G. Nebe, M. Kirschmer



# Lösung 12

**Aufgabe 1.**

(a) Bezeichne $\ell := \ell(C,D)$ den kürzesten Weg von $C$ nach $D$ in $\Gamma$. Im Skript haben wir bereits $\ell \leq d(C,D)$ gesehen. Wir zeigen daher $\ell \geq d(C,D)$. Da es in $\Gamma$ einen Weg von $C$ nach $D$ gibt, existieren also selbstduale Codes $C_0, C_1, \ldots, C_\ell < \mathbb{F}_q^n$ mit $C_0 = C$, $D_\ell = C$ und $\dim(C_i \cap C_{i-1}) = \frac{n}{2} - 1$ für alle $1 \leq i \leq \ell$.

Wir zeigen nun mittels Induktion $\dim(C_0 \cap C_k) \geq \frac{n}{2} - k$ für alle $0 \leq k \leq \ell$. Die Fälle $k = 0, 1$ sind klar. Für $k > 1$ ist

$$\begin{aligned}\dim(C_0 \cap C_k) &\geq \dim((C_0 \cap C_{k-1}) \cap C_k) \\ &= \dim(C_0 \cap C_{k-1}) + \dim(C_k) - \dim(C_k + (C_0 \cap C_{k-1})) \\ &\geq \frac{n}{2} - (k-1) + \frac{n}{2} - \dim(C_k + C_{k-1}) = n - k + 1 - \frac{n}{2} - 1 = \frac{n}{2} - k\end{aligned}$$

Insbesondere ergibt sich für $k = \ell$ daraus $\dim(C \cap D) \geq \frac{n}{2} - \ell$. Umformen liefert $\ell \geq d(C,D)$.

(b) Wir folgen dem Beweis von Satz 9.10 und führen eine Induktion nach $d := d(C,D)$. Die Fälle $d = 0, 1$ sind klar. Sei nun $d \geq 1$ und $X$ ein beliebiger Teilraum von $D$ mit $C \cap D < X$ und $\dim(X/C \cap D) = 1$. Weiter sei $C_1 := X + (C+X)^\perp$.

Nach dem Homomorphiesatz ist $\dim(C_1) = \frac{n}{2}$. Für $x_1, x_2 \in X$ und $y_1, y_2 \in (C+X)^\perp$ ist $(x_1 + y_1) \cdot (x_2 + y_2) = 0$ da $X < C < X^\perp$, $(C+X)^\perp \perp X$ und $(X+C)^\perp < C < X + C$. Also ist $C_1$ selbstdual.

Sei $x \in X$ und $y \in (C+X)^\perp$. Weiter seien

$$\begin{aligned}a &= |\{1 \leq i \leq n \mid x_i \neq 0 \text{ und } y_i \neq 0\}| \\ b &= |\{1 \leq i \leq n \mid x_i \neq 0 \text{ und } y_i = 0\}| \\ c &= |\{1 \leq i \leq n \mid x_i = 0 \text{ und } y_i \neq 0\}|\end{aligned}$$

Dann gilt $a + b = wt(x) \in 4\mathbb{Z}$ da $X < D$ und $a + c = wt(y) \in 4\mathbb{Z}$ da $(C+X)^\perp < C$. Weiter ist $a + 2\mathbb{Z} = x \cdot y = 0$ und somit $wt(x+y) = b + c = wt(x) + wt(y) - 2a \equiv_4 0$. Also ist $C_1$ doppelt gerade.

Wegen $\dim(C_1 \cap C) = \dim((C+X)^\perp) = \frac{n}{2} - 1$ ist $d(C, C_1) = 1$. Analog liefert $C_1 \cap D = X$, daß $d(C_1, D) = d - 1$ ist.

Nach der Induktionsvoraussetzung existiert somit ein Weg von $C$ nach $D$ in $\Gamma$, welcher nur aus doppeltgeraden Codes besteht.

**Aufgabe 2.**

Sei $(E,q)$ ein beliebiger regulärer quadratischer $K$-Vektorraum. Ist $(E,q)$ nicht anisotrop, so existiert ein $x \in E - \{0\}$ mit $q(x) = 0$. Also ist $\langle x \rangle$ scharf primitiv. Damit spaltet eine hyperbolische Ebene von $(E,q)$ ab. Iteriert man dieses Verfahren, so erhält man eine Zerlegung $(E,q) = V \perp H$ mit $H$ hyperbolisch und $V$ anisotrop (der sog. anisotrope Kern von $(E,q)$). Damit ist $[(E,q)] = [V]$ in $WQ(K)$.

Angenommen $(E_1, q_1)$ und $(E_2, q_2)$ seien zwei reguläre anisotrope $K$-Vektorräume mit $[(E_1, q_1)] = [(E_2, q_2)]$. Dann existieren hyperbolische Moduln $H_1$ und $H_2$ mit $(E_1, q_1) \perp H_1 \cong (E_2, q_2) \perp H_2$. Also gibt es $n_i \in \mathbb{N}_0$ mit $H_i \cong \mathbb{H}(K)^{n_i}$. Ohne Einschränkung ist $n_1 \geq n_2$. Also ist $(E_1, q_1) \perp \mathbb{H}(K)^{n_1} \cong (E_2, q_2) \perp \mathbb{H}(K)^{n_2}$. Mit dem Wittschen Kürzungssatz folgt $(E_1, q_1) \perp \mathbb{H}(K)^{n_1 - n_2} \cong (E_2, q_2)$. Da $(E_2, q_2)$ anisotrop ist, folgt $n_1 = n_2$ und damit $(E_1, q_1) \cong (E_2, q_2)$.

**Aufgabe 3.**

(a) Sei $(E, q)$ ein beliebiger regulärer quadratischer $K$-Vektorraum. Wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ist $(E, q)$ diagonalisierbar; also $(E, q) \cong [d_1, \dots, d_r]$ mit $d_i \in K^*$. Wegen $[d] \cong [dx^2]$ für alle $x \in K^*$ ist also $WQ(K) = \langle [[a]] \mid a \in K^*/(K^*)^2 \rangle$.

Seien nun $a, b \in K^*$. Bekanntlich ist $[a] \perp [-a] \cong \mathbb{H}(K)$. Sei nun $a + b \neq 0$. Dann gibt es eine Basis $(e, f)$ von $(E, q) \cong [a, b]$ mit $e \perp f$, $q(e) = a$ und $q(f) = b$. Bezüglich der Basis $(e + f, be - af)$ wird die Form $q$ in der Tat beschrieben durch $[a + b, a^2b + b^2a]$. Also ist $[a, b] \cong [a + b, ab(a + b)]$.

(b) Bekanntlich gilt in $WQ(K)$ stets

$$(**) \qquad [[a]] = [[ab^2]] \text{ für alle } a, b \in K^* .$$

(i) Im Fall $K = \mathbb{F}_3$ können wir $(a_1, a_2) = (1, -1)$ wählen. Dann ergeben sich mit $(*)$ und $(**)$ die Relationen $[[1]] + [[-1]] = 0$ und $[[x]] + [[x]] = [[-x]] + [[-x \cdot x^2]] = [[-x]] + [[-x]]$. Diese Relationen liefern eine abelsche Gruppe isomorph zu $C_4$. Nach Aufgabe 4 ist $WQ(\mathbb{F}_3) \cong C_4$, damit genügen diese Relationen bereits.

(ii) Im Fall $K = \mathbb{F}_5$ können wir $(a_1, a_2) = (1, 2)$ wählen. Dann ergeben sich mit $(*)$ und $(**)$ unter anderem $[[1]] + [[1]] = [[2]] + [[2]]$ und $[[1]] + [[1]] = [[1]] + [[-1]] = 0$ sowie $[[1]] + [[2]] = [[3]] + [[6]] = [[2]] + [[1]]$. Diese liefern eine abelsche Gruppe isomorph zu $C_2 \times C_2$ was nach Aufgabe 4 bereits $WQ(\mathbb{F}_5)$ entspricht. Damit genügen diese Relationen bereits.

(iii) Im Fall $K = \mathbb{R}$ können wir $(a_1, a_2) = (1, -1)$ wählen. Dann ergeben sich mit $(*)$ und $(**)$ die Relation $[[1]] + [[-1]] = 0$ sowie die offensichtliche Relation$[[a_i]] + [[a_i]] = [[2a_i]] + [[2a_i]] = [[a_i]] + [[a_i]]$. Dies liefert eine Gruppe isomorph zu $\mathbb{Z}$. Wegen $WQ(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}$ und der Tatsache, daß jeder echte Quotient von $\mathbb{Z}$ endlich ist, folgt auch in diesem Fall, daß die Relationen bereits genügen.

**Aufgabe 4.**

Sei zunächst $q$ gerade. Nach Satz 8.33 wissen wir bereits, daß $A := (\mathbb{F}_q^2, N)$ neben dem Nullraum der einzige reguläre anisotrope quadratische $\mathbb{F}_q$-Vektorraum ist. Da jede Wittklasse nach Aufgabe 2 einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten anisotropen Vertreter besitzt, folgt $WQ(\mathbb{F}_q) = \langle [A] \rangle \cong C_2$.

Sei nun $q$ ungerade. Nach Satz 8.33 wissen wir $|WQ(\mathbb{F}_q)| = 4$. Denn es existieren bis auf Isometrie genau 4 reguläre anisotrope quadratische $\mathbb{F}_q$-Vektorräume.
Nach Aufgabe 3b ist $WQ(\mathbb{F}_q)$ damit erzeugt von $[[1]]$ und $[[\varepsilon]]$ für ein beliebiges Nichtquadrat $\varepsilon$.

Ist $q \equiv_4 -1$ so können wir $\varepsilon = -1$ wählen und erhalten $[[1]] = -[[-1]]$. Also wird $WQ(\mathbb{F}_q)$ in diesem Fall bereits von $[[1]]$ erzeugt und ist somit zyklisch von Ordnung 4.

Ist $q \equiv_4 1$ so ist $-1 \in (\mathbb{F}_q^*)^2$. Damit folgt $[[x]] + [[x]] = [[x]] + [[-x]] = 0$ für alle $x \in \mathbb{F}_q^*$. Also hat $WQ(\mathbb{F}_q)$ Exponent 2 und ist somit isomorph zu $C_2 \times C_2$.