zu L_2. Also hat auch $L_{d_{2n}}$ genau drei echte ganze Obergitter. Das Gitter $L_{z_{2n}}$ ist nach (i) isometrisch zum Standardgitter (und von $L_{d_{2n}^+}$ verschieden). Also muß $L_{d_{2n}^+}$ isometrisch zu $L_1 \cong L_2$ sein.

(d) Es ist $c \in g_n$ genau dann, wenn $w(c)$ gerade ist. Also besitzt g_n genau $\binom{n}{2i}$ Elemente mit Gewicht $2i$. Daher gilt $p_{g_n}(X,Y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} X^{n-2i}Y^{2i}$. Außerdem folgt, daß d_{2n} genau $\binom{n}{2i}$ Elemente mit Gewicht $4i$ besitzt. Wegen $w(x) \in 4\mathbb{Z}$ für alle $x \in d_{2n}$ folgt $p_{d_{2n}}(X,Y) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} X^{2n-4i}Y^{4i}$.

Es ist d_{2n}^+ die disjunkte Vereinigung der beiden Nebenklassen d_{2n} und $v + d_{2n}$. Wegen $v + d_{2n} = \{(c + (1,\dots,1), c) \mid c \in g_n\}$ haben alle Elemente in dieser Nebenklasse das Gewicht n. Damit wird $p_{d_{2n}^+}(X,Y) = 2^{\deg g_n} + p_{d_{2n}}(X,Y) = 2^{(n-1)}X^nY^n + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n}{2i} X^{2n-4i}Y^{4i}$.

Aus (c)(i) wissen wir, daß $z_{2n} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{F}_2^n\}$. Also gibt es genau $\binom{n}{i}$ Elemente mit Gewicht $2i$ in z_{2n}. Daher ist $p_{z_{2n}}(X,Y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^{2(n-i)}Y^{2i} = (X^2+Y^2)^n$.

(e) Da g_n gerade ist, ist d_{2n} doppelt gerade. Weiter besitzen alle Elemente in $v + d_{2n}$ nach (d) ebenfalls Gewicht $n \in 4\mathbb{Z}$. Also ist d_{2n}^+ doppelt gerade. Bleibt zu zeigen, daß der Code d_{16}^+ das Minimum $4\lfloor \frac{16}{24} \rfloor + 4 = 4$ hat.

Nach Teil (d) ist

$$p_{d_{16}^+}(X,Y) = 2^7X^8Y^8 + X^{16} + 28X^{12}Y^4 + 70X^8Y^8 + 28X^4Y^{12} + Y^{16} = (X^8 + Y^8 + 14X^4Y^4)^2\,.$$

Insbesondere lesen wir als Minimum 4 ab. (Dazu hätte man $p_{d_{16}^+}(X,Y)$ natürlich nicht ausmultiplizieren müssen.)