Gewöhnliche Differentialgleichungen
Skript zur Vorlesung

PD Dr. Michael H. Mertens

Wintersemester 2021/22

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Das vorliegende Skriptum wurde für die Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“, die ich im Wintersemester 2021/22 an der Universität zu Köln gehalten habe, geschrieben. Es orientiert sich vorwiegend an den Vorlesungsskripten von Prof. Dr. G. Sweers (Universität zu Köln, 2020/21), sowie Prof. Dr. A. Krieg und Prof. Dr. S. Walcher (RWTH Aachen University, 2019). Das Skript von Herrn Prof. Dr. Sweers ist über die folgende URL verfügbar und kann als zusätzliche Ressource genutzt werden,

`http://www.mi.uni-koeln.de/Vorlesung_Sweers/GDGL2021/Skript/DGL-2020R.pdf`.

Zu beachten ist hierbei, dass dieses Skripte nicht zu 100% dieselben Themen behandeln und diese nicht immer in derselben Reihenfolge.

Daneben gibt es diverse Lehrbücher zum Thema Differentialgleichungen, die als Quelle für alternative (oder auch die gleichen) Herangehensweisen an die hier behandelten Themen zu empfehlen sind:

- B. Aulbach, *Gewöhnliche Differenzialgleichungen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2. Auflage, 2004.

- C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag, New York, 2nd ed., 2006.

- W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 7. Auflage, 2006.

Diese Liste erhebt natürlich keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit.

Für die Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ sind gute Kenntnisse des Stoffes der Vorlesungen Analysis I und II sowie Lineare Algebra I und II erforderlich. Zentrale Resultate aus diesen Vorlesungen, soweit sie hier relevant sind, sind im Anhang zusammengefasst, allerdings ohne Beweise. Auch hier besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit und die Anhänge sollen lediglich evtl. das Nachschlagen einer Aussage erleichtern.

Trotz eifriger Bemühungen ist es kaum zu vermeiden, dass diese Notizen (hoffentlich wenige) Fehler enthalten, sowohl typographischer als auch mathematischer Natur. Korrekturen oder Nachfragen per E-Mail unter `mmertens@math.uni-koeln.de` sind jederzeit willkommen.

Köln, April 2022, Michael H. Mertens

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Erste Beispiele

Vor allem in vielen Naturwissenschaften, wie etwa der Physik oder der Biologie, aber auch in den Wirtschaftswissenschaften wird häufig die zeitliche Veränderung einer gewissen Größe, etwa die Position einer Masse in einem Gravitationsfeld, die Größe einer Tierpopulation oder die Entwicklung eines Aktienkurses, betrachtet. Durch **Modelle** wird versucht, diese Entwicklung mathematisch zu beschreiben., das heißt ausgehend von gewissen **Anfangs-** oder **Randbedingungen** und einem Modell, das die Änderungsrate beschreibt, möchte man die Entwicklung der eigentlichen Größe berechnen. Die übliche Interpretation einer Ableitung als Änderungsrate führt hierbei ganz natürlich dazu, dass eine Funktion, die die relevante Größe beschreibt, zu ihrer Ableitung in Beziehung gesetzt wird. Eine solche Beziehung nennen wir eine **Differentialgleichung**. Wir betrachten zunächst einige Beispiele, in denen eine solche Beziehung hergeleitet wird.

Beispiel 1.1.1 (Freier Fall). Nehmen wir an ein Apfel fällt aus einer gewissen Höhe auf die Erde. Wie entwickelt sich seine Geschwindigkeit $v = v(t)$ während des Falls?

Da der Apfel fällt, können wir zunächst annehmen, dass er zum Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit $v(0) = 0$ hat. Nach dem Newton'schen Trägheitsprinzip wissen wir, dass eine Kraft auf den Apfel wirken muss, damit sich seine Geschwindigkeit ändert. Diese Kraft F ist gegeben durch die Gleichung $F(t) = ma(t)$, wobei m die Masse des Apfels und $a(t)$ die Beschleunigung des Apfels zum Zeitpunkt t bezeichnet. Nach Definition ist die Beschleunigung aber nichts anderes als die Änderungsrate der Geschwindigkeit, also gilt $a(t) = v'(t)$. Wir nehmen hier also sofort an, dass die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit differenzierbar ist, was aber in der Regel eine vernünftige Annahme ist. Die Kräfte die hier im Spiel sind, sind offenbar einerseits die Schwerkraft der Erde sowie andererseits der Luftwiderstand. Erstere ist konstant mit $F_G = mg$, wobei $g \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ die sogenannte Erdbschleunigung bezeichnet[1]. Der Luftwiderstand wirkt der Schwerkraft entgegen. Diesen genau zu beschreiben, ist tatsächlich nicht so einfach. Man nimmt oft an, dass der Luftwiderstand proportional zur Geschwindigkeit ist, $F_L(t) = -\gamma v(t)$ für ein

[1] Diese ist genau genommen ortsabhängig, aber das ignorieren wir hier.

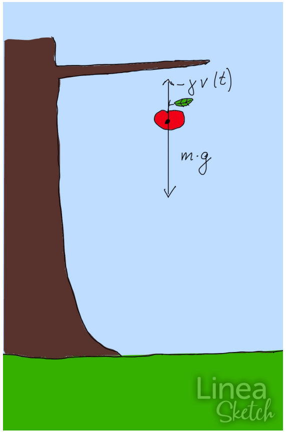

Abbildung 1.1: Ein fallender Apfel

$\gamma \geq 0$. Das negative Vorzeichen ist nötig, weil die Orientierung der Kraft entgegengesetzt zur Schwerkraft ist. Insgesamt erhalten wir also die Beziehung

$$mv'(t) = mg - \gamma v(t), \quad v(0) = 0. \tag{1}$$

Wir haben also eine Gleichung hergeleitet, die die Funktion v, für die wir uns interessieren, durch ihre Ableitung ausdrückt. Man nennt eine solche Beziehung ein **Anfangswertproblem**.

Eine solche Gleichung kann man ohne große Probleme lösen: Die Masse m ist konstant, so dass wir sie aus der Gleichung herauskürzen können, die wir sodann umformen können zu

$$v'(t) = -a(v(t) - b), \quad v(0) = 0, \tag{2}$$

wobei $a = \gamma/m$ und $b = g/a$ neue Konstanten sind. Für $v - b \neq 0$ können wir durch diesen Ausdruck dividieren und erhalten

$$\frac{v'}{v-b} = -a.$$

Wir integrieren nun beide Seiten der Gleichung bezüglich t und erhalten

$$\log |v - b| = -at + C$$

für eine Integrationskonstante C. Wegen $b > 0$ und $v(0) = 0$ ist es sinnvoll anzunehmen, dass $v - b < 0$ gilt. Somit erhalten wir

$$v(t) = b - ce^{-at}$$

für eine Konstante $c = e^C$. Diese können wir aus unserer Anfangsbedingung $v(0) = 0$ bestimmen und erhalten direkt $c = b$ und somit

$$v(t) = b(1 - e^{-at}).$$

Direktes Überprüfen zeigt, dass diese Funktion in der Tat unser Anfangswertproblem (2) löst.

Für die praktische Anwendung ist hier natürlich zu sagen, dass unser Apfel nur aus einer begrenzten Höhe fallen kann, so dass unsere Annahmen für das Modell noch gelten. Spätestens sobald der Apfel den Boden erreicht, ist das Modell nicht mehr realistisch. Auch kann man ab einer gewissen Höhe die Schwerkraft nicht mehr als konstant annehmen und gerade in großer Höhe gibt es starke Luftströmungen, so dass auch unsere Formel für den Luftwiderstand nicht universell wird. Unsere Lösung ist also nur in einem gewissen Intervall für t brauchbar, obwohl die Lösung natürlich für alle rellen t definiert ist.

Beispiel 1.1.2 (Logistische Gleichung). Die sogenannte **logistische Gleichung**

$$y'(x) = \lambda y(x)(1 - y(x)), \tag{3}$$

wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist, kann zur Beschreibung sehr vieler verschiedener Situationen verwendet werden. Beispielsweise modelliert sie das beschränkte Wachstum einer Population von z.B. Hasen: Ist zum Beispiel die Population $y(x)$ groß (sie sollte geeignet normiert sein), so sehen wir, dass die Ableitung negativ ist, die Population wird also schrumpfen. Dies ist durchaus sinnvoll, denn wenn viele Hasen an einem Ort sind, gibt es womöglich nicht genügend Futter für alle und es werden ggf. auch mehr Hasen von Füchsen o.ä. gefressen. Ist die Population hingegen sehr klein, wird die Ableitung positiv, d.h. die Population erholt sich wieder (für das einzelne Tier gibt es mehr Nahrung und eine kleine Population ist für Räuber weniger attraktiv, so dass weniger Hasen gefressen werden).Diese Differentialgleichung hat mehrere verschiedene Lösungen, wie man leicht nachprüft.

$$\begin{aligned}
& y(x) = 0 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
& y(x) = 1 && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
\alpha < 0: \quad & y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x} - \alpha} && \text{für } x \in \mathbb{R}, \\
\alpha > 0: \quad & y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x} - \alpha} && \text{für } x \in (\frac{1}{\lambda}\log\alpha, \infty), \\
\alpha > 0: \quad & y(x) = \frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x} - \alpha} && \text{für } x \in (-\infty, \frac{1}{\lambda}\log\alpha).
\end{aligned} \tag{4}$$

Man beachte bei der vierten und fünften Lösung in (4), dass Lösungen zu einer Differentialgleichung üblicherweise auf Intervallen betrachtet werden, so dass die angegebenen zwei Lösungen tatsächlich als verschieden anzusehen sind.

Beispiel 1.1.3 (Wasser in einem Eimer mit Loch). Wir betrachten einen zylindrischen Eimer, der bis zu einer Höhe h_0 mit Wasser gefüllt ist. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ ströme aus einem Loch am unteren Rand des Eimers Wasser aus. Wie herhält sich die Füllhöhe $h(t)$ des Eimers in Abhängigkeit von der Zeit?

Nach dem Gesetz von Torricelli ist die Änderungsrate des Volumens $V(t)$ des Wassers im Eimer proportional zur Quadratwurzel der Füllhöhe $h(t)$, also haben wir

$$V'(t) = -c_1\sqrt{h(t)}$$

für eine Konstante $c_1 > 0$. Da der Eimer zylindrisch ist, sagen wir mit Radius r, haben wir die Beziehung $V(t) = \pi r^2 h(t)$, also erhalten wir das Anfangswertproblem

$$h'(t) = -c\sqrt{h(t)}, \quad h(0) = h_0,$$

für eine Konstante $c = c_1/(\pi r^2)$. Mit einem ähnlichen Verfahren wie in Beispiel 1.1.1, das wir später auch in größerer Allgemeinheit untersuchen und benutzen werden, erhält man die Lösung

$$h(t) = \begin{cases} \left(\sqrt{h_0} - \frac{c}{2}t\right)^2, & t \in [0, 2\sqrt{h_0}/c] \\ 0 & t \in (2\sqrt{h_0}/c, \infty). \end{cases}$$

Im Laufe dieser Vorlesung werden wir noch viele andere Beispiele von Differentialgleichungen und ihren Anwendungen sehen.Hauptziel wird es sein, einerseits, soweit möglich, Lösungsverfahren kennenzulernen, aber auch Strukturresultate wie Existenz- und Eindeutigkeitssätze für Lösungen.

1.2 Grundlegende Begriffe und Definitionen

Wir wollen zunächst formal die Begriffe aus Abschnitt 1.1 definieren.

Definition 1.2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $F : D \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto F(x, y)$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y' = F(x, y) \tag{1}$$

eine **gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung**. Eine auf einem nichtentarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, mit den Eigenschaften

(*i*) f ist auf I differenzierbar.

(*ii*) Wir haben $\{(x, f(x)) : x \in I\} \subseteq D$.

(*iii*) Es gilt $f'(x) = F(x, f(x))$ für alle $x \in I$.

heißt eine **Lösung** der Differentialgleichung (1). Unter einer Lösung des **Anfangswertproblems**

$$y' = F(x, y), \quad y(a) = b$$

verstehen wir eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (1), so dass zusätzlich $a \in I$ und $f(a) = b$ erfüllt sind.

Bemerkung 1.2.2. 1. *In den Randpunkten des Intervalls I, sofern diese zu I dazugehören, ist die Bedingung (i) in Definition 1.2.1 als einseitige Differenzierbarkeit zu verstehen.*

2. *Es ist formal nicht notwendig, in Definition 1.2.1 die Stetigkeit der Funktion F zu fordern. Allerdings ist dies in den meisten Anwendungen eine vernünftige Annahme und ohne sie gibt es eventuell keine Lösung: Sei etwa*

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem $y' = F(x,y),\ y(0) = 0$ keine Lösung (Übung).

3. *Die Bezeichnungen und auch die Rollen der Variablen x und y sind nicht immer festgeschrieben. So ist gerade in Anwendungen aus der Physik die Variable der gesuchten Funktion die Zeit und wird dann meist mit t bezeichnet. Die Position eines Teilchens zum Zeitpunkt t wird dann häufig mit $x(t)$ bezeichnet. Aus dem Kontext sollten die Rollen der Variablen jedoch immer klar sein.*

Beispiel 1.2.3. Ist $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ derart, dass $F(x,y) = G(x)$ nicht von y abhängt, so ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = G(x)$ genau eine Stammfunktion der stetigen Funktion G. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der Analysis (siehe Satz A.5.7) wissen wir, dass eine solche Stammfunktion auf jedem Intervall I, auf dem G stetig ist, existiert. Ebenso hat das Anfangswertproblem

$$y' = G(x), \quad y(a) = b$$

auf jedem Intervall I im Definitionsbereich von G, welches a enthält eine eindeutige Lösung,

$$f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto b + \int_a^x G(t)\mathrm{d}t.$$

Analog zu Definition 1.2.1 definieren wir auch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen. In der nachfolgenden Definition schreiben wir abkürzend etwa $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)^{tr}$ und die Ableitung versteht sich komponentenweise.

Definition 1.2.4. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^n, (x, \vec{y}) \mapsto \vec{F}(x, \vec{y})$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}) \tag{2}$$

ein **System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung**. Eine auf einem nicht-entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$, mit den Eigenschaften

(*i*) $\vec{f}$ ist auf I differenzierbar.

(*ii*) Wir haben $\{(x, \vec{f}(x)) \,:\, x \in I\} \subseteq D$.

(*iii*) Es gilt $\vec{f}'(x) = \vec{F}(x, \vec{f}(x))$ für alle $x \in I$.

heißt eine **Lösung** des Systems (2). Unter einer Lösung des **Anfangswertproblems**

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(a) = \vec{b}$$

verstehen wir eine Lösung $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ des Systems (1), so dass zusätzlich $a \in I$ und $\vec{f}(a) = \vec{b}$ erfüllt sind.

Ist aus dem Kontext klar, dass es sich um ein System von Differentialgleichungen handelt, lassen wir die Vektorpfeile meist weg.

Beispiel 1.2.5. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aus der Analysis I ist bekannt, dass die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y_1' = y_1,\ y_1(0) = 1$ gegeben ist durch $y_1(x) = e^x$. Hiermit erhält man ein weiteres Anfangswertproblem für y_2,

$$y_2' = y_2 + e^x, \quad y_2(0) = 2.$$

Man prüft ohne Schwierigkeiten nach, dass $y_2(x) = (x+2)e^x$ eine Lösung ist, also finden wir mit

$$y(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ x + 2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung unseres ursprünglichen Systems.

Neben Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung betrachtet man auch Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Definition 1.2.6. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{3}$$

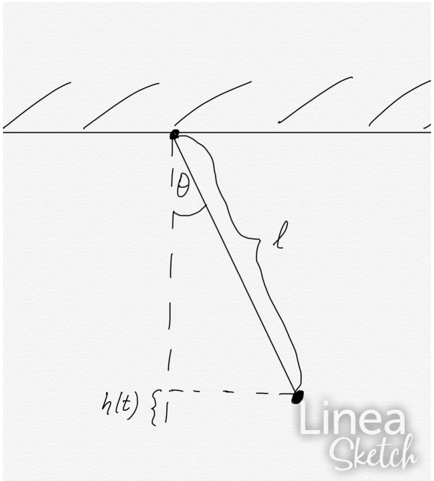

Abbildung 1.2: Skizze eines mathematischen Pendels

eine **gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung**. Eine auf einem nicht-entarteten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, mit den Eigenschaften

(*i*) f ist auf I n-mal differenzierbar.

(*ii*) Wir haben $\{(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x)) \ : \ x \in I\} \subseteq D$.

(*iii*) Es gilt $f^{(n)}(x) = F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n-1)}(x))$ für alle $x \in I$.

heißt eine **Lösung** der Differentialgleichung (3). Unter einer Lösung des **Anfangswertproblems**

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \quad y(a) = b_0, ..., y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$$

verstehen wir jede Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (3), so dass zusätzlich $a \in I$, $(a, b_0, ..., b_{n-1}) \in D$ und $f(a) = b_0, \ldots f^{(n-1)}(a) = b_{n-1}$ erfüllt sind.

Beispiel 1.2.7 (Mathematisches Pendel). Ein mathematisches Pendel besteht aus einer punktförmigen Masse m, die an einem masselosen Faden der Länge ℓ reibungsfrei aufgehängt ist. Zudem gibt es keinen Luftwiderstand. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei das Pendel um einen Winkel θ_0 ausgelenkt und werde von dort losgelassen. Wir suchen nun eine Beschreibung für den Auslenkungswinkel $\theta(t)$ zum Zeitpunkt t.

Die Gesamtenergie $E(t)$ des Pendels ist die Summe aus seiner kinetischen Energie, gegeben durch

$$E_{kin}(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2 = \frac{1}{2} m (\ell \theta'(t))^2,$$

und seiner potentiellen Energie

$$E_{pot}(t) = mgh(t) = mg\ell(1 - \cos(\theta(t))).$$

Es gilt also

$$E(t) = E_{kin}(t) + E_{pot}(t) = \frac{1}{2} m\ell\theta'(t) + mg\ell(1 - \cos(\theta(t))).$$

Nach dem Energieerhaltungssatz ist diese Gesamtenergie konstant, d.h. es gilt $E'(t) = 0$. Für den Winkel $\theta(t)$ erhalten wir somit nach einigen leichten Umformungsschritten die Differentialgleichung

$$\ell\theta'(t)\theta''(t) + g\sin(\theta(t))\theta'(t) = 0.$$

Nehmen wir $\theta'(t) \neq 0$ an, so können wir noch durch diese Größe teilen und erhalten die **Pendelgleichung**,

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0. \tag{4}$$

Dies ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Das entsprechende Anfangswertproblem ist dann

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0.$$

Diese Differentialgleichung besitzt zwar Lösungen, jedoch lassen sich diese nicht durch sogenannte **elementare Funktionen** (also im Wesentlichen Kombinationen aus Potenzen, Exponentialfunktionen, trigonometrischen Funktionen, sowie deren Umkehrungen) darstellen. In der Physik modifiziert man die Pendelgleichung meist etwas, indem man verwendet, dass für kleine Winkel $\sin(\theta) \approx \theta$ gilt. Die neue Gleichung lautet dann

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0.$$

Für diese Gleichung kann man recht leicht elementare Lösungen finden (wir werden uns in Abschnitt 1.3 näher damit befassen). Zum Beispiel liefert

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right)$$

eine Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems für das Intervall $I = [0, \infty)$.

Der folgende Satz zeigt nun, dass man Differentialgleichungen höherer Ordnung stets in ein äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen kann.

Satz 1.2.8 (Reduktionssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $F : D \to \mathbb{R}$ stetig und betrachte die Differentialgleichung n-ter Ordnung*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

wie in (3). *Hierzu definieren wir das folgende System von Differentialgleichungen erster Ordnung,*

$$\begin{pmatrix} y_0' \\ y_1' \\ \vdots \\ y_{n-2}' \\ y_{n-1}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ F(x, y_0, y_1, ..., y_{n-1}) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Lösungen von (3) *und* (5)*:*

(*i*) *Ist* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine Lösung der Differentialgleichung* n*-ter Ordnung* (3)*, so ist* $\vec{f} = (f, f', ..., f^{(n-1)})^{tr} : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lösung des zugehörigen Systems* (5).

(*ii*) *Ist* $\vec{f} = (f_0, f_1, ..., f_{n-1})^{tr} : I \to \mathbb{R}^n$ *eine Lßong des Systems* (5)*, dann ist* $f_0 : I \to \mathbb{R}$ *eine Lösung der Differentialgleichung* n*-ter Ordnung* (3).

Beweis.

(*i*) Für $\nu \in \{0, ..., n-1\}$ setzen wir $f_\nu = f^{(\nu)}$. Dann gilt offenbar $f_\nu' = f_{\nu+1}$ für alle $\nu \leq n-2$ und wir haben

$$f_{n-1}' = f^{(n)} = F(x, f, f', ..., f^{(n-1)}) = F(x, f_0, f_1, ..., f_{n-1}).$$

Somit ist $\vec{f} = (f, f', ..., f^{(n-1)})^{tr}$ wie behauptet eine Lösung des Systems (5).

(*ii*) Es folgt unmittelbar aus der Betrachtung des Systems (5), dass die Funktion f_0 der Lösung auf dem Intervall I n-mal differenzierbar sein muss, und dass gilt

$$f_1 = f_0', \; f_2 = f_1' = f_0'', ..., f_{n-1} = f_{n-2}' = ... = f_0^{n-1},$$

sowie

$$f_0^{(n)} = f_{n-1}' = F(x, f_0, f_1, ..., f_{n-1}) = F(x, f_0, f_0', ..., f_0^{(n-1)}).$$

Damit ist in der Tat $f_0 : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung n-ter Ordnung (1.2.6).

q.e.d.

Bemerkung 1.2.9. *Man begegnet auch* ***Systemen von Differentialgleichungen*** n***-ter Ordnung****. Analog zum Reduktionssatz 1.2.8 lassen sich diese ebenfalls auf ein (höherdimensionales) System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen, wie wir im nachfolgenden Beispiel sehen werden.*

Beispiel 1.2.10. Wir betrachten zwei Punktmassen m_1 und m_2 an Positionen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$. Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz ist die Schwerkraft F_{ij}, die Körper i auf Körper j ausübt gegeben durch

$$F_{ij} = G\frac{m_i m_j}{\|x_i - x_j\|^3}(x_i - x_j).$$

Hierbei bezeichnet $G \approx 6.67408 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ die Gravitationskonstante. Wirken sonst keine Kräfte auf die Punktmassen, so ist ihre Bewegung in Abhängigkeit von der Zeit nach dem zweiten Newton'schen Gesetz ($F = ma$) beschrieben durch folgendes System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung[2],

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= G\frac{m_2}{\|x_2 - x_1\|^3}(x_2 - x_1)\\
\ddot{x}_2 &= G\frac{m_1}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

Setzen wir $y_i = \dot{x}_i$ $(i = 1, 2)$, so können wir dieses System in ein (12-dimensionales[3]) System von Differentialgleichungen erster Ordnung überführen,

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1\\
\dot{x}_2 &= y_2\\
\dot{y}_1 &= G\frac{m_2}{\|x_2 - x_1\|^3}(x_2 - x_1)\\
\dot{y}_2 &= G\frac{m_1}{\|x_1 - x_2\|^3}(x_1 - x_2).
\end{aligned}$$

1.3 Lösungsverfahren

Im vorigen Abschnitt haben wir definiert, was eine Lösung einer Differentialgleichung ist. In diesem Abschnitt wollen wir für einige wichtige spezielle Typen von Differentialgleichungen Verfahren kennenlernen, mit denen man eine solche Lösung bestimmen kann. Hierzu sei allerdings schon hier gesagt, dass einerseits längst nicht jede (interessante) Differentialgleichung in eine der hier betrachteten Formen passt, und auch wenn sie von einer der hier betrachteten Formen ist, kann man die Lösung oft nicht mit Hilfe der üblichen elementaren Funktionen (wie etwa Potenz- oder Exponentialfunktionen) ausdrücken, sondern nur z.B. als ein Integral. Wann genau man eine „explizite" Lösung für eine Differentialgleichung erhalten kann, ist ein interessantes (algebraisches!) Problem, auf das wir im Rahmen dieser Vorlesung jedoch nicht näher eingehen

[2] Wir folgen hier der in der Physik üblichen Konvention, eine Ableitung nach der Zeit t durch einen Punkt statt einen Strich kenntlich zu machen.

[3] Man beachte, dass x_1 und x_2 jeweils $\mathbb{R}^3$-wertige Funktionen sind.

1.3.1 Separation der Variablen

Eine häufig vorkommende Klasse von „lösbaren"Differentialgleichungen bilden die sogenannten separablen Gleichungen.

Definition 1.3.1. Eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$y' = F(x) \cdot G(y),$$

wobei F und G jeweils auf einem nicht-entarteten Intervall stetige Funktionen seien, heißt **separabel** (alternativ: **trennbar** oder **separierbar**). Ist $F(x)$ konstant, so sprechen wir auch von einer **autonomen** Differentialgleichung.

Ein einfaches Beispiel für eine separable Gleichung (und auch dafür, wie man sie lösen kann) haben wir in Beispiel 1.1.1, genauer (2) gesehen. Wir betrachten nun den allgemeinen Fall.

Satz 1.3.2 (Separation der Variablen). *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ nicht-entartete Intervalle und seien $F : I \to \mathbb{R}$ und $G : J \to \mathbb{R}\backslash 0$ stetige Funktionen. Für $(x_0, y_0) \in I \times J$ setzen wir*

$$\widehat{F} : I \to \mathbb{R},\ \widehat{F}(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)\mathrm{d}t$$

und

$$\widehat{G} : J \to \mathbb{R},\ \widehat{G}(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{G(s)}\mathrm{d}s.$$

(i) *Sei $I' \subseteq I$ ein Intervall, so dass $x_0 \in I'$ und $\widehat{F}(I') \subseteq \widehat{G}(J)$ gelten. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y' = F(x)G(y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

eine eindeutige Lösung f auf I'. Für alle $x \in I'$ erfüllt diese

$$\widehat{G}(f(x)) = \widehat{F}(x). \tag{2}$$

(ii) *Sei $I^* \subseteq I$ ein Intervall mit $x_0 \in I^*$ und $f^* : I^* \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die $f^*(x_0) = y_0$ und $\widehat{G}(f^*(x)) = \widehat{F}(x)$ für alle $x \in I^*$ erfüllt. Weiter sei f^* auf kein größeres Teilintervall von I stetig fortsetzbar. Dann gilt für die Lösung f des Anfangswertproblems (1), dass*

$$f = f^*|_{I'}$$

*die Einschränkung von f^* auf das Intervall I' ist. Man nennt I^* das **maximale Existenzintervall** der Lösung von (1).*

Beweis.

(*i*) Zunächst bemerken wir, dass die Funktionen F und $1/G$ auf den Intervallen I bzw. J stetig sind, da G nach Voraussetzung keine Nullstellen besitzt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung garantiert somit die Existenz der Funktionen $\widehat{F}$ und $\widehat{G}$.

Eindeutigkeit: Nehmen wir zunächst an, $f : I' \to \mathbb{R}$ sei irgendeine Lösung des Anfangswertproblems (1). Dann gilt $f'(x) = F(x)G(f(x))$ für alle $x \in I'$. Wegen $G(f(x)) \neq 0$ folgt somit

$$\frac{f(x)}{G(f(x))} = F(x) \quad \text{für alle } x \in I'$$

und damit auch

$$\int_{x_0}^{x} \frac{f'(t)}{G(f(t))} \mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} F(t) \mathrm{d}t \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Nun substituieren wir $s = f(t)$ und erhalten wegen $f(x_0) = y_0$ die Beziehung

$$\widehat{G}(f(x)) = \int_{y_0}^{f(x)} \frac{1}{G(s)} \mathrm{d}s = \int_{x_0}^{x} F(t) \mathrm{d}t = \widehat{F}(x) \quad \text{für alle } x \in I',$$

also (2). Nun ist $\widehat{G}'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ für alle $y \in J$, also hat wegen der Stetigkeit von g G' auf dem gesamten Intervall dasselbe Vorzeichen. Somit ist $\widehat{G}$ auf J streng monoton (vgl. Monotoniekriterium A.5.4). Damit existiert eine eindeutige Umkehrfunktion $\widehat{G}^{-1} : \widehat{G}(J) \to J$, die selbst wieder streng monoton und stetig differenzierbar ist. Hieraus ergibt sich mit (2), dass

$$f(x) = \widehat{G}^{-1}(\widehat{F}(x)) \quad \text{für alle } x \in I'$$

gilt. Damit ist die Lösung f (1) eindeutig bestimmt, falls sie existiert.

Existenz: Wir definieren nun wie oben angedeutet

$$f : I' \to \mathbb{R}, \; f(x) = \widehat{G}^{-1}(\widehat{F}(x))$$

und überprüfen nun, dass es sich um eine Lösung von (1) handelt. Zunächst haben wir wegen $\widehat{G}(y_0) = 0$ auch $\widehat{G}^{-1}(0) = y_0$ und damit

$$f(x_0) = \widehat{G}^{-1}(\widehat{F}(x_0)) = \widehat{G}^{-1}(0) = y_0$$

wie gefordert. Wegen $\widehat{G}(f(x)) = \widehat{F}(x)$ erhalten wir nach Definition von $\widehat{G}$ und $\widehat{F}$ als Stammfunktionen von $1/G$ bzw. F die Beziehung

$$\frac{f'(x)}{G(f(x))} = \widehat{G}'(f(x))f'(x) = \widehat{F}'(x) = F(x) \quad \text{für alle } x \in I'.$$

Somit haben wir

$$f'(x) = F(x)G(f(x)),$$

so dass f in der Tat das Anfangswertproblem (1) löst.

(ii) Da $\widehat{G}$ auf dem gesamten Definitionsbereich J invertierbar ist und sicherlich $I' \subseteq I^*$ gelten muss, folgt unmittelbar $f^*(x) = f(x)$ für alle $x \in I'$ und somit die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 1.3.3. *Man beachte, dass Satz 1.3.2 KEINE Aussage darüber macht, was passiert, wenn etwa $G(y_0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist sicherlich die konstante Funktion $f : I' \to \mathbb{R}$, $f(x) = y_0$ eine Lösung des Anfangswertproblems* (1)*, eine sogenannte* ***partikuläre Lösung****. Es kann jedoch durchaus weitere Lösungen geben, z.B. wenn die uneigentlichen Integrale $\int_{y_0}^{y} 1/G(s)\mathrm{d}s$ konvergieren.*

Wir wollen nun die Schritte aus dem Beweis zu Satz 1.3.2 erneut etwas prägnanter als Lösungsverfahren formulieren.

Verfahren 1.3.4.
Gegeben: Eine separable Differentialgleichung

$$y' = F(x)G(y),$$

ggf. mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$

1. Berechne die unbestimmten Integrale
$$\int \frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y \quad \text{und} \quad \int F(x)\mathrm{d}x$$
2. Setze beide die Ergebnisse gleich – bis auf eine Integrationskonstante –
$$\int \frac{1}{G(y)}\mathrm{d}y = \int F(x)\mathrm{d}x + C$$
und löse nach y auf.
3. Bestimme das maximale Existenzintervall.
4. Bestimme ggf. C aus den Anfangsbedingungen.

Beispiel 1.3.5. *(i)* Seien $I = J = \mathbb{R}$. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = (1 + y^2)x^3, \; y(0) = 1.$$

Dieses ist offenbar separabel mit $F(x) = x^3$ und $G(y) = y^2 + 1$. Eine Stammfunktion zu $1/G(y)$ ist offenbar $\arctan(y)$, eine Stammfunktion zu $F(x)$ ist $\frac{x^4}{4}$. Laut Schritt 2 in Verfahren 1.3.4 erhalten wir nun die Gleichung

$$\arctan(y) = \frac{x^4}{4} + C.$$

Aus der Anfangsbedingung erhalten wir $C = \arctan(y(0)) = \arctan(1) = \pi/4$, so dass die Lösung des Anfangswertproblems gegeben ist durch

$$y(x) = \tan\left(\frac{x^4 + \pi}{4}\right).$$

Die maximale Umgebung des Punktes $x = 0$, in der die Funktion auf der rechten Seite stetig ist, also das maximale Existenzintervall, erhalten wir nun wir folgt: Offenbar hat unsere Lösung einen Pol, wenn $(x^4 + \pi)/4 = \pi/2$ gilt.Für $x = 0$ haben wir die Ungleichung $\pi/4 < \pi/2$, also ist das maximale Existenzintervall beschrieben durch die Ungleichung $(x^4+\pi)/4 < \pi/2$, also $x^4 < \pi$. Das maximale Existenzintervall ist somit $I^* = (-\pi^{1/4}, \pi^{1/4})$.

(ii) Als Beispiel für eine autonome Gleichung betrachten wir die logistische Gleichung mit Parameter $\lambda > 0$ (vgl. Beispiel 1.1.2)

$$y' = \lambda y(1 - y),\ y(x_0) = y_0$$

für ein $x_0 \in I = \mathbb{R}$ und ein $y_0 \in J = (0, 1)$. Man beachte, dass also $G(y) = y(1 - y)$ dann keine Nullstelle in J hat. Eine Stammfunktion von

$$\frac{1}{G(y)} = \frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}$$

ist offenbar gegeben durch $\log(y) - \log(1 - y) = \log(y/(1 - y))$. Wir erhalten somit nach unserem Verfahren 1.3.4 die Gleichung

$$\log\left(\frac{y}{1-y}\right) = \lambda x + C.$$

Für die Integrationskonstante C erhalten wir aus den Anfangsbedingungen den Wert $C = \log(y_0/(1 - y_0)) - \lambda x_0$. Für die Lösung f gilt somit

$$\frac{f(x)}{1 - f(x)} = \exp(\lambda x + C) = \frac{y_0}{1 - y_0} \exp(\lambda(x - x_0)),$$

also

$$f(x) = \frac{\frac{y_0}{1-y_0} \exp(\lambda(x - x_0)}{1 + \frac{y_0}{1-y_0} \exp(\lambda(x - x_0))}.$$

Das maximale Existenzintervall in diesem Fall ist offenbar $\mathbb{R}$. Verglichen mit Beispiel 1.1.2 ist diese die Lösung für den Fall $\alpha < 0$ in (4). Die beiden (verschiedenen!) Lösungen für $\alpha > 0$ dort erhält man mit der analogen Rechnung für die Intervalle $J = (-\infty, 0)$ und $J = (1, \infty)$.

(*iii*) Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0.$$

In diesem Fall garantiert uns Satz 1.3.2 zwar nicht die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, aber das Verfahren 1.3.4 ist trotzdem anwendbar. Wir erhalten als partikuläre Lösung einerseits die konstante Funktion $f(x) = 0$. Wenden wir Verfahren 1.3.4 für das Interval $I = (c, \infty)$ für beliebiges $c > 0$ an, so erhalten wir die Lösung

$$f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_c(x) = \begin{cases} 0, & x < c \\ (x-c)^2, & x \geq c. \end{cases}$$

Es gibt also hier überabzählbar viele verschiedene Lösungen desselben Anfangswertproblems, die alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

1.3.2 Lineare Differentialgleichungen und Variation der Konstanten

In diesem Abschnitt betrachten wir speziell lineare Differentialgleichungen.

Definition 1.3.6. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und seine $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(*i*) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y$$

nennen wir eine **homogene, lineare Differentialgleichung** erster Ordnung.

(*ii*) Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = a(x)y + b(x)$$

heißt **inhomogene** lineare Differentialgleichung.

Bemerkung 1.3.7. *Der Begriff „linear" in der Definition oben rührt daher, dass die Abbildung $L : f \mapsto f' - a(x)f$ einen linearen Operator auf dem Raum der differenzierbaren Funktionen definiert, das heißt es gilt $L(\alpha f + g) = \alpha L(f) + L(g)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und f, g differenzierbare Funktionen. Hierauf werden wir später noch sehr viel genauer eingehen.*

Eine homogene lineare Differentialgleichung ist offenbar insbesondere separabel (mit $F(x) = a(x)$ und $G(y) = y$). Wir können also durch Separation der Variablen eine Lösung finden.

Korollar 1.3.8. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $x_0 \in \mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann existiert eine eindeutige Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$y' = a(x)y, \quad y(x_0) = y_0.$$

Diese ist gegeben durch

$$f(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right).$$

Beweis. Für $y_0 \neq 0$ können wir direkt aus Satz 1.3.2 die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung folgern: Wir setzen $F(x) = a(x)$ auf dem Intervall I und $G(y) = y$ auf dem Intervall $J = (0, \infty)$ (falls $y_0 > 0$) bzw. $J = (-\infty, 0)$ (falls $y_0 < 0$). Dann liefert uns Satz 1.3.2 im ersten Fall die Beziehung

$$\log y - \log y_0 = \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t$$

und so

$$y = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right) \quad \text{mit } I' = I.$$

Im zweiten Fall erhalten wir analog aus

$$\log(-y) - \log(-y_0) = \int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t$$

dasselbe Ergebnis.

Für $y_0 = 0$ müssen wir die Eindeutigkeit neu beweisen. Nehmen wir dazu an, es gäbe eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet. Dann existiert ein $x_1 \in I$ mit $y_1 := f(x_1) \neq 0$. Damit ist f aber die (eindeutige) Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = a(x)y, \quad y(x_1) = y_1,$$

welche nach dem ersten Teil des Beweises nullstellenfrei ist. Damit haben wir einen Widerspruch und es kann keine Lösung außer der Nullfunktion geben.

q.e.d.

Aus der Lösung eines homogenen Anfangswertproblems lässt sich nun eine Lösung für ein entsprechendes inhomogenes herleiten.

Satz 1.3.9. *Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem Intervall I und seien $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann existiert für das Anfangswertproblem*

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

eine eindeutige Lösung f auf dem Intervall I. Diese ist gegeben durch

$$f(x) = f_0(x)u(x),$$

wobei für $x \in I$ gilt

$$f_0(x) := \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right),$$

f_0 ist also die nach Korollar 1.3.8 eindeutige Lösung des homogenen Anfangswertproblems

$$y' = a(x)y, \quad y(x_0) = 1, \tag{4}$$

und wir haben

$$u(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{f_0(t)}\mathrm{d}t.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die **Eindeutigkeit**: Seien y_1 und y_2 zwei Lösungen des Anfangswertproblems (3). Dann erfüllt ihre Differenz $v = y_2 - y_1$ die Differentialgleichung

$$v' = y_2' - y_1' = (a(x)y_2 + b(x)) - (a(x)y_1 + b(x)) = a(x)(y_2 - y_1) = a(x)v$$

mit Anfangsbedingung

$$v(x_0) = y_2(x_0) - y_1(x_0) = y_0 - y_0 = 0.$$

Aus Korollar 1.3.8 folgt aber sofort $v \equiv 0$, also $y_1 = y_2$.

Nun zur **Existenz**: Wie schon erwähnt ist f_0 die auf I eindeutige Lösung des homogenen Anfangswertproblems (4). Die Funktion $f(x) = f_0(x)u(x)$ erfüllt somit wie behauptet die Differentialgleichung

$$f' = f_0'u + f_0u' = a(x)f_0u + f_0\frac{b(x)}{f_0} = a(x)f + b(x)$$

und wir haben

$$f(x_0) = f_0(x_0)u(x_0) = y_0,$$

so dass f eine Lösung des betrachteten Anfangswertproblems (3) ist.

q.e.d.

Bemerkung 1.3.10. *Nimmt man f_0 als Lösung des homogenen Anfangswertproblems* (4) *an und macht den Ansatz, dass die Lösung des inhomogenen Problems* (3) *gegeben ist durch $f(x) = f_0(x)u(x)$ für irgendeine differenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}$, so ergibt sich mit derselben Rechnung wie oben*

$$f' = f_0'u + f_0u' = a(x)f_0u + f_0u' = a(x)f + b(x)$$

also müssen wir

$$f_0 u' = b \quad \Leftrightarrow u' = \frac{b}{f_0}$$

erfüllen. Man beachte hierbei, dass wir $f_0(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ haben. Zusammen mit der Anfangsbedingung

$$y_0 = f(x_0) = f_0(x_0)u(x_0) = u(x_0)$$

führt dies unmittelbar zur angegebenen Wahl der Funktion u.

Diese Herleitung motiviert den Namen „Variation der Konstanten“ für dieses Verfahren: Für $b = 0$, also das homogene Anfangswertproblem, sind alle Lösungen von der Form $y_0 f_0(x)$ für eine Konstante y_0. Man erhält die Lösung für das inhomogene Problem, indem man gewissermaßen „die Konstante variabel macht“.

Wir fassen erneut die wichtigsten Lösungsschritte dieses Verfahrens zusammen.

Verfahren 1.3.11.
Gegeben: Ein inhomogenes, lineares Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

auf einem Intervall I.

1. Bestimme die Lösung f_0 des homogenen Anfangswertproblems

   $$y' = a(x)y, \quad y(x_0) = 1,$$

   nämlich

   $$f_0(x) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} a(t)\mathrm{d}t\right).$$

2. Definiere die Funktion

   $$u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{f_0(t)}\mathrm{d}t.$$

3. Die Lösung ist gegeben durch

   $$f(x) = f_0(x)u(x).$$

Beispiel 1.3.12. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = 2x^3 y + 3x^7, \quad y(0) = y_0$$

auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$. Wie im Beweis von Satz 1.3.9 bestimmen wir zunächst die Funktion

$$f_0(x) = \exp\left(\int_0^x 2t^3 \mathrm{d}t\right) = e^{x^4/2}.$$

Hiermit erhalten wir für die Funktion $u(x)$ den Ausdruck

$$u(x) = y_0 + \int_0^x \frac{3t^7}{e^{t^4/2}}\mathrm{d}t = y_0 + 3\int_0^{x^4/2} se^{-s}\mathrm{d}s = y_0 - 3\left[(s+1)e^{-s}\right]_0^{x^4/2}$$
$$= y_0 - 3\left[\left(\frac{x^4}{2}+1\right)e^{-x^4/2} - 1\right].$$

Insgesamt ergibt sich somit die Lösung

$$f(x) = f_0(x)u(x) = (y_0+3)e^{x^4/2} - \frac{3}{2}\left(x^4+2\right).$$

Zum Abschluss betrachten wir noch ein Anwendungsbeispiel.

Beispiel 1.3.13. Ein Teich hat ein konstantes Volumen von $12 \cdot 10^6$ Litern. In diesen Teich wird aus der nahegelegenen Fabrik kontaminiertes Wasser mit einer konstanten Rate von $4 \cdot 10^6$ Litern pro Jahr eingeleitet und das (gut durchmischte) Teichwasser strömt mit derselben Rate wieder aus dem Teich aus. Die Konzentration, gemessen in Gramm pro Liter, der ungewollten Chemikalien im eingeleiteten Wasser zum Zeitpunkt t sei gegeben durch die Funktion

$$\gamma(t) = 3 + \cos(t).$$

Wie groß ist die Gesamtmasse $Q(t)$ der Chemikalien im Teich zum Zeitpunkt t, wenn das Wasser im Teich zum Zeitpunkt $t = 0$ sauber ist?

Die zeitliche Änderung $Q'(t)$ ergibt sich als Differenz aus der Zuflussrate der Chemikalien, also $4 \cdot 10^6 \cdot \gamma(t)$, und der Abflussrate, also $4 \cdot 10^6 \cdot \frac{Q(t)}{12 \cdot 10^6} = \frac{1}{3}Q(t)$. Durch Reskalierung $q(t) = Q(t)/10^6$ erhalten wir so die Differenzialgleichung

$$q' = -\frac{1}{3}q + 4\gamma(t).$$

Als Anfangsbedingung haben wir $q(0) = 0$. Dies ist wieder ein lineares, inhomogenes Anfangswertproblem, das wir wie schon gesehen lösen können: Wir bestimmen zunächst die homogene Lösung

$$q_0(t) = \exp\left(-1/3\int_0^t \mathrm{d}s\right) = e^{-t/3}.$$

Hieraus bestimmen wir die Funktion

$$u(t) = \int_0^t \frac{4\gamma(s)}{q_0(s)}\mathrm{d}s = \left[36e^{s/3} + \frac{6}{5}\left(\cos(s) + 3\sin(s)\right)e^{s/3}\right]_0^t$$
$$= 36e^{t/3} + \frac{6}{5}\left(\cos(t) + 3\sin(t)\right)e^{t/3} - \frac{186}{5}.$$

Als Lösung erhalten wir somit

$$q(t) = 36 + \frac{6}{5}\left(\cos(t) + 3\sin(t)\right) - \frac{186}{5}e^{-t/3}.$$

1.3.3 Bernoulli-Gleichungen

Lineare Differentialgleichungen und Anfangswertprobleme lassen sich, wie im vorigen Abschnitt gesehen, immer recht explizit lösen (abgesehen davon, dass die notwendigen Integrale evtl. nicht analytisch lösbar sind). Durch geeignete Transformationen lassen sich auch andere Typen von Differentialgleichungen auf lineare zurückführen und so ebenfalls lösen. Zwei solche Typen von Differentialgleichungen wollen wir hier betrachten.

Definition 1.3.14. Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem nicht-entarteten Intervall I, sowie $x_0 \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}$. Eine Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^m$$

nennen wir **Bernoulli'sche Differentialgleichung**.

Für $m = 0$ ist eine Bernoulli'sche Differentialgleichung[4]. offenbar eine inhomogene, lineare Differentialgleichung, für $m = 1$ ist sie eine homogene, lineare Differentialgleichung und kann somit mit den Methoden aus dem letzten Abschnitt gelöst werden. Für $m = 2$ und $a(x) = -b(x) = \lambda$ konstant erhalten wir als Spezialfall die logistische Gleichung (vgl. Beispiel 1.1.2 und Beispiel 1.3.5 (*ii*)). In allen übrigen Fällen haben wir folgendes Resultat.

Satz 1.3.15. *Seien $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf einem nicht-entarteten Intervall I, sowie $x_0 \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$. Zudem sei $y_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gegeben, wobei wir zusätzlich $y_0 > 0$ fordern, falls $m \notin \mathbb{Z}$. Ist f eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \quad y(x_0) = y_0 \tag{5}$$

auf einem Intervall $J \subseteq I$ mit $x_0 \in J$, so dass für alle $x \in J$ $f(x) \neq 0$ gilt, dann ist $g : J \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)^{1-m}$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = (1-m)a(x)y + (1-m)b(x), \quad y(x_0) = y_0^{1-m}. \tag{6}$$

Insbesondere ist die Lösung von (5) lokal eindeutig.

Beweis. Nach Voraussetzung ist g auf J wohldefiniert und ist dort differenzierbar. Wir erhalten somit aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= (1-m)f(x)^{-m}f'(x) \\ &= (1-m)f(x)^{-m}\left(a(x)f(x) + b(x)f(x)^m\right) \\ &= (1-m)a(x)f(x)^{1-m} + (1-m)b(x) \\ &= (1-m)a(x)g(x) + (1-m)b(x) \end{aligned}$$

[4]Diese ist nicht zu verwechseln mit der Bernoulli-Gleichung aus der Strömungsmechanik.

wobei wir im zweiten Schritt verwendet haben, dass f die Bernoulli'schen Differentialgleichung (5) erfüllt.

Da nach Annahme die Funktion $y \mapsto y^{1-m}$ in einer Umgebung von y_0 injektiv ist folgt die lokale Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (5) direkt aus der Eindeutigkeit der Lösung des linearen, inhomogenen Anfangswertproblems (6) (vgl. Satz 1.3.9).

q.e.d.

Bemerkung 1.3.16. *Die Voraussetzungen an y_0 in Satz 1.3.15 garantieren, dass die Ausdrücke y^m und y^{1-m} in einer Umgebung von y_0 eindeutig erklärbar sind. Mitunter ist dies auch für allgemeinere Situationen möglich, etwa für $m = 1/(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, wo y^m für alle $y \in \mathbb{R}$ eindeutig erklärbar ist. Die Aussage von Satz 1.3.15 bleibt dann ebenfalls gültig.*

Aus Satz 1.3.15 ergibt sich offenbar ein direktes Verfahren zur Lösung von Bernoulli'schen Differentialgleichungen.

Verfahren 1.3.17.
Gegeben: Eine Bernoulli'sches Anfangswertproblem

$$y' = a(x)y + b(x)y^m, \quad y(x_0) = y_0$$

mit den Bedingungen aus Satz 1.3.15.

1. Bestimme die eindeutige Lösung g für das inhomogene, lineare Anfangswertproblem
$$y' = (1-m)a(x)y + (1-m)b(x), \quad y(x_0) = y_0^{1-m},$$
vgl. Verfahren 1.3.11.

2. Bestimme eine Umgebung von x_0, in der $g(x) > 0$ gilt.

3. In dieser Umgebung ist $f(x) = g(x)^{1/(1-m)}$ die Lösung des Anfangswertproblems.

Beispiel 1.3.18. 1. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = y - y^3, \quad y(0) = y_0 \neq 0.$$

Wir haben es hier offenbar mit einer Bernoulli'schen Differentialgleichung mit $m = 3$ zu tun. Das entsprechende lineare Anfangswertproblem erhalten wir somit als

$$y' = -2y + 2, \quad y(0) = y_0^{-2} > 0.$$

Mit Verfahren 1.3.11 erhalten wir leicht

$$g(x) = 1 + \left(y_0^{-2} - 1\right) e^{-2x}$$

als Lösung. Für verschiedene Werte von y_0 ergeben sich so etwas unterschiedliche Lösungen für das ursprüngliche Problem.

- Sei $y_0 = 2$. Wir erhalten somit $g(x) = 1 - \frac{3}{4}e^{-2x}$. Hiermit ergibt sich für die Lösung f des ursprünglichen Anfangswertproblems $f(x) > 0$ für alle $x \in J$, wobei wir nach Definition von g $J = \left(-\frac{1}{2}\log\frac{4}{3}, \infty\right)$ wählen können, so dass wir auf diesem Intervall die eindeutige Lösung

$$f(x) = g(x)^{-1/2} = \left(\sqrt{1 - \frac{3}{4}e^{-2x}}\right)^{-1}$$

ergibt.

- Für $y_0 = -3$ haben wir $f(x) < 0$ für alle $x \in J$. Wegen $g(x) = 1 - \frac{8}{9}e^{-2x} > 0$ für $x \in \left(-\frac{1}{2}\log\frac{9}{8}, \infty\right)$, weshalb wir dieses Intervall für J wählen können. Hier erhalten wir die Lösung

$$f(x) = -g(x)^{-1/2} = -\left(\sqrt{1 - \frac{8}{9}e^{-2x}}\right)^{-1}.$$

2. Für das Anfangswertproblem

$$y' = 4y + x\sqrt{y}, \quad y(1) = \frac{1}{4}$$

erhalten wir mit $m = 1/2$ das zugehörige lineare Problem

$$y' = 2y + \frac{1}{2}x, \quad y(1) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Dieses lässt sich wieder mit Verfahren 1.3.11 lösen und wir erhalten die auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} g(x) &= e^{2(x-1)}\left(\frac{1}{2} + \int_1^x \frac{t/2}{e^{2(t-1)}}\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{2x-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}\int_1^x te^{-2t}\mathrm{d}t\right) \\ &= e^{2x-2}\left(\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}\left[-\frac{2t+1}{4}e^{-2t}\right]_1^x\right) \\ &= \frac{7}{8}e^{2x-2} - \frac{2x+1}{8} \end{aligned}$$

Auf jedem Intervall J mit $1 \in J$, in dem g keine Nullstelle besitzt, garantiert uns nun Satz 1.3.15, dass $f(x) = g(x)^2$ die eindeutige Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems ist.

Durch eine Kurvendiskussion findet man, dass die Funktion g im Punkt $x_0 = 1 - \frac{1}{2}\log 7 \approx 0.02704$ ein globales Minimum hat und dort den Wert $g(x_0) = \frac{1}{8} - \frac{3-\log 7}{8} = \frac{\log 7 - 2}{8} < 0$ annimmt. Auf dem Intervall (α, β), auf dem $g(x) < 0$ gilt, also etwa auf dem Intervall $(-0.1469, 0.1829)$, gelten zwar die Voraussetzungen, und auch die Aussage von Satz 1.3.15 NICHT, aber dennoch ist $f(x) = g(x)^2$ weiter eine Lösung des Anfangswertproblems.

Allerdings ist diese Lösung dann bei weitem nicht mehr eindeutig. So ist z.B. auch die Funktion

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \geq \beta \approx 0.1829 \\ 0 & x < \beta \end{cases}$$

eine Lösung desselben Anfangswertproblems.

1.3.4 Homogene Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt lernen wir eine weitere Klasse von Differentialgleichungen kennen. Diese lassen sich auf eine separable Differentialgleichung zurückführen und so lösen.

Definition 1.3.19. Für ein Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ sei $F : J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann heißt eine Differentialgleichung von der Form

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

eine **homogene** Differentialgleichung.

Satz 1.3.20. *Sei $F : J \to \mathbb{R}$ stetig auf einem Intervall $J \subseteq \mathbb{R}$ und seien $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass $\frac{y_0}{x_0} \in J$ und $F\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0}$ gilt. Dann besitzt das (homogene) Anfangswertproblem*

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0 \tag{7}$$

auf einem geeigneten Intervall $I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine eindeutige Lösung $f : I \to \mathbb{R}$. Diese ist gegeben durch $f(x) = xg(x)$, wo g die auf I eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{F(y) - y}{x}, \qquad y(x_0) = \frac{y_0}{x_0} \tag{8}$$

ist.

Beweis. Sei f eine Lösung des Anfangswertproblems (7) und setze $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. Dann haben wir

$$g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2} = \frac{F(f(x)/x)x - xg(x)}{x^2} = \frac{F(g(x)) - g(x)}{x}$$

und $g(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$, so dass g in der Tat eine Lösung des Anfangswertproblems (8) ist.

Ist umgekehrt $g(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (8) und setzen wir $f(x) = xg(x)$, so ergibt sich

$$f'(x) = g(x) + xg'(x) = g(x) + F(g(x)) - g(x) = F\left(\frac{f(x)}{x}\right)$$

und offenbar $f(x_0) = y_0$, so dass f dann eine Lösung von (7) ist.

Die Differentialgleichung in (8) ist nun offenbar separabel, also existiert nach Satz 1.3.2 auf einem geeigneten Intervall I eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. Man beachte hierbei die Voraussetzungen an F.

q.e.d.

Auch hier formulieren wir den Beweis noch einmal als Lösungsverfahren für homogene Differentialgleichungen.

Verfahren 1.3.21.
Gegeben: Ein homogenes Anfangswertproblem

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad y(x_0) = y_0$$

mit den Voraussetzungen in Satz 1.3.20.

1. Löse das separable Anfangswertproblem

   $$y' = \frac{F(y) - y}{x}, \quad y(x_0) = \frac{y_0}{x_0}$$

   wie in Verfahren 1.3.4. Die Lösung sei $g : I \to \mathbb{R}$ für ein geeigentes Intervall I.

2. Die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xg(x)$ ist die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems.

Beispiel 1.3.22. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 1, \quad y(1) = 0.$$

Die Differentialgleichung ist offenbar homogen. Das Intervall J wählen wir als $J = \mathbb{R}$. Wie in Verfahren 1.3.21 beschrieben betrachten wir das separable Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y^2 + 1}{x}, \quad y(1) = 0.$$

Für dieses finden wir mit Verfahren 1.3.4 die implizite Lösung

$$\arctan(y) = \log x,$$

also haben wir auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ die eindeutige Lösung

$$g(x) = \tan(\log x).$$

Die Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems ist damit

$$f(x) = xg(x) = x \tan(\log x).$$

1.3.5 Exakte Differentialgleichungen

Als letzte Klasse spezieller Differentialgleichungen, für die wir Lösungsverfahren angeben, wollen wir nun noch exakte Gleichungen studieren.

Definition 1.3.23. Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $F : I \times J \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x, y) = \partial_y F(x, y) y' + \partial_x F(x, y) = 0$$

heißt **exakte Differentialgleichung**.

In dieser Form ist es nicht weiter schwierig als implizite Lösung $F(y, x) = c$ für eine geeignete Konstante c anzugeben. Meist liegt eine exakte Differentialgleichung eher in der Form

$$G(x, y)y' + H(x, y) = 0$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen G, H vor. Eine solche Gleichung muss man zunächst als exakt erkennen.

Satz 1.3.24. *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $G, H : I \times J \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann ist die Differentialgleichung*

$$G(x, y)y' + H(x, y) = 0$$

genau dann exakt, wenn

$$\partial_x G = \partial_y H$$

gilt.

Insbesondere besitzt eine solche Differentialgleichung eine Lösung auf einem geeigneten Intervall $I_0 \subseteq I$.

Beweis. Die Aussage über die Existenz einer Lösung einer exakten Differentialgleichung folgt unmittelbar aus der Bemerkung vor dem Satz. Wir zeigen also nun das angegebene Kriterium.

Wenn die Differentialgleichung exakt ist, so existiert eine differenzierbare Funktion $F : I \times J \to \mathbb{R}$ mit $\partial_y F = G$ und $\partial_x F = H$. Da G und H nach Voraussetzung stetig differenzierbar sind kann man nach dem Satz von Schwarz (siehe Satz A.5.11) die partiellen Ableitungen vertauschen und erhält

$$\partial_x G = \partial_x \partial_y F = \partial_y \partial_x F = \partial_y H.$$

Gilt nun umgekehrt die Gleichung

$$\partial_x G = \partial_y H,$$

so können wir für jedes feste $x \in I$ die Funktion

$$F(x, y) := Q(x, y) + C(x)$$

betrachten, wobei $Q(x, y) := \int_{y_0}^{y} G(x, v)\mathrm{d}v$ für ein fest gewähltes $y_0 \in J$ gelte und $C(x)$ eine zunächst beliebige Konstante ist, die aber vom vorher gewählten Punkt x abhängt. In jedem Fall ergibt sich $\partial_y F = G$. Es bleibt zu zeigen, dass wir $C(x)$ so wählen können, dass $\partial_x F = H$ gilt. Insbesondere muss dazu F und damit C in x partiell differenzierbar sein. Es muss dann offenbar gelten

$$C'(x) = H(x, y) - \partial_x Q(x, y). \tag{9}$$

Augenscheinlich hängt die rechte Seite von y ab, allerdings gilt

$$\begin{aligned} \partial_y (H - \partial_x Q) &= \partial_y H - \partial_y \partial_x Q \\ &= \partial_y H - \partial_x \partial_y Q \\ &= \partial_y H - \partial_x G \\ &= 0. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir wieder den Satz von Schwarz (siehe Satz A.5.11) verwendet, nach dem man wegen der stetigen Differenzierbarkeit von G und damit von Q die partiellen Ableitungen vertauschen kann. Wir sehen also, dass die rechte Seite von (9) tatsächlich nicht von y abhängt. In x definiert sie eine stetige Funktion, also können wir die Funktion C nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit den gewünschten Eigenschaften finden und der Beweis ist vollständig.

q.e.d.

Bemerkung 1.3.25. *Die Aussage von Satz 1.3.24 gilt allgemeiner genau so auch dann, wenn man stetig differenzierbare Funktionen $G, H : D \to \mathbb{R}$ für ein* ***einfach zusammenhängendes***[5] *Gebiet $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zulässt. Die Beweisidee ist dann im Prinzip ähnlich, aber formal aufwändiger.*

Ist $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ irgendein Gebiet, so ist die Bedingung $\partial_y G = \partial_x H$ notwendig für Exaktheit, aber im Allgemeinen nicht mehr hinreichend.

Der Beweis von Satz 1.3.24 gibt wieder ein direktes Verfahren zur Lösung exakter Differentialgleichungen an, das wir nun erneut explizit formulieren wollen.

Verfahren 1.3.26.
Gegeben: Eine Differentialgleichung der Form

$$G(x, y)y' + H(x, y) = 0,$$

ggf. mit Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$.

1. Prüfe das Kriterium für Exaktheit,
$$\partial_x G = \partial_y H.$$
2. Bestimme eine Stammfunktion $Q(x, y)$ von $G(x, y)$ in y (integriere in y bei konstantem x).
3. Bestimme eine Funktion $C(x)$ als Stammfunktion von $H - \partial_x Q$ (unabhängig von y, , vgl. (9)).
4. Setze $F(x, y) = Q(x, y) + C(x)$ und löse ggf. $F(x, y) = c$ für eine geeignete Konstante c. nach y auf. Bei gegebenen Anfangsbedingungen $y(x_0) = y_0$ setze $c = F(x_0, y_0)$.

Beispiel 1.3.27. Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 - 3xy - y - 2\right)y' + \frac{2}{3}x^3y^3 - xy^3 - \frac{3}{2}y^2 - 5x^4 = 0.$$

Mit $G(x, y) = \frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{3}{2}x^2y^2 - 3xy - y - 2$ und $H(x, y) = \frac{2}{3}x^3y^3 - xy^3 - \frac{3}{2}y^2 - 5x^4$ finden wir zunächst direkt

$$\partial_x G(x, y) = 2x^3y^2 - 3xy^2 - 3y = \partial_y H(x, y),$$

die Differentialgleichung ist also nach Satz 1.3.24 exakt.

Eine „Stammfunktion“ in y von G ist offenbar gegeben durch

$$Q(x, y) = \frac{1}{6}x^4y^3 - \frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{3}{2}xy^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y.$$

[5] Anschaulich gesprochen ein Gebiet ohne „Löcher“.

Damit ergibt sich

$$H(x,y) - \partial_x Q(x,y) = \left(\frac{2}{3}x^3y^3 - xy^3 - \frac{3}{2}y^2 - 5x^4\right) - \left(\frac{2}{3}x^3y^3 - xy^3 - \frac{3}{2}y^2\right) = -5x^4.$$

Erwartungsgemäß ist dieser Ausdruck unabhängig von y und wir können mit $C(x) = -x^5$ direkt eine Stammfunktion bestimmen.

Wir erhalten somit für $c \in \mathbb{R}$ die implizite Lösung

$$Q(x,y) + C(x) = \frac{1}{6}(x^4 - 3x^2)y^3 + \frac{1}{2}(1-3x)\,y^2 - 2y - x^5 = c.$$

Bemerkung 1.3.28. *Prinzipiell lassen sich auch viele nicht exakte Differentialgleichungen auf exakte zurückführen. Man multipliziert hierzu die gegebene Differentialgleichung $G(x,y)y' + H(x,h) = 0$ mit einer geeigneten Funktion $\mu(x,y)$, einem so genannten **Integrationsfaktor**, so dass die neue Differentialgleichung*

$$\mu(x,y)G(x,y)y' + \mu(x,y)H(x,y) = 0$$

*exakt ist. Aus der Exaktheitsbedingung in Satz 1.3.24 ergibt sich dann, dass μ eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung***

$$G\partial_x\mu - H\partial_y\mu + (\partial_x G - \partial_y H)\mu = 0$$

genügen muss. Im Allgemeinen sind partielle Differentialgleichungen allerdings sehr viel schwieriger zu lösen als die gewöhnlichen Differentialgleichungen, die wir in diesem Kurs betrachten, so dass dies kein effektives allgemeines Lösungsverfahren darstellt. Manchmal kann man allerdings einen geeigneten Integrationsfaktor „raten“ und dann mit Verfahren 1.3.26 die Gleichung lösen.

Beispiel 1.3.29. Wie man leicht überprüft, ist die Differentialgleichung

$$(x^2 + xy)y' + (3xy + y^2) = 0$$

NICHT exakt, kann also nicht direkt mittels des Verfahrens 1.3.26 gelöst werden. Wir wollen nun einen Integrationsfaktor $\mu(x,y)$ bestimmen. Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst an, dass μ unabhängig von y ist, also $\partial_y\mu = 0$. Dann muss μ eine Lösung der *gewöhnlichen* Differentialgleichung

$$(x^2 + xy)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mu + (2x + y - 3x - 2y)\mu = (x^2 + xy)\mu' - (x+y)\mu = 0$$

sein. Dies können wir weiter vereinfachen zu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mu = \frac{1}{x}\mu.$$

Diese Differentialgleichung ist offenbar separabel und kann durch Verfahren 1.3.4 gelöst werden, oder man sieht direkt die Lösung $\mu(x) = x$.

Multiplizieren wir also unsere ursprüngliche Gleichung mit $\mu(x) = x$, so erhalten wir

$$(x^3 + x^2y)y' + (3x^2y + xy^2) = 0.$$

Wegen

$$\partial_x(x^3 + x^2y) = 3x^2 + 2xy = \partial_y(3x^2y + xy^2)$$

ist diese Gleichung nach Satz 1.3.24 exakt und wir können Verfahren 1.3.26 verwenden: Wir bestimmen eine Stammfunktion in y von x^3+x^2y, etwas $Q(x,y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2$. Dann bestimmen wir $C(x)$ als eine Stammfunktion von

$$\partial_x Q(x,y) - (3x^2y + xy^2) = 0,$$

also ist $C(x)$ eine Konstante, die wir als 0 wählen können. Wir erhalten somit für $c \in \mathbb{R}$ die implizite Lösung

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c$$

für die mit μ multiplizierte Gleichung. Durch direktes Einsetzen ergibt sich, dass dies auf einem Intervall, dass $x = 0$ nicht enthält, auch eine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung ergibt.

Wir bemerken zum Abschluss, dass unsere vereinfachende Annahme $\partial_y\mu = 0$ hier zwar zum Ziel führt, dies aber im Allgemeinen nicht der Fall zu sein braucht.

1.4 Erste qualitative Aussagen

1.4.1 Autonome Gleichungen

Von besonderem Interesse in vielen Anwendungen sind autonome Differentialgleichungen, also Differentialgleichungen der Form

$$y' = G(y)$$

für eine stetige Funktion G auf einem geeigneten Intervall J (vgl. Definition 1.3.1). Diese Gleichungen sind insbesondere separabel, lassen sich also prinzipiell mit Verfahren 1.3.4 lösen, insbesondere haben wir mit Satz 1.3.2 eine Existenz-und Eindeutigkeitsaussage für die Lösung. Allerdings ist es nicht immer möglich, Lösungen explizit anzugeben. Wir wollen hier untersuchen, welche Information über die Lösung man aus der Differentialgleichung erhält, ohne die Lösung direkt zu kennen.

Ein wichtiges Resultat in diesem Zusammenhang ist der folgende Satz.

Satz 1.4.1. *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und sei $G : J \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung auf einem geeigneten Intervall I. Dann ist f auf I entweder monoton wachsend oder monoton fallend.*

Beweis. Nehmen wir an, die Lösung f sei nicht monoton. Dann können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass f im Inneren von I ein lokales Maximum annimmt (für ein lokales Minimum verläuft die Argumentation analog). Es gibt also $a, b, x_0 \in I$ mit $a < x_0 < b$ und $f(x_0) \geq \max\{f(a), f(b)\}$. Tatsächlich können wir sogar $f(x_0) > \max\{f(a), f(b)\}$ annehmen, sonst wäre f konstant und damit monoton, im Widerspruch zur Annahme.

Nun gibt es $a_1 < b_1 \in [a, b]$, so dass $f(a_1) = f(b_1)$ gilt: Gilt schon $f(a) = f(b)$, so sind wir fertig. Gilt $f(a) < f(b)$, so folgt wegen der Stetigkeit von f aus dem Zwischenwertsatz (vgl. Satz A.4.5), dass es ein $a_1 \in (a, x_0)$ gibt mit $f(a_1) = f(b)$ und wir können $b_1 = b$ wählen. Gilt Umgekehrt $f(a) > f(b)$, so folgt genauso, dass ein $b_1 \in (x_0, b)$ existiert mit $f(b_1) = f(a)$ und wir können $a_1 = a$ wählen.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (vgl. Satz A.5.3) folgt nun wegen der Differenzierbarkeit von f, dass ein $x_* \in (a_1, x_0)$ existiert, so dass

$$f'(x_*) = \frac{f(x_0) - f(a_1)}{x_0 - a_1} > 0$$

gilt. Nach dem Zwischenwertsatz finden wir nun wiederum ein $x^* \in [x_0, b_1]$ mit $f(x_*) = f(x^*)$. Wir können nun x^* maximal mit dieser Eigenschaft wählen, ansonsten gäbe es eine monoton wachsende Folge $(x_n^*)_n$ von solchen Lösungen, die streng monoton wächst. Gleichzeitig ist diese Folge aber nach oben durch b_1 beschränkt, also konvergiert sie gegen einen Grenzwert $\tilde{x} \leq b_1$ (vgl. Satz A.1.4). Wegen der Stetigkeit von f ergibt sich auch hier $f(\tilde{x}) = f(x_*)$, also wäre $\tilde{x}$ die maximale Lösung. Sei also x^* maximal mit der gewünschten Eigenschaft. Dann folgt aber für alle $x^* < x \leq c_1$ auch $f(x) < f(x^*)$, also gilt

$$f'(x^*) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \leq 0.$$

Aus der Differentialgleichung erhalten wir nun

$$0 < f'(x_*) = G(f(x_*)) = G(f(x^*)) = f'(x^*) \leq 0$$

und somit einen Widerspruch zu unserer ursprünglichen Annahme, dass f nicht monoton ist.

q.e.d.

Beispiel 1.4.2. Betrachten wir die autonome Differentialgleichung

$$y' = y(1 - y^2).$$

Offenbar ist die Funktion $G : y \mapsto y(1 - y^2)$ für $y \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$ positiv, und wir haben $G(y) < 0$ für $y \in (-1, 0) \cup (1, \infty)$.

Es folgt also mit Satz 1.4.1, dass jede Lösung dieser Differentialgleichung, die Werte in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ annimmt, monoton wachsend ist, während Lösungen mit Werten in $(-1, 0) \cup (1, \infty)$ monoton fallen.

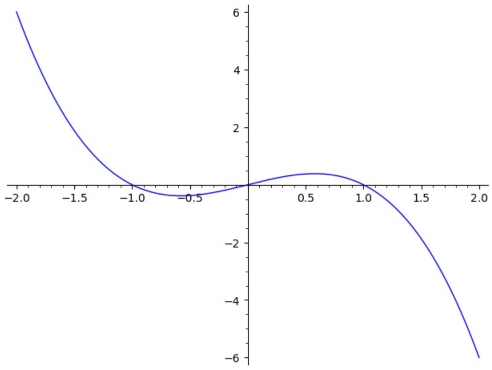

Abbildung 1.3: Der Graph von $G(y) = y(1 - y^2)$

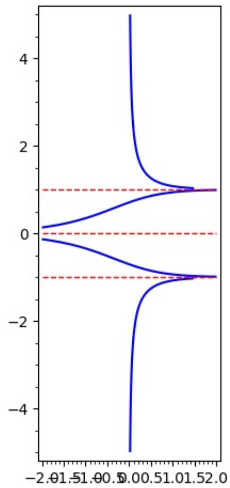

Abbildung 1.4: Qualitatives Verhalten der Lösung von $y' = y(1 - y^2)$.

Mittels Verfahren 1.3.4 lässt sich diese Differentialgleichung lösen und man erhält als implizite Lösung

$$\frac{|y|}{\sqrt{|y^2 - 1|}} = e^x,$$

wobei das maximale Existenzintervall für jeden Anfangswert $y(0) \notin \{-1, 0, 1\}$ ganz $\mathbb{R}$ ist.

Wir wollen nun Systeme von autonomen Gleichungen untersuchen, also Systeme der Form

$$y' = G(y)$$

für eine stetige Funktion $G : D \to \mathbb{R}^n$ für eine nichtleere, offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Im Folgenden wollen wir annehmen, dass die Funktion G „*hinreichend gutartig*" ist, so dass wir für jede Anfangsbedingung $y(0) = z$ für $z \in D$ garantieren können, dass es eine eindeutige Lösung des entsprechenden Anfangswertproblems gibt, die auf einem maximalen

Intervall definiert ist, d.h. die Lösung kann auf kein größeres Intervall fortgesetzt werden. Wir werden später sehen, dass dies etwa dann der Fall ist, wenn F auf D stetig partiell differenzierbar ist (vgl. Lemma 2.1.12 und Satz 2.1.21), aber auch unter allgemeineren Voraussetzungen.

Definition 1.4.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $G : D \to \mathbb{R}^n$ hinreichend gutartig im oben erklärten Sinn. Weiter sei $z \in D$.

(*i*) Die (eindeutig bestimmte) Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(y), \quad y(0) = z$$

bezeichnen wir mit $\Phi(x; z)$ und nennen sie auch den **lokalen Fluss** des Vektorfeldes G durch z. Das maximale Existenzintervall der Lösung bezeichnen wir mit $I_{max}(z)$.

(*ii*) Unter der **Lösungsbahn** oder **Trajektorie** durch z verstehen wir die Menge

$$\{\Phi(x; z) \,:\, x \in I_{max}(z)\}.$$

(*iii*) Wir nennen z einen **stationären Punkt** der Differentialgleichung, falls $\Phi(x; z) = z$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, wenn die Lösung also eine konstante Funktion in x ist.

Bemerkung 1.4.4. (*i*) *Es gilt, dass $z \in D$ genau dann ein stationärer Punkt der Differentialgleichung $y' = G(y)$ ist, wenn $G(z) = 0$ gilt.*

(*ii*) *Es bedeutet keine Einschränkung, in Definition 1.4.3 den Anfangspunkt $x = 0$ zu bevorzugen. Genauer ist für $x_0 \in \mathbb{R}$ die Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = G(y), \quad y(x_0) = z$$

gegeben durch $\Phi(x - x_0; z)$.

Beweis.

(*i*) Ist $\Phi(x; z) = z$ konstant, so folgt $\partial_x \Phi(x; z) = 0 = F(z)$. Ist umgekehrt $G(z) = 0$, so ist sicher die konstante Funktion $x \mapsto z$ eine Lösung des Anfangswertproblems, wegen der Annahme der Eindeutigkeit der Lösung folgt daher $\Phi(x; z) = z$ und z ist ein stationärer Punkt.

(*ii*) Nach Voraussetzung gilt

$$\partial_x \Phi(x; z) = G(\Phi(x; z)).$$

Nach der Kettenregel folgt nun

$$\partial_x \Phi(x - x_0; z) = G(\Phi(x - x_0; z)),$$

also ist $g(x) := \Phi(x - x_0; z)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = G(y)$. Außerdem gilt $g(x_0) = \Phi(0; z) = z$, also löst g auch das betrachtete Anfangswertproblem.

q.e.d.

Eine wichtige Frage im Kontext autonomer Gleichungen ist immer das maximale Existenzintervall einer Lösung. Hierzu gibt es folgendes Resultat, dessen Beweis wir jedoch vorerst zurückstellen müssen. Die Behauptung folgt direkt aus einem allgemeinen Satz (Satz 2.1.19) über die Fortsetzbarkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen.

Satz 1.4.5. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $G : D \to \mathbb{R}^n$ auf D stetig partiell differenzierbar, sowie $z \in D$. Weiter existiere eine kompakte Menge $K \subset D$, so dass für alle $x \in I_{max}(z)$ mit $x \geq 0$ (bzw. $x \leq 0$) $\Phi(x, z) \in K$ gilt. Dann folgt*

$$I_{max}(z) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$$

(bzw. $I_{max}(z) \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$).

Einige weitere wichtige Eigenschaften von Trajektorien autonomer Gleichungen fassen wir in folgender Proposition zusammen.

Proposition 1.4.6. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $G : D \to \mathbb{R}^n$ hinreichend gutartig wie in Definition 1.4.3. Dann sind folgende Aussagen wahr.*

(*i*) *Für alle $z \in D$ gilt $\Phi(0; z) = z$ und*

$$\Phi(x_1 + x_2; z) = \Phi(x_1; \Phi(x_2; z))$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, für die die rechte Seite existiert bzw. für die sowohl $\Phi(x_1 + x_2; z)$ als auch $\Phi(x_2; z)$ existieren. ***(Lokale Halbgruppeneigenschaft)***

(*ii*) *Verschiedene Trajektorien sind disjunkt: Existieren $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $z_1, z_2 \in D$, so dass $\Phi(x_1; z_1) = \Phi(x_2; z_2)$ gilt, so folgt $z_2 = \Phi(x_1 - x_2; z_1)$. Somit liegen z_1 und z_2 in derselben Trajektorie.*

(*iii*) *Existiert ein $\omega \neq 0$ und ein $z \in D$ mit $\Phi(\omega; z) = z$, so existiert $\Phi(x; z)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt $\Phi(x + \omega; z) = \Phi(x; z)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung ist daher periodisch und die Trajektorie geschlossen.*

Beweis.

(*i*) Dass $\Phi(0; z) = z$ gilt, folgt aus der Anfangsbedingung in Definition 1.4.3. Wie im Beweis zu Bemerkung 1.4.4 folgt, dass $\Phi(x + x_2; z)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = G(y)$ ist und für $x = 0$ ist der Anfangswert $\Phi(x_2; z)$. Damit folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit der Lösung.

(*ii*) Man rechnet mit Teil (*i*) direkt nach, dass gilt

$$z_2 = \Phi(0; z_2) = \Phi(-x_2; \Phi(x_2; z_2)) = \Phi(-x_2; \Phi(x_1, z_1)) = \Phi(x_1 - x_2; z_1),$$

wie behauptet.

(*iii*) Nehmen wir ohne Einschänkung $\omega > 0$ an. Dann gilt für alle $x \in [0, \omega]$ nach Teil (*i*)

$$\Phi(x; z) = \Phi(x; \Phi(\omega; z)) = \Phi(x + \omega; z).$$

Auf diese Weise können wir $\Phi(x; z)$ auch für alle $x \in [0, 2\omega]$ erklären. Mit Induktion erhält man direkt, dass sich für jedes $m \in \mathbb{N}$ auf dieselbe Weise $\Phi(x; z)$ auf dem Intervall $[0, m \cdot \omega]$ definieren lässt, und damit für alle $x \geq 0$.

Für $x \in [\omega, 2\omega]$ gilt außerdem

$$\Phi(x - \omega; z) = \Phi(x - \omega; \Phi(\omega; z)) = \Phi(x; z),$$

also ergibt sich wieder mit Induktion auch die Fortsetzung der Lösung für alle $x \leq 0$, was wir behauptet hatten.

q.e.d.

Beispiel 1.4.7. Betrachten wir die autonome Gleichung

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 - (y_1^2 + y_2^2)y_1 \\ y_1 + y_2 - (y_1^2 + y_2^2)y_2 \end{pmatrix}$$

auf $D = \mathbb{R}^2$. Man verifiziert leicht durch Einsetzen, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

eine Lösung dieser Gleichung ist. Die entsprechende Trajektorie ist demnach klarerweise die Einheitskreislinie. Wählen wir nun einen Startwert z innerhalb des Einheitskreises, so kann die zugehörige Trajektorie die Einheitskreislinie nach Proposition 1.4.6 nicht schneiden, verläuft also innerhalb der kompakten Einheitskreisscheibe $K = \{y : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\}$. Dann folgt aber sofort mit Satz 1.4.5, dass das maximale Existenzintervall $I_{max}(z)$ der Lösung ganz $\mathbb{R}$ sein muss. Wir haben also das maximale Existenzintervall einer Lösung bestimmen können, ohne diese Lösung explizit zu kennen.

In Abbildung 1.5 sehen wir die Trajektorien für die Anfangswerte $z = (1/4, 0)$ (blau), $z = (1, 0)$ (schwarz, die Einheitskreislinie) und $z = 3/2$ (rot).

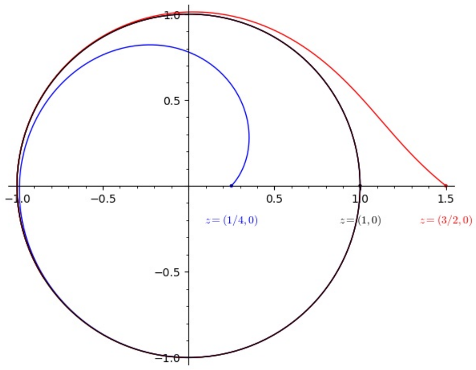

Abbildung 1.5: Trajektorien von Lösungen für verschiedene Startwerte z.

1.4.2 Vergleich von Lösungen

In Beispiel 1.2.7 haben wir mit der Pendelgleichung

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$

eine Differentialgleichung kennengelernt, die sich nicht explizit Lösen lässt. Indem wir die Annäherung $\sin(\theta) \approx \theta$ für kleine Winkel θ verwendet haben, haben wir eine leicht veränderte Differentialgleichung

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

erhalten, die wir explizit lösen konnten. Intuitiv ist es wenig überraschend, dass man mit einem solchen Vorgehen auch die Lösung der eigentlichen Differentialgleichung approximiert, jedenfalls in einem gewissen Bereich. In diesem Abschnitt wollen wir systematisch untersuchen, inwieweit man Lösungen verschiedener Differentialgleichungen bzw. Anfangswertprobleme vergleichen kann.

Satz 1.4.8. *Sei $I = [x_0, b)$ ein halboffenes Intervall, wobei wir $b = \infty$ zulassen, und $J \subseteq \mathbb{R}$ ein beliebiges (nicht-leeres) Intervall. . Weiter seien $F, G : I \times J \to \mathbb{R}$ Funktionen und es existiere eine Konstante $L \geq 0$, so dass gilt*

$$F(x, y) - G(x, z) \geq -L|y - z| \quad \text{für alle } x \in I,\ y, z \in J.$$

Weiter seien $y_0, z_0 \in J$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der Anfangswertprobleme

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

bzw.

$$z' = G(x, z), \quad z(x_0) = z_0$$

und es gelte $f(I), g(I) \subseteq J$.

(i) Gilt $y_0 > z_0$, so folgt $f(x) > g(x)$ für alle $x \in I$.

(ii) Gilt $y_0 \geq z_0$, so folgt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis.

(*i*) Es sei $y_0 > z_0$ und wir nehmen an, die Behauptung wäre falsch. Dann gibt es einen Punkt $x^* \in (x_0, b)$ mit $f(x^*) - g(x^*) = 0$. Wir können x^* als minimale Nullstelle wählen, was wir im Folgenden auch tun: Wegen der Stetigkeit von f und g gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) - g(x) > 0$ für alle $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$ gilt. Gäbe es kleine minimale Nullstelle von $f - g$, so gäbe es eine monoton fallende Folge von Nullstellen $(x_n^*)_n$ mit $x_n^* \geq x_0 + \varepsilon$. Damit ist aber $(x_n^*)_n$ konvergent gegen einen Grenzwert $\geq x_0 + \varepsilon$ (vgl. Satz A.1.4) und wegen der Stetigkeit von $f - g$ ist dieser Grenzwert wiederum eine Nullstelle (vgl. Satz A.4.3) und damit die minimale solche.

Für alle $x \in [x_0, x^*]$ gilt dann offenbar

$$f'(x) - g'(x) = F(x, f(x)) - G(x, g(x)) \geq -L|f(x) - g(x)| = -L(f(x) - g(x)).$$

Damit folgt auch

$$\left[e^{Lx}(f(x) - g(x))\right]' = e^{Lx}\left[(f'(x) - g'(x)) + L(f(x) - g(x))\right] \geq 0.$$

Für $x = x^*$ erhalten wir

$$0 \leq \int_{x_0}^{x^*} \left[e^{Lx}(f(x) - g(x))\right]' \mathrm{d}x = e^{Lx^*}(f(x^*) - g(x^*)) - e^{Lx_0}(y_0 - z_0).$$

Wir erhalten somit

$$f(x^*) - g(x^*) \geq e^{L(x_0 - x^*)}(y_0 - z_0) > 0,$$

im Widerspruch zu unserer Annahme $f(x^*) - g(x^*) = 0$.

(*ii*) Wir haben nur den Fall $y_0 = z_0$ zu betrachten. Gibt es nun ein $x^* \in I$, so dass $f(x^*) < g(x^*)$ gilt, so existiert wieder aufgrund der Stetigkeit von f und g ein Intervall $[\tilde{x}, x^*]$ mit $f(\tilde{x}) - g(\tilde{x}) = 0$ und $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (\tilde{x}, x^*]$. Wie oben erhalten wir für alle $x \in [\tilde{x}, x^*]$ die Abschätzung

$$f'(x) - g'(x) = F(x, f(x)) - G(x, g(x)) \geq -L|f(x) - g(x)| = L(f(x) - g(x)),$$

und so auch

$$\left[e^{-Lx}(f(x) - g(x))\right]' = e^{-Lx}\left[f'(x) - g'(x) - L(f(x) - g(x))\right] \geq 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\tilde{x}}^{x^*} \left[e^{-Lx}(f(x) - g(x))\right]' \mathrm{d}x &= e^{-Lx^*}(f(x^*) - g(x^*)) - e^{L\tilde{x}}(f(\tilde{x}) - g(\tilde{x})) \\ &= e^{-Lx^*}(f(x^*) - g(x^*)), \end{aligned}$$

Im Widerspruch zu unserer Annahme $f(x^*) < g(x^*)$.

q.e.d.

Bemerkung 1.4.9. *Die Bedingung*

$$F(x,y) - G(x,z) \geq -L|y-z|$$

in Satz 1.4.8 mag hier etwas willkürlich erscheinen. Sie wird uns im Wesentlichen in Abschnitt 2.1 als ***Lipschitz-Bedingung*** *wiederbegegnen und ist eine essentielle Bedingung, wenn man allgemein die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen diskutiert. Dort, genauer in Lemma 2.1.12, werden wir auch sehen, dass diese Bedingung im Wesentlichen etwa dann (lokal) erfüllt ist, wenn F oder G stetig differenzierbar sind.*

Wir erhalten hiermit direkt folgendes Resultat.

Korollar 1.4.10. *Sei $I = [x_0, b)$ ein halboffenes Intervall, wobei wir $b = \infty$ zulassen, und sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall. Weiter seien $F, G : I \times J \to \mathbb{R}$ Funktionen, von denen eine stetig differenzierbar sei und es gelte außerdem*

$$F(x,y) \geq G(x,y) \quad \text{für alle } x \in I,\ y \in J.$$

Weiter seien $y_0, z_0 \in J$ und $f, g : I \to \mathbb{R}$ Lösungen der Anfangswertprobleme

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

bzw.

$$z' = G(x,z), \quad z(x_0) = z_0$$

und es gelte $f(I), g(I) \subseteq J$.

(i) Gilt $y_0 > z_0$, so folgt $f(x) > g(x)$ für alle $x \in I$.

(ii) Gilt $y_0 \geq z_0$, so folgt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$.

Beispiel 1.4.11. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + \sin(y), \quad y(0) = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich nicht mehr mit den üblichen Verfahren lösen, selbst Computeralgebra-Systeme wie Mathematica oder Sage kommen hier an ihre Grenzen. Man kann jedoch zeigen, dass für alle $x \geq 0$ eine eindeutige Lösung dieses Anfangswertproblems existiert.

Betrachten wir die Anfangswertprobleme

$$y' = x^2 + 1, \quad y(0) = 0$$

und

$$z' = x^2 - 1, \quad z(0) = 0.$$

Diese haben offenbar die eindeutigen Lösungen $g_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$ und $g_2(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$. Wegen $-1 \leq \sin(y) \leq 1$ folgt also mit Korollar 1.4.10 sofort die Abschätzung

$$\frac{1}{3}x^3 - x \leq f(x) \leq \frac{1}{3}x^3 + x \quad \text{für alle } x \geq 0.$$

In Abbildung 1.6 sehen wir eine Illustration dieser Abschätzung. Die Funktion f wurde hierfür mittels numerischer Methoden angenähert, die wir im folgenden Abschnitt kurz diskutieren werden.

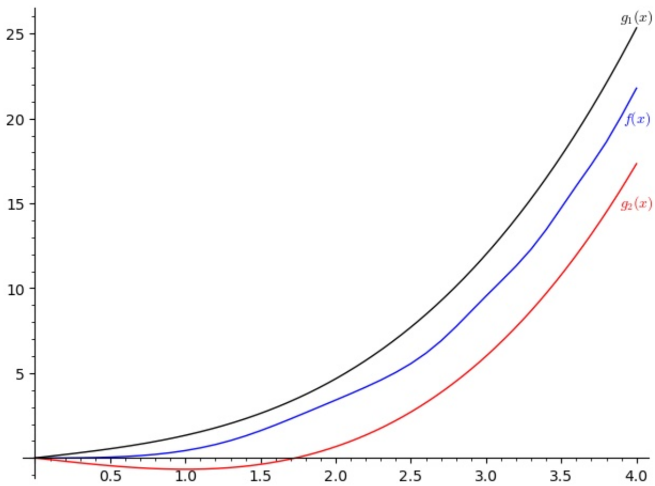

Abbildung 1.6: Vergleich der Lösungen verschiedener Anfangswertprobleme

1.5 Approximationsverfahren

Wie wir schon des Öfteren erwähnt haben, lassen sich die meisten Differentialgleichungen nicht mehr explizit lösen. Dennoch benötigt man häufig etwa für Anwendungen wenigstens eine hinreichend gute Approximation einer Lösung. In diesem Abschnitt wollen wir zwei solche Verfahren kurz diskutieren.

1.5.1 Eulers Polygonzug-Verfahren

Das Euler'sche Polygonzug-Verfahren basiert auf der Grundidee, sich differenzierbare Funktionen lokal durch Geraden approximieren lassen: Auf einem genügend kleinen Intervall $[x_0, x_0 + h]$ gilt

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0). \tag{1}$$

Ist nun f die Lösung eines Anfangswertproblems

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

so können wir (1) auch schreiben als

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0)F(x_0, y_0),$$

wobei wir die rechte Seite nun problemlos auswerten können. Dies lässt sich nun auf dem nächsten Intervall entsprechend wiederholen.

Verfahren 1.5.1 (Euler-Verfahren).
Gegeben: Ein Anfangswertproblem

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

und eine feste Schrittweite $h > 0$.

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $x_n = x_0 + nh$.
2. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere iterativ

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

3. Die Näherungslösung ist dann gegeben durch die stückweise lineare Funktion

$$\tilde{f}(x) := \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} y_n + \frac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} y_{n-1}, \quad \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n].$$

Insbesondere gilt $\tilde{f}(x_n) = y_n$ für alle n.

Bemerkung 1.5.2. *Man kann zeigen, dass das Euler-Verfahren 1.5.1 tatsächlich für $h \to 0$ auf einem kompakten Intervall I gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert, wenn man etwa annimmt, dass die exakte Lösung f zweimal differenzierbar ist und die Funktion F in y partiell differenzierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$|f(x) - \tilde{f}(x)| \leq Ch$$

für eine von F abhängige Konstante C.

Beispiel 1.5.3. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1.$$

Mit der Schrittweite $h = 0,1$ erhalten wir folgende Werte aus dem Euler-Verfahren bzw. für die exakte Lösung, die wir leicht mit Verfahren 1.3.4 als $f(x) = \exp(-x^2)$ finden.

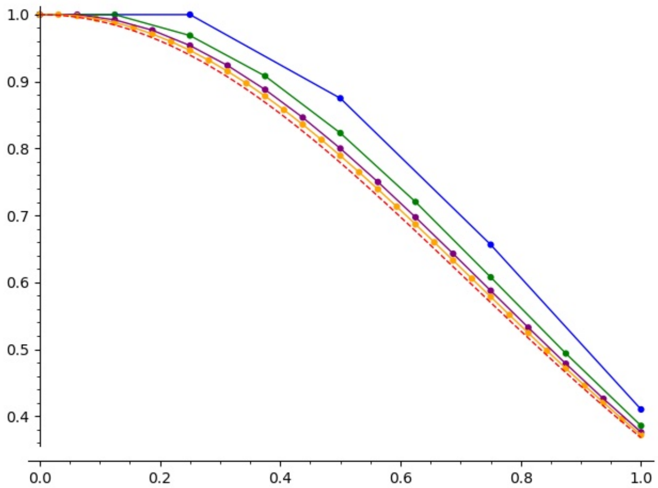

Abbildung 1.7: Konvergenz des Euler-Verfahrens.

n	x_n	y_n	$f(x_n)$
0	0	$1,00000000$	$1,00000000$
1	$0,1$	$1,00000000$	$0,99004983$
2	$0,2$	$0,98000000$	$0,96078943$
3	$0,3$	$0,94080000$	$0,91393118$
4	$0,4$	$0,88435200$	$0,85214378$
5	$0,5$	$0,81360384$	$0,77880078$

In Abbildung 1.7 verdeutlichen wir die Konvergenz des Verfahrens, in dem wir die Schrittweite $h = 2^{-m}$ für $m = 2, ..., 5$ wählen. Die rote gestrichelte Linie repräsentiert hierbei die exakte Lösung.

Beispiel 1.5.4. Wählt man die Schrittweite im Euler-Verfahren ungünstig (bzw. zu groß), so kann die Näherungslösung einen falschen Eindruck vermitteln. Etwa für das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{5}{2}y, \quad y(0) = 1$$

erhalten wir leicht die exakte Lösung $f(x) = e^{-5x/2}$. Diese geht für große x offenbar gegen 0 und ist stets positiv. Versucht man allerdings, die Lösung mittels des Euler-Verfahrens 1.5.1 mit Schrittweite $h = 1$ zu ermitteln, oszilliert die Näherungslösung $\tilde{f}$ und wird betragsmäßig immer größer. Man sagt das Verfahren sei **numerisch instabil**. Bei einer Schrittweite von etwa $h = \frac{1}{2}$ ändert sich das Bild jedoch und die Näherung geht zumindest augenscheinlich gegen 0, ändert aber nach wie vor das Vorzeichen.

Bemerkung 1.5.5. *Es gibt eine Variante des Euler-Verfahrens, bei der die Punkte y_n sozusagen „rückwärts“ bestimmt werden. Man definiert x_n und y_0 wie in Verfahren 1.5.1, definiert dann aber*

$$y_n = y_{n-1} + hF(x_n, y_n).$$

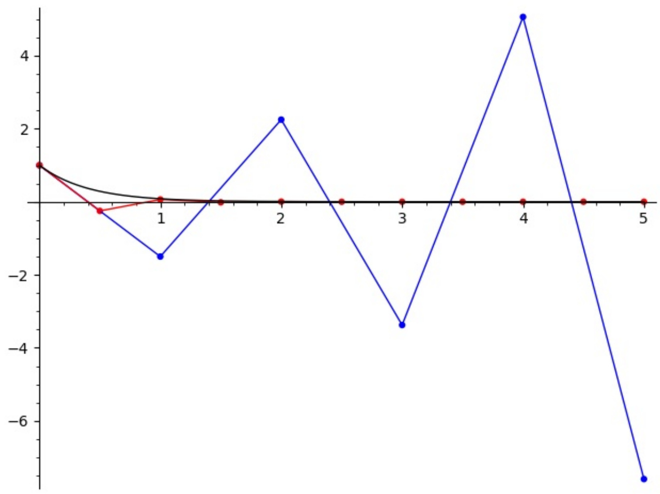

Abbildung 1.8: Instabilität des Euler-Verfahrens

Diese Beschreibung ist natürlich implizit und erfordert die Auflösung der obigen Gleichung nach y_n*, was dieses Verfahren aufwendiger macht, als das ursprüngliche Euler-Verfahren. Dafür ist es allerdings auch numerisch stabiler. Näheres hierzu ist Gegenstand einer Vorlesung über Numerik.*

1.5.2 Das Runge-Kutta-Verfahren

Das Euler-Verfahren ist eines der ältesten Verfahren zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen. Es taucht bereits in einem Lehrbuch Eulers aus dem Jahr 1746 auf. Es ist sehr einfach umzusetzen, ist aber numerisch instabil und konvergiert nicht sehr schnell gegen die tatsächliche Lösung. Es gibt daher viele Erweiterungen des Verfahrens. Eine sehr verbreitete Methode, die üblicherweise sehr schnell konvergiert, ist das folgende Verfahren, das gegen Ende des 19. Jahrhunderts von Runge und Kutta etwickelt wurde. Es gibt zahlreiche Varianten dieses Verfahrens, die wir hier jedoch nicht diskutieren wollen, sondern wieder auf die Numerik-Vorlesungen verweisen.

Verfahren 1.5.6 (4-stufiges Runge-Kutta-Verfahren).
Gegeben: Ein Anfangswertproblem

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

und eine feste Schrittweite $h > 0$.

1. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definiere $x_n = x_0 + nh$.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ definiere iterativ

$$\begin{aligned}
y_n^{(1)} &= y_{n-1} + hF(x_{n-1}, y_{n-1}), \\
y_n^{(2)} &= y_{n-1} + hF\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \frac{y_{n-1} + y_n^{(1)}}{2}\right), \\
y_n^{(3)} &= y_{n-1} + hF\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}, \frac{y_{n-1} + y_n^{(2)}}{2}\right), \\
y_n^{(4)} &= y_{n-1} + hF(x_n, y_n^{(3)}), \\
y_n &= \frac{1}{6}y_n^{(1)} + \frac{1}{3}y_n^{(2)} + \frac{1}{3}y_n^{(3)} + \frac{1}{6}y_n^{(4)}.
\end{aligned}$$

3. Die Näherungslösung ist dann gegeben durch die stückweise lineare Funktion

$$\tilde{f}(x) := \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} y_n + \frac{x_n - x}{x_n - x_{n-1}} y_{n-1}, \quad \text{für } x \in [x_{n-1}, x_n].$$

Insbesondere gilt $\tilde{f}(x_n) = y_n$ für alle n.

Bemerkung 1.5.7. *Während der Fehler beim Euler-Verfahren 1.5.1 (für hinreichend gutartige Funktionen F) auf einem kompakten Intervall I mit h etwa wie Ch gegen 0 geht (C eine von F abhängige Konstante), lässt sich zeigen, dass der Fehler beim Runge-Kutta-Verfahren 1.5.6 etwa wie $\tilde{C}h^4$ für eine Konstante $\tilde{C}$ gegen 0 geht, also wesentlich schneller. Allerdings müssen hierfür in der Regel stärkere Bedingungen an die rechte Seite $F(x, y)$ gefordert werden, die in der Praxis jedoch meist erfüllt sind.*

Es gibt zahlreiche Varianten dieses Verfahrens, die zum Teil mehr Rechenaufwand in jedem Schritt erfordern, aber dafür noch schneller konvergieren.

Beispiel 1.5.8. Wir betrachten wieder das Anfangswertproblem aus Beispiel 1.5.3 (i),

$$y' = -2xy, \quad y(0) = 1.$$

In der folgenden Tabelle geben wir die ersten Näherungswerte aus dem Runge-Kutta-Verfahren an und vergleichen sie mit den tatsächlichen Werten der Lösung $f(x) = \exp(-x^2)$.

n	x_n	$y_n^{(1)}$	$y_n^{(2)}$	$y_n^{(3)}$	$y_n^{(4)}$	y_n	$f(x_n)$
0	0	–	–	–	–	1,00000000	1,00000000
1	0,1	1,00000000	0,99000000	0,99005000	0,98019900	0,99004983	0,99004983
2	0,2	0,97024883	0,96064535	0,96078940	0,95161825	0,96078943	0.96078943
3	0,3	0.922357857	0.91371075	0.91392693	0.90595381	0.91393117	0.91393118
4	0,4	0.85909530	0.85187524	0.85212794	0.84576093	0.85214377	0.85214378
5	0,5	0.78397227	0.77851855	0.77876396	0.77426737	0.77880078	0.77880078

Wir sehen, dass die Näherung und die Lösung schon bei dieser gewählten Schrittweite auf ca. 8 Dezimalstellen übereinstimmen, also sogar mehr als theoretisch zu erwarten war.

1.6 Potenzreihen

Sowohl für theoretische wie praktische Überlegungen zum Thema Differentialgleichungen bietet es sich an, Lösungen in Form von Potenzreihen zu betrachten (vgl. Appendix A.6). Dieser Ansatz geht bereits auf Euler zurück und stellte bis etwa zu Beginn des 20. Jahrhunderts die einzige Methode dar, mit der man Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines Anfangswertproblems untersuchen konnte.

1.6.1 Ein motivierendes Beispiel

Ohne uns für den Moment auf Konvergenzfragen Rücksicht zu nehmen betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 1.6.1. Die Differentialgleichung im Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

nennt man auch eine **Riccati-Gleichung**. Diese gehört zu den einfachsten Differentialgleichungen, für die es keine elementar darstellbaren Lösungen mehr gibt.

Nehmen wir nun an, es gibt eine Lösung f in einer Umgebung von $x = 0$ und nehmen wir weiter an, dass diese Lösung **analytisch** ist, also als Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius geschrieben werden kann,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Aus der Anfangsbedingung folgt dann $f(0) = a_0 = 0$. Bekanntermaßen ist es recht einfach, Potenzreihen zu differenzieren und wir erhalten

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Über das Cauchy-Produkt (vgl. Satz A.6.4) berechnen wir

$$\begin{aligned}(f(x))^2 = a_1^2 x^2 + 2a_1 a_2 x^3 + (2a_1 a_3 + a_2^2) x^4 + (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) x^5 ... \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) x^n.\end{aligned}$$

Über einen Koeffizientenvergleich erhält man so nach und nach folgende Beziehungen aus der Differentialgleichung bzw. der Anfangsbedingung.

$$\begin{aligned}
x^0: &\quad a_1 = 0; \\
x^1: &\quad 2a_2 = 0 \quad \Rightarrow a_2 = 0; \\
x^2: &\quad 3a_3 = 1 + a_1^2 \quad \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3}; \\
x^3: &\quad 4a_4 = 2a_1a_2 \quad \Rightarrow a_4 = 0; \\
x^4: &\quad 5a_5 = 2a_1a_3 + a_2^2 \quad \Rightarrow a_5 = 0; \\
x^5: &\quad 6a_6 = 2a_1a_4 + 2a_2a_3 \quad \Rightarrow a_6 = 0; \\
x^6: &\quad 7a_7 = 2a_1a_5 + 2a_2a_4 + a_3^2 \quad \Rightarrow a_7 = \frac{1}{63}; \\
&\quad \vdots
\end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, dass man auf diese Weise nach und nach beliebig viele Koeffizienten der Potenzreihe bestimmen kann. Sofern die so definierte Potenzreihe tatsächlich konvergiert (was sie, wie wir sehen werden, in diesem Falle tut), lässt sich so auch eine Näherung für die Lösung berechnen.

Bemerkung 1.6.2. *Es ist möglich, die Lösung des Anfangswertproblems in Beispiel 1.6.1 durch sogenannte* ***Bessel-Funktionen*** *auszudrücken. Diese Funktionen sind in vielen Bereichen der Mathematik und auch der Physik extrem wichtig und werden uns später noch beschäftigen.*

1.6.2 Potenzreihen in mehreren Veränderlichen

Wir wollen nun allgemein Differentialgleichungen der Form

$$y' = F(x, y)$$

untersuchen, wobei $F : D \to \mathbb{R}$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **analytisch** ist. Um diesen Begriff zu präzisieren, brauchen wir zunächst einige Grundlagen zu Potenzreihen in mehreren Variablen.

Definition 1.6.3. Für jedes Paar $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ sei eine reelle Zahl $a_{ij} \in \mathbb{R}$ gegeben. Man nennt $(a_{ij})_{i,j}$ dann auch eine **Doppelfolge**.

(i) Für eine endliche Menge $M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ nennen wir

$$S_M := \sum_{(i,j)\in M} a_{ij}$$

die zu M gehörige **Partialsumme**.

(ii) Die **Doppelreihe** $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ ist die Familie $(S_M)_{M\subset\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \text{ endlich}}$ aller Partialsummen.

(*iii*) Existiert eine Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, so dass die (einfache) Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$$

absolut konvergiert, so nennen wir auch die Doppelreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$ **absolut konvergent**. Den Grenzwert bezeichnen wir ebenfalls mit $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}$.

Bemerkung 1.6.4. (*i*) *Nach dem Riemann'schen Umordnungssatz hängt der Wert eine absolut konvergenten (Einfach-)Reihe nicht von der Reihenfolge der Summanden ab. Die Frage nach der absoluten Konvergenz einer Doppelreihe sowie ihr Grenzwert hängen somit nicht von der gewählten Bijektion $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ ab.*

(*ii*) *Da es auf $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ keine ausgezeichnete Anordnung gibt, gibt es keinen universelle Definition für bedingte Konvergenz von Doppelreihen.*

(*iii*) *Es gibt auch analog formulierbare Definitionen für Mehrfachreihen und deren (absolute) Konvergenz mit mehr als zwei Summationsindizes. Der Notationsaufwand steigt dabei allerdings deutlich, so dass wir uns hier auf die Betrachtung von Doppelreihen beschränken wollen.*

Lemma 1.6.5. *Sei $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine Bijektion. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}| = \sup \left\{ \sum_{(i,j)\in M} |a_{ij}| \ : \ M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \ \textit{endlich} \right\}.$$

Insbesondere folgt somit für eine absolut konvergente Doppelreihe

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} |a_{ij}| = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}|$$

und

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}.$$

Beweis. Ist $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}|$ unbeschränkt, so liefert $M_n := \{\tau(m) \ : \ 0 \leq m \leq n\}$ eine Folge endlicher Teilmengen von $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, deren zugehörige Partialsummen ebenfalls über alle Grenzen wachsen, so dass das Supremum über alle endlichen Teilmengen unendlich ist.

Nehmen wir also an, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{\tau(n)}|$ gegen einen Grenzwert a konvergiert. Dann ist a offenbar auch eine obere Schranke für die Menge

$$\left\{ \sum_{(i,j)\in M} |a_{ij}| \ : \ M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ endlich} \right\}.$$

Da die Teilmengen M_n von oben nun eine Folge von Teilmengen bilden, deren zugehörige Partialsummen gegen a konvergieren, kann es sicher keine kleinere obere Schranke für die Menge geben und die Behauptung folgt.

Für die zweite Behauptung bemerken wir, dass die rechte Seite sicher nach oben durch das Supremum

$$\sup\left\{\sum_{(i,j)\in M}|a_{ij}| \;:\; M\subset\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \text{ endlich}\right\}$$

nach oben beschränkt ist, da sie der Grenzwert der Partialsummen über die Familie $M_N := \{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0 \;:\; i,j\leq N\}$ von endlichen Teilmengen ist. Von unten ist jede dieser Partialsummen durch

$$\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}_0\\ \tau(n)\in M_N}}|a_{\tau(n)}|$$

beschränkt. Da τ eine Bijektion ist, konvergiert diese untere Schranke für $N\to\infty$ gegen das Supremum, also folgt die Behauptung.

Hieraus ergibt sich auch direkt die dritte Behauptung mit dem Riemann'schen Umordnungssatz.

q.e.d.

Beispiel 1.6.6. Die geometrische Reihe

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} q^i r^j$$

ist für $|q|<1$ und $|r|<1$ absolut konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{1-q}\cdot\frac{1}{1-r}$. Sei nämlich $M\subset\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ eine beliebige endliche Teilmenge, dann gilt

$$\sum_{(i,j)\in M}|q|^i|r|^j \leq \sum_{j\,(i,j)\in M}|r|^j\sum_{i=0}^{\infty}|q|^i \leq \sum_{j=0}^{\infty}|r|^j\sum_{i=0}^{\infty}|q|^i = \frac{1}{1-|r|}\cdot\frac{1}{1-|q|}.$$

Das Supremum existiert somit und die Reihe ist absolut konvergent. Der Wert der Doppelreihe regibt sich dann mit Lemma 1.6.5.

Wir kommen nun zu Potenzreihen in mehreren Variablen.

Definition 1.6.7. Seien $x_0, y_0\in\mathbb{R}$ und $(a_{ij})_{i,j}$ eine Doppelfolge.

(i) Wir nennen den Ausdruck

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

eine **Potenzreihe** in Variablen x und y um (x_0, y_0).

(ii) Sei

$$\Delta := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i (y-y_0)^j \text{ konvergiert absolut} \right\}.$$

Das Innere Δ° von Δ nennen wir das **Konvergenzgebiet** der Potenzreihe.

(iii) Ist $(A_{ij})_{i,j}$ eine weitere Doppelfolge mit $|a_{ij}| \leq A_{ij}$ für alle $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, so nennen wir die zugehörige Potenzreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$ eine **majorisierende Reihe** von $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$.

(iv) Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $F : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ eine Funktion. Wir nennen F eine **analytische** Funktion, wenn es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von (x_0, y_0) und eine auf U absolut konvergente Potenzreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$ gibt, so dass für alle $(x,y) \in U$

$$F(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

gilt. Man sagt dann, die Funktion F werde auf U durch die Potenzreihe **dargestellt**.

Bemerkung 1.6.8. *(i) Zu Punkt (iv) von Definition 1.6.7 ist zu sagen, dass die Potenzreihe (offenbar) vom gewählten Punkt $(x_0, y_0) \in D$ abhängen. Insbesondere ändert sich die Koeffizientenfolge in Abhängigkeit dieses Punktes.*

(ii) Wir erinnern daran, dass es durchaus auch „glatte“ Funktionen gibt, die zwar unendlich oft differenzierbar, aber nicht analytisch sind. Das Standardbeispiel hierfür (in einer Variablen) ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Entwickelt man diese Funktion mittels des Satzes von Taylor (vgl. Satz A.6.1) in eine Potenzreihe um $x_0 = 0$, so findet man, dass alle Koeffizienten verschwinden. Wäre die Funktion f analytisch, so müsste sie nach dem Identitätssatz (vgl. Satz A.6.5) in einer Umgebung von $x_0 = 0$ identisch verschwinden, aber wir haben offenbar $f(x) > 0$ für alle $x \neq 0$, also einen Widerspruch.

Zur Beschreibung des Konvergenzgebietes einer Potenzreihe in zwei Variablen dient das folgende Lemma.

Lemma 1.6.9. *Die Potenzreihe* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$ *sei absolut konvergent im Punkt* $(x,y)=(x_1,y_1)$ *mit* $x_1 \neq x_0$ *und* $y_1 \neq y_0$*. Dann ist für alle* $0<\rho<1$ *die Menge*

$$K_\rho := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, |x-x_0| \leq \rho|x_1-x_0| \text{ und } |y-y_0| \leq \rho|y_1-y_0|\}$$

im Konvergenzgebiet der Reihe enthalten. Weiterhin konvergiert die Potenzreihe auf K_ρ *absolut und gleichmäßig.*

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $X = |x_1 - x_0|$ und $Y = |y_1 - y_0|$.

Nach Voraussetzung konvergiert die Doppelreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}X^iY^j$ absolut. Insbesondere gibt es damit ein $C > 0$, so dass $|a_{ij}|X^iY^j \leq C$ für alle $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ gilt.

Seien nun $(x,y) \in K_\rho$ und $M \subset \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ eine endliche Menge. Dann haben wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
&\sum_{(i,j)\in M} |a_{ij}||x-x_0|^i|y-y_0|^j \\
=&\sum_{(i,j)\in M} |a_{ij}|X^iY^j \left|\frac{x-x_0}{X}\right|^i \left|\frac{y-y_0}{Y}\right|^j \\
\leq& C \sum_{(i,j)\in M} \rho^{i+j} \leq C\left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.6.5 folgt somit die absolute Konvergenz der Reihe. Da die gefundene Schranke nicht von (x,y) abhängt, ist die Konvergenz auch gleichmäßig und die Behauptung ist bewiesen.

q.e.d.

Den folgenden Satz geben wir ohne Beweis an. Es handelt sich um eine direkte Verallgemeinerung eines zentralen Resultates über Potenzreihen in einer Variablen und der Beweis ist zwar technisch aufwändiger als in einer Variablen, aber im Wesen sehr verwandt.

Satz 1.6.10. *Sei* $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$ *eine Potenzreihe mit nicht-leerem Konvergenzgebiet* Δ°*.*

(*i*) *Dann definiert*

$$F : \Delta^\circ \to \mathbb{R},\; (x,y) \mapsto \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

eine analytische Funktion auf Δ°*.*

(*ii*) *Die Funktion F ist stetig und stetig partiell differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind wiederum analytisch. Genauer gilt*

$$\partial_x F(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} i a_{ij}(x-x_0)^{i-1}(y-y_0)^j; \quad \partial_y F(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} j a_{ij}(x-x_0)^i(y-y_0)^{j-1}$$

und beide Potenzreihen konvergieren ebenfalls auf Δ° absolut.

Bemerkung 1.6.11. *Durch Induktion folgt aus Satz 1.6.10 (ii) sofort, dass eine analytische Funktion in zwei Variablen unendlich oft partiell differenzierbar ist.*

Wie man aus Beispiel 1.6.1 vielleicht schon erahnen kann, ist es für die Untersuchung von Differentialgleichungen wichtig, das Einsetzen von Potenzreihen ineinander zu betrachten. Das folgende Lemma liefert die dazu nötigen Hilfsmittel. Wir formulieren es der Einfachheit halber nur für den Fall $x_0 = y_0 = 0$.

Lemma 1.6.12. *Sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}x^i y^j$ eine Potenzreihe mit nicht-leerem Konvergenzgebiet und F die durch sie definierte analytische Funktion. Weiter sei $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ eine Potenzreihe in einer Variablen mit positivem Konvergenzradius (vgl. Satz A.6.3) und g die durch sie definierte Funktion. Weiter nehmen wir an, dass $g(0) = b_0 = 0$ gilt.*
Dann existiert eine Umgebung von $x = 0$, in der durch $h(x) = F(x, g(x))$ eine analytische Funktion mit Reihenentwicklung $h(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell x^\ell$, wobei $c_0 = a_{00}$ und für $\ell \geq 1$

$$c_\ell = a_{\ell,0} + \sum_{m=1}^{\ell}\sum_{n=1}^{m} a_{\ell-m,n} \sum_{\substack{(p_1,\ldots,p_n) \\ p_1,\ldots,p_n \geq 1 \\ p_1+\ldots+p_n = m}} b_{p_1}\cdots b_{p_n}$$

gelten.

Beweis. Wir leiten lediglich die Formel für die Koeffizienten c_ℓ her. Die Fragen zur Konvergenz lassen sich dann mit zwar jeweils nicht schwierigen, aber etwas technischen Abschätzungen behandeln, die hier wenig erhellend wären.

Nach dem Cauchy-Produkt für Potenzreihen in einer Variablen folgt

$$g(x)^j = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_j) \\ i_1+\ldots+i_j = k}} b_{i_1}\cdots b_{i_j} \right) x^k$$

und jede dieser Potenzreihen hat denselben Konvergenzradius wie g. Da nach Voraussetzung $b_0 = 0$ gilt, ist jede der inneren Summen offenbar endlich. Setzen wir dies formal in die Potenzreihe für $F(x,y)$ ein, so erhalten wir

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_j) \\ i_1+\ldots+i_j=k}} b_{i_1} \cdots b_{i_j} \right) x^{k+i},$$

woraus die angegebene Formel für die Koeffizienten c_ℓ durch eine Indexverschiebung folgt.

q.e.d.

1.6.3 Analytische Lösungen von Differentialgleichungen

Wir kommen nun zurück zur Frage nach Lösungen für ein Anfangswertproblem

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

wobei F eine auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ analytische Funktion sei und $(x_0, y_0) \in D$ gelte.

Zunächst wollen wir begründen, warum wir uns auf den Spezialfall $(x_0, y_0) = (0,0)$ beschränken können.

Lemma 1.6.13. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem geeigneten Intervall I ist genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems (1), wenn die Funktion g definiert durch $g(x) := f(x + x_0) - y_0$ das Anfangswertproblem*

$$y' = \tilde{F}(x,y) = F(x + x_0, y + y_0), \quad y(0) = 0$$

löst.

Beweis. Der Beweis erfolgt durch direktes Nachrechnen: Wir haben offenbar $g(0) = f(0 + x_0) - y_0 = 0$ und

$$g'(x) = f'(x + x_0) = F(x + x_0, f(x + x_0)) = F(x + x_0, g(x) + y_0).$$

q.e.d.

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz 1.6.14. *Das Anfangswertproblem* (1) *besitzt in einer Umgebung von x_0 eine eindeutige Lösung. Diese Lösung ist dort analytisch.*

Beweis. Nach Lemma 1.6.13 können wir ohne Einschränkung $(x_0, y_0) = (0, 0)$ annehmen und schreiben F als Doppelpotenzreihe,

$$F(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j.$$

Wir machen nun den *Ansatz*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{2}$$

Wenn diese Reihe eine Lösung des Anfangsproblems darstellt, so erhalten wir aus der Anfangsbedingung notwendigerweise $f(0) = b_0 = 0$. Der Beweis erfolgt nun in drei Schritten.

1. Schritt: Wir nehmen zunächst an, dass die Potenzreihe in (2) einen positiven Konvergenzradius hat. Dann definiert die Reihe in einer Umgebung von $x = 0$ eine analytische, also insbesondere differenzierbare, Funktion und es gilt $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)b_{n+1}x^n$. Aus Lemma 1.6.12 erhalten wir dann die Beziehung

$$(n+1)b_{n+1} = \begin{cases} a_{00}, & n = 0, \\ \sum_{\ell=0}^{n} a_{n-\ell,\ell} \left(\sum_{r=0}^{\ell} \sum_{p_1+\ldots+p_r=\ell} b_{p_1} \cdots b_{p_r} \right), & n > 0 \end{cases}.$$

Auf der rechten tauchen nur b_j mit $j \leq n$ auf, so dass wir b_{n+1} aus $b_0, ..., b_n$ direkt und eindeutig berechnen können.

Mit Induktion erhält man aus Lemma 1.6.12 die Aussage, dass zu jedem $n \geq 1$ ein Polynom Q_n in den n^2 Variablen X_{ij}, $0 \leq i, j \leq n-1$ mit nicht-negativen, rationalen Koeffizienten existiert, so dass

$$b_n = Q_n(a_{ij})$$

gilt: Für $n = 1$ haben wir wie oben gesehen $b_1 = a_{00}$, also haben wir $Q_1 = X_{00}$. Nehmen wir an, die Aussage gelte für alle $m < n$ für ein $n \geq 2$, so folgt die Behauptung direkt durch Einsetzen in die Formel oben, da nach Induktionsvoraussetzung jedes b_{p_j} (man beachte $p_j \leq n-1$) durch ein Polynom Q_{p_j} mit den geforderten Eigenschaften ersetzt werden kann.

Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer analytischen Lösung, unter der Annahme der Konvergenz.

2. Schritt Sei $\sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} x^i y^j$ eine majorisierende Reihe für die Doppelreihe $\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j$ (vgl. Definition 1.6.7 (*iii*)). Dann definieren wir eine Folge $(B_n)_n$ durch $B_0 = 0$ und $B_n = Q_n(A_{ij})$, $n \geq 1$. Da die Koeffizienten der Polynome Q_n alle nicht-negativ sind, folgt, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ eine majorisierende Reihe für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ist. Finden wir also für eine geeignete majorisierende Reihe $\sum_{ij=0}^{\infty} A_{ij} x^i y^j$ eine analytische

Lösung des Anfangswertproblems, folgt direkt, dass auch die Potenzreihe aus unserem Ansatz in (2) einen positiven Konvergenzradius hat und der Satz ist bewiesen.

3. Schritt: Wir konstruieren nun eine geeignete majorisierende Reihe $\sum_{ij=0}^{\infty} A_{ij} x^i y^j$. Nach Voraussetzung ist die Funktion $F(x, y)$ in einer Umgebung von $(0, 0)$ analytisch, d.h. es gibt einen Punkt $(x_1, y_1) \in D$ mit $x_1 \neq 0$ und $y_1 \neq 0$, in dem die Reihe absolut konvergiert. Nach Lemma 1.6.9 (bzw. dessen Beweis) existieren somit Konstanten $C > 0$, $\rho > 0$, so dass gilt $|a_{ij}| \leq \frac{C}{\rho^{i+j}}$. Wir definieren also $A_{ij} = \frac{C}{\rho^{i+j}}$ und

$$\tilde{F}(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} A_{ij} x^i y^j = C \sum_{i,j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\rho}\right)^i \left(\frac{y}{\rho}\right)^j = C \cdot \frac{1}{1 - x/\rho} \cdot \frac{1}{1 - y/\rho}$$

(vgl. Beispiel 1.6.6).

Das Anfangswertproblem

$$y' = \tilde{F}(x, y), \quad y(0) = 0$$

ist separabel und wir erhalten unter Verwendung von Verfahren 1.3.4 die Lösung

$$\tilde{f}(x) = \rho \cdot \left(1 - \sqrt{1 - 2C \log\left(1 - \frac{x}{\rho}\right)}\right).$$

Diese Funktion ist in einer Umgebung von $x = 0$ analytisch, so dass wir das Argument aus dem 2. Schritt des Beweises anwenden können und der Beweis vollständig ist.

q.e.d.

Bemerkung 1.6.15. (*i*) *Eine analoge Aussage wie Satz 1.6.14 gilt auch für Systeme von Differentialgleichungen mit analytischer rechter Seite und damit nach dem Reduktionssatz 1.2.8 auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung. Für den allgemeinen Beweis für ein System aus n Differentialgleichungen ist es notwendig, Potenzreihen in $n+1$ Variablen zu betrachten, was die Grundidee der Beweise nicht ändert, den Notationsaufwand aber deutlich erhöht.*

(*ii*) *Für analytische Funktionen gelten starke Aussagen, wie etwa der Identitätssatz (vgl. Satz A.6.5). Diese können in der Situation von Satz 1.6.14 wertvolle Aussagen über die Lösung liefern. Außerdem erhält man ohne weitere Arbeit, dass die Lösung des Anfangswertproblems* (1) *unendlich oft differenzierbar ist.*

Beispiel 1.6.16. Um zu verdeutlichen, dass der Potenzreihenansatz auch für Differentialgleichungen höherer Ordnung gilt, betrachten wir die Pendelgleichung (vgl. Beispiel 1.2.7),

$$\theta''(t) + \frac{g}{\ell} \sin(\theta(t)) = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0. \tag{3}$$

Wie in Beispiel 1.6.1 bzw. im Beweis von Satz 1.6.14 machen wir den Ansatz

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Aus den Anfangsbedingungen ergibt sich sofort $a_0 = \theta_0$, $a_1 = 0$. Wir erhalten dann

$$\theta''(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} t^n.$$

Schreiben wir dann noch

$$\begin{aligned}
\sin(\theta(t)) &= \sigma \cos\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n\right) + \gamma \sin\left(\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^n\right) \\
&= \sigma + \gamma a_2 t^2 + \gamma a_3 t^3 + \left(-\frac{1}{2}\sigma a_2^2 + \gamma a_4\right) t^4 + (-\sigma a_3 a_2 + \gamma a_5) t^5 \\
&\quad + \left(-\frac{1}{6}\gamma a_2^3 - \sigma a_4 a_2 - \frac{1}{2}\sigma a_3^2 + \gamma a_6\right) t^6 + \ldots
\end{aligned}$$

mit $\sigma = \sin(\theta_0)$ und $\gamma = \cos(\theta_0)$. Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir dann sukzessive

$$\begin{aligned}
&2a_2 + \frac{g}{\ell}\sigma = 0 \quad \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\ell}\sigma \\
&6a_3 = 0 \quad \Rightarrow a_3 = 0 \\
&12a_4 + \frac{g}{\ell}\gamma a_2 = 0 \quad \Rightarrow a_4 = \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{g}{\ell}\right)^2 \sigma\gamma \\
&20a_5 + \frac{g}{\ell}\gamma a_3 = 0 \quad \Rightarrow a_5 = 0 \\
&30a_6 + \frac{g}{\ell}\left(-\frac{1}{2}\sigma a_2^2 + \gamma a_4\right) = 0 \quad \Rightarrow a_6 = -\frac{1}{720} \cdot \left(\frac{g}{\ell}\right)^3 (\sigma\gamma^2 - 3\sigma^3) \\
&42a_7 + \frac{g}{\ell}(-\sigma a_3 a_2 + \gamma a_5) = 0 \quad \Rightarrow a_7 = 0 \\
&56a_8 + \frac{g}{\ell}\left(-\frac{1}{6}\gamma a_2^3 - \sigma a_4 a_2 - \frac{1}{2}\sigma a_3^2 + \gamma a_6\right) \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow a_8 = \frac{1}{8!} \cdot \left(\frac{g}{\ell}\right)^4 (\sigma\gamma^3 - 33\sigma^3\gamma) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wir erinnern an die Lösung der vereinfachten Pendelgleichung für kleine Anfangswinkel θ_0

$$\theta'' + \frac{g}{\ell}\theta = 0, \quad \theta(0) = \theta_0, \quad \theta'(0) = 0,$$

welche wir in Beispiel 1.2.7 mit

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t\right) = \theta_0 \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{\ell}t^2 + \frac{1}{24} \cdot \left(\frac{g}{\ell}\right)^2 t^4 - \frac{1}{720} \cdot \left(\frac{g}{\ell}\right)^3 t^6 + \frac{1}{8!} \cdot \left(\frac{g}{\ell}\right)^4 t^8 - \ldots\right]$$

angegeben haben. Vergleicht man dies mit den Koeffizienten der Lösung der korrekten Pendelgleichung, so erkennen wir direkt, dass die Lösungen konsistent sind, wenn man für kleine θ_0 näherungsweise $\sigma = \sin(\theta_0) \approx \theta_0$, $\sigma^k \approx 0$ für alle $k > 1$ und $\gamma = \cos(\theta_0) \approx 1$ annimmt, was allerdings nur für die ersten paar Koeffizienten sinnvoll ist. Für kleine Zeiten $t > 0$ fallen Abweichungen bei höheren Potenzen von t allerdings kaum ins Gewicht.

Kapitel 2

Existenz- und Eindeutigkeitssätze

Unter anderem in Abschnitt 1.3 haben wir einige spezielle Formen von Differentialgleichungen erster Ordnung kennengelernt, für die wir mehr oder weniger explizite Lösungsverfahren angeben konnten. Aus den Verfahren ergab sich dann eine Aussage über sowohl die Existenz einer Lösung, als auch (in der Regel), dass diese Lösung eindeutig bestimmt ist. Meistens ist es allerdings nicht (praktisch) möglich, eine Differentialgleichung mit einem expliziten Verfahren zu lösen (ein wichtiges Beispiel ist etwa die Pendelgleichung (4)). Nichtsdestotrotz möchte man die Frage nach der Existenz bzw. der Eindeutigkeit einer Lösung untersuchen. In diesem Kapitel wollen wir solche Fragen systematisch untersuchen.

2.1 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nach Picard-Lindelöf

Zunächst reicht es nach dem Reduktionssatz 1.2.8 aus, die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten.

2.1.1 Banach-Räume und der Banach'sche Fixpunktsatz

Wir führen zunächst einige wichtige Begriffe ein, die eventuell schon aus der Analysis II bekannt sind.

Definition 2.1.1. Sei V ein (nicht notwendig endlich-dimensionaler) $\mathbb{R}$-Vektorraum (siehe Definition B.1.1). Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ heißt eine **Norm** auf V, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gilt $\|v\| = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ gilt.

2. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$.

3. Es gilt die **Dreiecksungleichung**: Für $v, w \in V$ gilt
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Das Tupel $(V, \|\cdot\|)$ nennt man einen **normierten Raum**.

Man beachte hierbei, dass es auf ein und demselben Vektorraum verschiedene Normen geben kann. Auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ beispielsweise kennt man aus der Linearen Algebra die **Euklidische Norm**
$$\|v\|_2 = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$
Daneben gibt es aber auch die sogenannte **1-Norm**
$$\|v\|_1 = |v_1| + \cdots + |v_n|$$
oder die **Maximumsnorm**
$$\|_v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_n|\}.$$
Einen im Folgenden sehr wichtigen normierten Raum wollen wir direkt hier einführen.

Definition 2.1.2. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$.

(i) Wir bezeichnen mit
$$\mathscr{C}_n^m(I) := \{f : I \to \mathbb{R}^n \ : \ f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$
den Raum der m-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf I. Insbesondere bezeichnen wir mit $\mathscr{C}_n(I) = \mathscr{C}_n^0(I)$ den Raum der stetigen Funktionen auf I. Mit $\mathscr{C}_n^\infty(I)$ bezeichnen wir den Raum der auf I unendlich oft differenzierbaren Funktionen.

(ii) Ist I kompakt, so definieren wir für $f \in \mathscr{C}_n(I)$ die **Norm**
$$\|f\|_\infty := \max\{\|f(x)\| \ : \ x \in I\}.$$
Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die **Maximumsnorm** auf $\mathbb{R}^n$,
$$\|(y_1, \dots, y_n)^{tr}\| = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}.$$

Da stetige Funktionen auf einem kompakten Intervall ihr Maximum annehmen, ist die Definition von $\|f\|_\infty$ in der Tat gerechtfertigt. Dass die hier so bezeichneten Abbildungen tatsächlich Normen im Sinne von Definition 2.1.1 sind, sehen wir in der Übung.

Wir benötigen weiterhin den folgenden Begriff, der etwas spezieller aus der Analysis I bekannt ist.

Definition 2.1.3. Sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$.

(i) Die Folge $(v_n)_n$ heißt **konvergent** mit Grenzwert $v \in V$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|v_n - v\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(ii) Die Folge $(v_n)_n$ heißt eine **Cauchy-Folge**, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|v_n - v_m\| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m \geq N.$$

Bemerkung 2.1.4. *Ob eine Folge konvergiert bzw. eine Cauchy-Folge ist oder nicht, hängt (zumindest bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen) in der Regel von der gewählten Norm auf dem Vektorraum V ab.*

Für Folgen in endlich-dimensionalen Vektorräumen mit irgendeiner Norm besitzt jede Cauchy-Folge automatisch einen Grenzwert in V. In unendlich-dimensionalen Räumen muss das nicht so sein.

Definition 2.1.5. Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig**, falls jede Cauchy-Folge einen Grenzwert in V besitzt. Einen vollständigen, normierten Raum nennen wir auch einen **Banach-Raum**.

Wir sehen uns nun ein Beispiel für einen unendlich-dimensionalen Banach-Raum an.

Proposition 2.1.6. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Der normierte Raum $(\mathscr{C}_n(I), \|\cdot\|_\infty)$ aus Definition 2.1.2 ist ein Banach-Raum.*

Beweis. Sei $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge stetiger Funktionen in $\mathscr{C}_n(I)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Insbesondere gilt dann für jedes $x \in I$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2},$$

so dass für jedes $x \in I$ die Folge $(f_n(x))_n$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen ist. Wir wissen aber aus der Analysis I, dass eine Cauchy-Folge reeller Zahlen gegen einen Grenzwert konvergiert. Wir können daher eine Funktion f definieren als punktweisen Grenzwert der gegebenen Folge,

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Es gibt somit für jedes $x \in I$ ein $M = M(x, \varepsilon)$, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq M$$

gilt.

Wir wählen nun $n \geq N$ und $m(x) \geq \max\{N, M\}$ und erhalten für alle $x \in I$

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{m(x}(x)| + |f_{m(x}(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{1}$$

also konvergiert die Folge $(f_n)_n$ **gleichmäßig** gegen f (siehe Definition A.1.7). Nun wissen wir, dass das Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen selbst wieder stetig ist (vgl. Satz A.4.6), also gilt $f \in \mathscr{C}(I)$.

Da die Ungleichung (1) für jedes $x \in I$ gilt, gilt sie insbesondere auch für das $x \in I$, in dem f sein Maximum annimmt, also haben wir für $n \geq N$ auch

$$\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$$

und die Cauchy-Folge $(f_n)_n$ konvergiert gegen den Grenzwert $f \in \mathscr{C}_n(I)$, was wir zeigen wollten.

q.e.d.

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen allgemeinen Satz über Banach-Räume, das von entscheidender Bedeutung für unseren Existenz-und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen sein wird.

Satz 2.1.7 (Banach'scher Fixpunktsatz). *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Bach-Raum und $A \subseteq V$ eine abgeschlossene*[a] *Menge. Weiter sei $T : A \to V$ eine Abbildung mit $T(A) \subseteq A$ und es existiere ein $0 \leq L \lneqq 1$ mit*

$$\|T(v) - T(w)\| \leq L\|v - w\| \quad \textit{für alle } v, w \in A.$$

*Man nennt T dann eine **Kontraktion**. Dann ist Folgendes richtig.*

(*i*) *Die Abbildung T hat genau einen Fixpunkt $v^* \in A$, d.h. die Gleichung $T(v) = v$ besitzt genau eine Lösung.*

(*ii*) *Sei $v_0 \in A$ beliebig. Dann konvergiert die Folge $(v_n)_n$ definiert durch $v_{n+1} = T(v_n)$ gegen v^* und es gilt*

$$\|v_n - v^*\| \leq \frac{1}{1-L}\|v_n - v_{n+1}\| \leq \frac{L^n}{1-L}\|v_0 - v_1\|.$$

[a] Das heißt der Grenzwert einer konvergenten Folge aus A liegt selbst in A.

Beweis. Die in (*ii*) definierte Folge besteht nach Voraussetzung aus Elementen in A. Nach der geforderten Abschätzung für die Abbildung T gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$ dass

$$\|v_n - v_{n+1}\| = \|T(v_{n-1}) - T(v_n)\| \leq L\|v_{n-1} - v_n\|.$$

Nach Induktion folgt für jedes $m > n$, dass

$$\|v_m - v_{m+1}\| \leq L^{m-n}\|v_n - v_{n+1}\|$$

gilt.

Damit ergibt sich aber

$$\begin{aligned}
&\|v_n - v_m\| \\
=&\|v_n - v_{n+1} + v_{n+1} - v_{n+2} + \cdots + v_{m-1} - v_m\| \\
\leq&\|v_n - v_{n+1}\| + \|v_{n+1} - v_{n+2}\| + \cdots + \|v_{m-1} - v_m\| \\
\leq&(1 + L + \ldots L^{m-n})\|v_n - v_{n+1}\| \\
\leq&\frac{1}{1-L}\|v_n - v_{n+1}\| \\
\leq&\frac{L^n}{1-L}\|v_0 - v_1\|.
\end{aligned}$$

Wegen $L < 1$ ist $(v_n)_n$ also eine Cauchy-Folge und somit wegen der Vollständigkeit von V konvergent gegen einen Grenzwert v^*. Da A abgeschlossen ist, gilt nach Definition $v^* \in A$. Nun ist die Abbildung $T : A \to V$ stetig, da es sich um eine Kontraktion handelt: Sei $\varepsilon > 0$. Für $v, w \in A$ mit $\|v - w\| < \delta := \frac{1}{L}\varepsilon$ folgt

$$\|T(v) - T(w)\| \leq L\|v - w\| < \varepsilon.$$

Damit folgt aber

$$T(v^*) = T(\lim_{n\to\infty} v_n) = \lim_{n\to\infty} T(v_n) = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = v^*,$$

also ist v^* ein Fixpunkt von T. Somit haben wir die Existenzaussage in (i) sowie (ii) bewiesen.

Es fehlt noch die Eindeutigkeitsaussage in (i). Sei $\bar{v}$ eine weiter Lösung des Fixpunktproblems. Dann gilt

$$\|\tilde{v} - v^*\| = \|T(\tilde{v}) - T(v^*)\| \leq L\|\tilde{v} - v^*\|,$$

also $(1 - L)\|\tilde{v} - v^*\| \leq 0$. Wegen $L < 1$ folgt damit aber $\|\tilde{v} - v^*\| = 0$ und so $\tilde{v} = v^*$.

q.e.d.

2.1.2 Der Satz von Picard-Lindelöf

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf 2.1.13. Als ersten Schritt hierzu führen wir ein Anfangswertproblem auf ein System von Integralgleichungen zurück.

Lemma 2.1.8. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $(x_0, y_0) \in D$ mit $x_0 \in I$. Dann ist $f = (f_1, \ldots, f_n)^{tr} : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

auf dem Intervall I, wenn $f \in \mathscr{C}_n(I)$ gilt und die Integralgleichung

$$\begin{aligned} f_1(x) &= y_{0,1} + \int_{x_0}^{x} F_1(t, f(t))\mathrm{d}t \\ &\vdots \\ f_n(x) &= y_{0,n} + \int_{x_0}^{x} F_n(t, f(t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ erfüllt ist.

Beweis. Löst f das Anfangswertproblem, so gilt offenbar für $1 \leq i \leq n$

$$y_{0,i} + \int_{x_0}^{x} F_i(t, f(t))\mathrm{d}t = y_{0,i} + \int_{x_0}^{x} f_i'(t)\mathrm{d}t = y_{0,i} + f_i(x) - f_i(x_0) = f_i(x),$$

also ist f auch eine (insbesondere stetige) Lösung der gegebenen Integralgleichung.

Ist umgekehrt f eine stetige Lösung der Integralgleichung, so hat man zunächst $f_i(x_0) = y_{0,i}$, weil alle Integrale verschwinden. Weiterhin garantiert der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung A.5.7, dass jedes f_i differenzierbar ist und wir haben für jedes $1 \leq i \leq n$

$$f_i'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y_{0,i} + \int_{x_0}^{x} F_i(t, f(t))\ dt\right) = F_i(x, f(x))$$

für alle $x \in I$.

q.e.d.

Bemerkung 2.1.9. *Eine kompaktere und im Folgenden praktischere Formulierung von Lemma 2.1.8 lautet wie folgt: Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.1.8 ist $f : I \to \mathbb{R}^n$ genau dann eine Lösung des gegebenen Anfangswertproblems, wenn f ein* ***Fixpunkt*** *des Operators*

$$T : \mathscr{C}_n(I) \to \mathscr{C}_n(I), \quad g \mapsto T(g)$$

mit

$$\begin{aligned} T(g)(x) &:= \left(y_{0,1} + \int_{x_0}^{x} F_1(t, g(t))\mathrm{d}t, \dots, y_{0,n} + \int_{x_0}^{x} F_n(t, g(t))\mathrm{d}t \right)^{tr} \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, g(t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

ist, wenn also $T(f) = f$ gilt.

Wir brauchen also nur eine ***stetige*** *Lösung einer Integralgleichung zu finden, was wir mit etwas Vorbereitung durch Anwendung des Banach'schen Fixpunktsatzes (siehe Satz 2.1.7) bewerkstelligen können werden.*

Wie sich herausstellen wird, müssen wir für den Beweis eine etwas andere Bedingung an die Funktion $F : D \to \mathbb{R}^n$ als lediglich ihre Stetigkeit, damit wir den Satz von Picard-Lindelöf beweisen können. Diesen Begriff wollen wir nun einführen. Hier und im Rest dieses Abschnittes bezeichne stets $\|\cdot\|$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$ (vgl. Definition 2.1.2).

Definition 2.1.10. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^m$ eine (nicht-notwendig stetige) Funktion.

(i) Existiert eine Konstante $L \geq 0$ mit

$$\|F(x, y) - F(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in D,$$

so sagen wir, dass F einer **Lipschitz-Bedingung** (bezüglich y) mit **Lipschitz-Konstante** L genügt.

(ii) Wir sagen, dass F **lokal** einer Lipschitz-Bedingung genügt, wenn für jeden Punkt $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung U von (x_0, y_0) gibt, so dass die Einschränkung $f|_{D \cap U}$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $L \geq 0$, welche von U abhängen kann, genügt.

Bemerkung 2.1.11. *Auf den Räumen $V = \mathbb{R}^n$ bzw. $V = \mathbb{R}^m$ sind sämtliche Normen* ***äquivalent****, das heißt für irgendwelche zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ existieren Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass für alle $v \in V$ die Abschätzung*

$$c_1\|v\|_a \leq \|v\|_b \leq c_2\|v\|_a$$

gilt. Insbesondere ist die Wahl der Norm, die wir auf die Maximumsnorm festgelegt haben, unerheblich dafür, ob eine Funktion F einer Lipschitz-Bedinung genügt. Allerdings hängt der Wert der Lipschitz-Konstante im Allgemeinen von der Wahl der Norm ab.

Wir kommen zu einigen hilfreichen Aussagen, wie man erkennt bzw. verwenden kann, dass eine Funktion F einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.

Lemma 2.1.12. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^m$ stetig.*

(i) *F genügt auf D genau dann einer lokalen Lipschitz-Bedingung, wenn es zu jeder kompakten Menge $K \subseteq D$ ein $L \geq 0$ gibt, so dass $f|_K$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung mit Konstante L genügt.*

(ii) *Ist F in $y = (y_1, \ldots, y_n)^{tr}$ stetig partiell differenzierbar, so genügt F einer lokalen Lipschitz-Bedingung.*

(iii) *Ist F in $y = (y_1, \ldots, y_n)^{tr}$ stetig partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen $\partial_{y_i} F$ auf D beschränkt und ist zusätzlich D konvex, so genügt F einer globalen Lipschitz-Bedingung.*

Beweis.

(i) Übung.

(ii) Sei $(x_0, y_0) \in D$. Da D als Gebiet insbesondere offen ist, existiert ein $r > 0$, so dass

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \,:\, |x - x_0| \leq r,\ \|y - y_0\| \leq r\} \subseteq D$$

ganz in D enthalten ist. Die Menge K ist dann offenbar kompakt, konvex, und enthält den Punkt (x_0, y_0). Da nach Voraussetzung alle partiellen Ableitungen $\partial_{y_j} F_i$ auf D stetig sind, sind sie alle auf K beschränkt, das heißt es existiert ein $M \geq 0$ mit

$$\left|\partial_{y_j} F_i(x, y)\right| \leq M \quad \text{für alle } i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,\ (x, y) \in K.$$

Seien nun $(x, y), (x, \tilde{y}) \in K$. Da K konvex ist, ist für $0 \leq \lambda \leq 1$ auch der Punkt $(x, w(\lambda))$ mit

$$w(\lambda) = \lambda\tilde{y} + (1 - \lambda)y = y + \lambda(\tilde{y} - y)$$

in K enthalten. Mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung A.5.7 können wir nun schreiben

$$F(x, \tilde{y}) - F(x, y) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} F(x, w(\lambda))\mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \left(\partial_{y_j} F_i(x, w(\lambda))\right)_{i,j} \cdot (\tilde{y} - y)\mathrm{d}\lambda.$$

Diesen Ausdruck können wir nun wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|F(x, \tilde{y}) - F(x, y)\| &\leq \max_{i=1,\ldots,m} \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left|\partial_{y_j} F_i(x, w(\lambda))\right| \cdot |\tilde{y}_j - y_j|\mathrm{d}\lambda \\
&\leq \int_0^1 M \sum_{j=1}^n |\tilde{y}_j - y_j|\mathrm{d}\lambda \\
&\leq Mn\|\tilde{y} - y\|.
\end{aligned}$$

Die Funktion F genügt also auf K einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $L = Mn$ und die Behauptung folgt aus *(i)*.

(*iii*) Übung.

q.e.d.

Wir haben nun alle Vorüberlegungen abgeschlossen, um den Satz von Picard-Lindelöf beweisen zu können.

Satz 2.1.13 (Picard-Lindelöf). (*i*) *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $L > 0$. Setze $\varepsilon_0 := \frac{1}{2L}$. Weiter sei $x_0 \in J$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \cap J$ ein kompaktes Intervall, so dass $x_0 \in I^\circ$ im Inneren von I liegt. Dann existiert auf I eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

(*ii*) *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass F lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in D$ ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung $f : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ besitzt.

Beweis.

(*i*) Sei $I = [x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2]$ mit $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$. Nach Lemma 2.1.8 bzw. Bemerkung 2.1.9 finden wir alle Lösungen des gegebenen Anfangswertproblems auf I als Fixpunkte des Operators

$$T : \mathscr{C}_n(I) \to \mathscr{C}_n(I),\ g \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, g(t)) \mathrm{d}t \right)$$

auf dem Raum $\mathscr{C}_n(I)$ der stetigen Funktionen von I nach $\mathbb{R}^n$.

Für $g, h \in \mathscr{C}_n(I)$ und $x \in I$ haben wir

$$\begin{aligned}
\|T(g)(x) - T(h)(x)\| &= \max_{j=1,\dots,n} \left| \int_{x_0}^{x} F_j(t, g(t)) - F_j(t, h(t)) \mathrm{d}t \right| \\
&\leq \max_{j=1,\dots,n} \int_{x_0}^{x} |F_j(t, g(t)) - F_j(t, h(t))| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \|F(t, g(t)) - F(t, h(t))\| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{x_0}^{x} L\|g(t) - h(t)\| \mathrm{d}t \\
&=\leq L|x - x_0| \cdot \|g - h\|_\infty.
\end{aligned}$$

Wegen $|x - x_0| \leq \varepsilon_0$ und der Tatsache, dass die Abschätzung insbesondere für solche $x \in I$ gilt, in dem die stetige Funktion $\|T(g) - T(h)\|$ ihr Maximum annimmt, folgt somit

$$\|T(g) - T(h)\|_\infty \leq L\varepsilon_0 \|g - h\|_\infty = \frac{1}{2}\|g - h\|_\infty,$$

der Operator T ist also eine Kontraktion. Da nach Proposition 2.1.6 der normierte Raum $(\mathscr{C}_n(I), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banach-Raum ist, folgt unmittelbar aus dem Banach'schen Fixpunktsatz 2.1.7, dass der Operator T genau einen Fixpunkt besitzt, also folgt die Behauptung.

(ii) Da D als Gebiet insbesondere offen ist, existiert ein $r > 0$, so dass

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \; : \; |x - x_0| \leq r, \; \|y - y_0\| \leq r\} \subseteq D$$

eine Teilmenge von D ist und F auf D einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $L > 0$ genügt. Weiterhin existiert aufgrund der Stetigkeit von F und der Kompaktheit von K ein $M > 0$ mit

$$\|F(x, y)\| \leq M \quad \text{für alle } (x, y) \in K.$$

Wählen wir nun $\varepsilon := \min\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M}\}$ und setzen $I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. Betrachten wir nun den Operator T definiert analog wie in Teil (i) definiert auf der abgeschlossenen Kugel

$$B := \{g \in \mathscr{C}_n(I) \; : \; \|g - y_0\|_\infty \leq r\} \subset \mathscr{C}_n(I),$$

wobei y_0 als konstante Funktion zu verstehen ist, so rechnen wir nach, dass für $g \in B$ und $x \in I$ gilt

$$\|T(g)(x) - y_0\| = \max_{j=1,\dots,n} \left| \int_{x_0}^{x} F_j(t, g(t)) \mathrm{d}t \right| \leq |x - x_0| M \leq r,$$

also folgt $\|T(g) - y_0\|_\infty \leq r$ und wir haben $T(B) \subseteq B$. Dieselbe Rechnung wie in Teil (i) zeigt auch hier, dass $T : B \to B$ eine Kontraktion ist, also folgt wieder die Behauptung mit dem Banach'schen Fixpunktsatz 2.1.7 zusammen mit Lemma 2.1.8.

q.e.d.

Beispiel 2.1.14. Da der Banach'sche Fixpunktsatz 2.1.7 neben der Existenz und Eindeutigkeit auch ein iteratives Verfahren (inklusive Fehlerabschätzung) liefert, den Fixpunkt zu approximieren, können wir dieses Verfahren ebenso verwenden, um die Lösung eines Anfangswertproblems zu bestimmen. Man nennt dieses Verfahren auch **Picard-Iteration**.

Betrachten wir dazu das Anfangswertproblem

$$y' = xy \quad y(0) = 1.$$

Die Funktion $F(x, y) = xy$ ist offenbar auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stetig und genügt auf jedem Streifen $[-r, r] \times \mathbb{R}$ ($r > 0$) einer Lipschitz-Bedingung mit Konstante $L = r$. Der Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 garantiert also (lokal) eine eindeutig Lösung. Um diese zu approximieren, gehen wir wie folgt vor.

Als Startwert der Iteration wählen wir die konstante Funktion $f_0(x) = 1$. Hierauf wenden wir immer den Operator T mit

$$T(g)(x) = 1 + \int_0^x t g(t) \mathrm{d}t$$

an und erhalten so die Funktionenfolge $(f_n)_n$ definiert durch

$$f_0 \equiv 1, \quad f_{n+1} = T(f_n).$$

Explizit erhalten wir

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot 1 \mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2}, \\
f_2(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot \left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}, \\
f_3(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8}\right) \mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}, \\
f_4(x) &= 1 + \int_0^x t \cdot \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^6}{48}\right) \mathrm{d}t = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48} + \frac{x^8}{384}.
\end{aligned}$$

Hieraus kann man die Vermutung gewinnen, dass es eine geschlossene Formel für $f_n(x)$ gibt, nämlich

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2^k \cdot k!},$$

was man mit vollständiger Induktion leicht verifiziert. Für $n \to \infty$ erhalten wir so die Lösung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k \cdot k!} = \exp\left(\frac{1}{2}x^2\right).$$

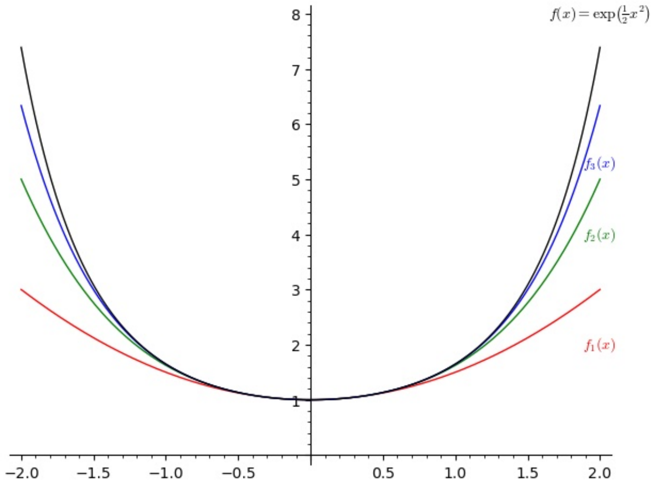

Abbildung 2.1: Iterative Annäherung der Lösung

Diese Lösung hätte man natürlich beispielsweise auch durch Separation der Variablen gefunden.

Als direkte Folgerung aus dem Satz von Picard-Lindelöf erhalten wir die folgende sehr starke Eindeutigkeitsaussage.

Korollar 2.1.15 (Eindeutigkeitssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass F lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und seien $f, g : I \to \mathbb{R}^n$ Lösungen des Differentialgleichungssystems*

$$y' = F(x, y).$$

Gibt es ein $x_0 \in I$ mit $f(x_0) = g(x_0)$, so folgt bereits $f(x) = g(x)$ für alle $x \in I$.

Beweis. Angenommen die Aussage ist nicht richtig, dann existiert ein $x_1 \neq x_0$ in I mit $f(x_1) \neq g(x_1)$. Ohne Einschränkung können wir $x_1 > x_0$ annehmen, der umgekehrte Fall verläuft analog.

Wir definieren

$$x^* := \inf\{x_1 > x_0 \ : \ f(x_1) \neq g(x_1)\}.$$

Dann gilt $f(x^*) = g(x^*)$. Ansonsten müsste es wegen der Stetigkeit von $f - g$ eine ganze Umgebung von x^* geben, in der $f - g$ nicht verschwindet, was der Definition von x^* widerspricht.

Dann sind aber f und g in einer geeigneten Umgebung von x^* beides Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' = F(x, y), \quad y(x^*) = f(x^*),$$

welches aber nach dem Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 in dieser Umgebung eine *eindeutige* Lösung besitzt. Demnach gibt es aber eine Umgebung von x^*, in der $f - g$ verschwindet, was ein erneuter Widerspruch zur Definition von x^* ist.

q.e.d.

2.1.3 Fortsetzbarkeit von Lösungen

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung nur lokal, also in einer eventuell sehr kleinen Umgebung unserer Anfangsbedingung. Wir wollen nun sehen, inwieweit sich der Definitionsbereich solcher Lösungen erweitern lässt. Zentrales Hilfsmittel hierzu ist das folgende Lemma.

Lemma 2.1.16. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $(x_0, y_0) \in D$ und sein $F : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt.*

(i) *Sei $x_1 > x_0$ und $f_1 : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass f_1 auf dem halboffenen Intervall $[x_0, x_1)$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ist und $(x_1, f_1(x_1)) \in D$ gilt.

Dann ist f_1 auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_1]$ eine Lösung des Anfangswertproblems und es existieren $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\tilde{f}_1 : [x_0, x_1 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems mit $\tilde{f}_1|_{[x_0,x_1]} = f_1$.

(ii) *Sei $x_2 < x_0$ und $f_2 : [x_2, x_0] \to \mathbb{R}^n$ stetig, so dass f_2 auf dem halboffenen Intervall $(x_2, x_0]$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

ist und $(x_2, f_2(x_2)) \in D$ gilt.

Dann ist f_2 auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_2, x_0]$ eine Lösung des Anfangswertproblems und es existieren $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\tilde{f}_2 : [x_2 - \varepsilon, x_0] \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems mit $\tilde{f}_2|_{[x_2,x_0]} = f_2$.

Beweis. Die Beweise von (i) und (ii) verlaufen komplett analog, so dass wir nur (i) beweisen wollen. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir im Folgenden $f = f_1$ und $\tilde{f} = \tilde{f}_1$.

Nach Lemma 2.1.8 ist die Funktion f der Fixpunkt eines Integraloperators, das bedeutet für alle $x \in [x_0, x_1)$ gilt

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\mathrm{d}t.$$

Nach Voraussetzung ist f in x_1 stetig, also gilt dies auch noch für $x = x_1$, so dass f wieder nach Lemma 2.1.8 auch auf dem abgeschlossenen Intervall $[x_0, x_1]$ das Anfangswertproblem löst.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 gibt es nun ein $\varepsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$y' = F(x, y), \quad y(x_1) = f(x_1)$$

auf dem Intervall $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ eine eindeutige Lösung $g : [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ besitzt. Wir definieren nun die Funktion $\tilde{f} : [x_0, x_1 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x_0 \leq x \leq x_1 \\ g(x) & x_1 < x \leq x_1 + \varepsilon. \end{cases}$$

Offenbar ist $\tilde{f}$ dann auf dem gesamten Intervall $I = [x_0, x_1 + \varepsilon]$ stetig und auf $I \setminus \{x_1\}$ auch differenzierbar. Da die beiden einseitigen Ableitungen von $\tilde{f}$ offenbar beide gleich $F(x_1, f(x_1))$ sind, ist $\tilde{f}$ in der Tat auf dem gesamten Intervall I differenzierbar (siehe Lemma A.5.5) und somit dort eine Lösung unseres Anfangswertproblems.

q.e.d.

Bemerkung 2.1.17. *Für spätere Zwecke merken wir an dieser Stelle an, dass der Beweis von Lemma 2.1.16 die Lipschitz-Bedingung nur benutzt, um über den Satz von Picard-Lindelöf die Existenz einer Lösung zu zeigen. Ist die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems anderweitig garantiert, so gilt die Aussage von Lemma 2.1.16 auch, wenn man lediglich die Stetigkeit von F fordert.*

Hiermit erhalten wir folgendes Resultat über die Fortsetzbarkeit von Lösungen.

Satz 2.1.18. *Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall, $D = J \times \mathbb{R}^n$ und $F : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer* ***globalen*** *Lipschitz-Bedingung auf D mit Lipschitz-Konstante $L > 0$.*
Dann hat für alle $(x_0, y_0) \in D$ das Anfangswertproblem

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

eine eindeutige Lösung, die auf dem gesamten Intervall J existiert.

Beweis. Die Eindeutigkeit der Lösung folgt sofort aus Korollar 2.1.15.

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 (i) existiert nun ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für jeden Anfangswert $(x_0, y_0) \in D$ eine eindeutige Lösung auf $[x_0 - \varepsilon_0, x_0 + \varepsilon_0] \cap J$ existiert. Durch k-maliges Anwenden ($k \in \mathbb{N}$) von Lemma 2.1.16 können wir nun diese Lösung sowohl nach links auf das Intervall $[x_0 - k\varepsilon_0, x_0] \cap J$ und nach rechts auf $[x_0, x_0 + k\varepsilon_0] \cap J$ fortsetzen und damit auf ganz J, was wir behauptet hatten.

q.e.d.

Wenn die Funktion F in Satz 2.1.18 allgemeiner nur lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, erhalten wir folgende, etwas schwächere Aussage.

Satz 2.1.19. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitzbedingung. Weiter sei $f : [x_0, x_1) \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Differentialgleichungssystems*

$$y' = F(x, y),$$

so dass eine kompakte Menge $K \subseteq D$ existiert mit $(x, f(x)) \in K$ für alle $x \in [x_0, x_1)$.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Lösung $\tilde{f} : [x_0, x_1 + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n$ des Systems mit $\tilde{f}|_{[x_0,x_1)} = f$.

Beweis. Jede Komponente F_i von F ist stetig und somit auf der kompakten Menge K beschränkt, es existiert also ein $M > 0$ mit

$$|F_i(x, y)| \leq M \quad \text{für alle } (x, y) \in K, i = 1, ..., n.$$

Für die i-te Komponente f_i unserer Lösung f ergibt sich nun nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (siehe Satz A.5.3) für alle $u, v \in [x_0, x_1)$, dass

$$|f_i(u) - f_i(v)| = |f_i'(\xi)| \cdot |u - v| = |F_i(\xi, f(\xi))| \cdot |u - v|$$

für ein $\xi \in [u, v]$ gilt, also haben wir

$$|f_i(u) - f_i(v)| \leq M \cdot |u - v|.$$

Sei nun $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[x_0, x_1)$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = x_1$. Dann ist gemäß der obigen Überlegung die Folge $(f_i(z_n))_n$ eine Cauchy-Folge und damit konvergent. Den Grenzwert definieren wir als $\lim_{n\to\infty} f_i(z_n) = c_i$. Sei nun $(\tilde{z}_n)_n$ eine weitere Folge in $[x_0, x_1)$ mit $\lim_{n\to\infty} \tilde{z}_n = x_1$. Dann konvergiert nach demselben Argument auch die Folge $(f_i(\tilde{z}_n))_n$ gegen einen Grenzwert $\tilde{c}_i$. Definiert man nun die dritte Folge $(z_n^*)_n$ durch

$$z_n^* = \begin{cases} \tilde{z}_{n/2} & n \text{ gerade,} \\ z_{(n+1)/2} & n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

so folgt wieder, dass $(f(z_n^*))_n$ konvergent ist. Wir haben aber offenbar eine Teilfolge $(f(z_{2n}^*))_n = (f(\tilde{z}_n))_n$, die gegen $\tilde{c}_i$ konvergiert, und eine weitere Teilfolge $(f(z_{2n-1}^*))_n = (f(z_n))_n$, die gegen c_i konvergiert, deren Grenzwerte somit übereinstimmen müssen, d.h. es gilt $c_i = \tilde{c}_i$.

Damit ist die Funktion

$$f_i^* : [x_0, x_1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} f_i(x) & x < x_1 \\ c_i & x = x_1 \end{cases}$$

auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig (vgl. Satz A.4.3) und ist dort eine Lösung unseres Anfangswertproblems. Wegen Lemma 2.1.16 folgt nun die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 2.1.20. *Satz 2.1.19 behandelt nur die Fortsetzung einer Lösung nach rechts, aber die analoge Aussage gilt natürlich entsprechend auch für die Fortsetzung nach links.*

Damit können wir nun auch den zuvor zurückgestellten Beweis des Fortsetzungssatzes 1.4.5 über autonome Gleichungen nachliefern. Wir verwenden die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.4.1.

Beweis von Satz 1.4.5 Da G stetig partiell differenzierbar ist, genügt G nach Lemma 2.1.12 einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Angenommen, es existiert ein $b \in \mathbb{R}$ mit $I_{max}(z) \cap [0, \infty) = [0, b)$. Dann wäre die Menge

$$\{(x, \Phi(x; z)) \,:\, x \in I_{max}(z) \text{ und } x \geq 0\}$$

in dem Kompaktum $[0, b] \times K$ in $\mathbb{R} \times D$ enthalten. Dann lässt sich die Lösung $\Phi(x; z)$ nach Satz 2.1.19 auf ein größeres Intervall fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität von $I_{max}(z)$.

Die Behauptung für $I_{max} \cap (-\infty, 0]$ folgt analog.

q.e.d.

Wir wollen nun noch untersuchen, wie weit sich in gewisser Weise unsere Lösungen fortsetzen lassen.

Satz 2.1.21. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung.*

(i) Für jedes $(x_0, y_0) \in D$ existieren ein offenes Intervall I mit $x_0 \in I$ und eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

so dass für jede weitere Lösung $g : J \to \mathbb{R}^n$, wobei J ein Intervall mit $x_0 \in J$ sei, gilt, dass

$$J \subseteq I \quad \text{und} \quad g = f|_J.$$

(ii) Für I und f wie in (i) ist keine der Mengen

$$\Gamma^+ := \{(x, f(x)) \,:\, x \in I,\ x \geq x_0\}, \quad \Gamma^- := \{(x, f(x)) \,:\, x \in I,\ x \leq x_0\}$$

in einer kompakten Teilmenge von D enthalten.

Beweis.

(*i*) Es bezeichne M die Menge aller Intervalle J mit $x_0 \in J$, so dass eine Lösung $f_J : J \to \mathbb{R}^n$ des Anfangswertproblems existiert. Wir definieren nun $I := \bigcup_{J \in M} J$ und definieren

$$f(x) := f_J(x) \quad \text{für ein } J \in M \text{ mit } x \in J.$$

Damit ist f wohldefiniert, denn gilt $x \in J_1$ und $x \in J_2$, so stimmen nach Korollar 2.1.15 die Lösungen f_{J_1} und f_{J_2} auf dem Schnitt $J_1 \cap J_2$ überein, insbesondere gilt also $f_{J_1}(x) = f_{J_2}(x)$. Zudem löst f offenbar das Anfangswertproblem auf I und I ist maximal mit dieser Eigenschaft.

Es bleibt zu zeigen, dass I offen ist. Angenommen, I wäre auf der rechten Seite abgeschlossen, es gäbe also ein $x_1 > x_0$ mit $I \cap [x_0, \infty) = [x_0, x_1]$. Dann gilt aufgrund der Stetigkeit von F die Gleichung $f'(x) = F(x, f(x))$ auch für $x = x_1$ und weil das Gebiet D offen ist, ist auch eine Umgebung von $(x_1, f(x_1))$ noch in D enthalten. Dann können wir aber nach Lemma 2.1.16 unsere Lösung auf ein Intervall $[x_0, x_1 + r]$ für ein $r > 0$ fortsetzen, was der Maximalität von I widerspricht.

Die Annahme, dass I linksseitig abgeschlossen ist, führt man mit derselben Überlegung zu einem Widerspruch und erhält so die Behauptung.

(*ii*) Ist I unbeschränkt, so ist nichts zu zeigen. Wir können also $I = (x_2, x_1)$ annehmen. Wäre etwa die Menge Γ^+ in einer kompakten Menge $K \subseteq D$ enthalten, so folgt aus dem Fortsetzungssatz 2.1.19, dass wir die Lösung f auf ein Intervall $[x_0, x_1 + \varepsilon]$ fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität von I. Aus der Annahme $\Gamma^- \subseteq K$ erhält man ebenso einen Widerspruch (vgl. Bemerkung 2.1.20) und hat damit die Behauptung gezeigt.

q.e.d.

Nach dem Reduktionssatz 1.2.8 lassen sich natürlich alle bisherigen Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen auf Differentialgleichungen n-ter Ordnung übertragen.

Korollar 2.1.22. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $F : D \to \mathbb{R}^n$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Dann existiert für jedes $(x_0, y_0^{(0)}, ..., y_0^{(n-1)}) \in D$ ein maximales offenes Intervall I mit $x_0 \in I$, so dass eine eindeutige Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$y^{(n)} = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \quad y(x_0) = y_0^{(0)}, y'(x_0) = y_0^{(1)}, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

gibt. Für jede weitere Lösung $g : J \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems gilt dann

$$J \subseteq I \quad \text{und} \quad g = f|_J.$$

2.1.4 Beispiele

Betrachten wir einige Beispiele.

Beispiel 2.1.23. Betrachten wir folgende Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' = -y.$$

Offenbar sind sowohl $\cos(x)$ als auch $\sin(x)$ Lösungen. Eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' = -y, \quad y(0) = a,\ y'(0) = b$$

ist dann natürlich gegeben durch $a\cos(x) + b\sin(x)$. Da die Funktion $F(x, y_1, y_2) = -y_1$ auf dem gesamten Gebiet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ einer Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante $L = 1$ genügt, folgt mit Satz 2.1.18 sofort, dass das Anfangswertproblem eine auf ganz $\mathbb{R}$ eindeutige Lösung besitzt. Demnach lassen sich **alle** Lösungen der Differentialgleichung $y'' = -y$ als Linearkombination von $\cos(x)$ und $\sin(x)$ darstellen.

Das folgende Beispiel illustriert, dass man zumindest für die Eindeutigkeit der Lösung nicht ohne Weiteres auf die (lokale) Lipschitz-Bedingung verzichten kann, die wir in der bisherigen Resultaten angenommen hatten.

Beispiel 2.1.24. Sei $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto\mapsto 3y^{2/3}$ und betrachte die Differentialgleichung

$$y' = 3y^{2/3}.$$

Die Funktion F ist zwar überall stetig, genügt aber in keiner Umgebung von $(0, 0)$ einer lokalen Lipschitz-Bedingung. Als Lösungen für die Differnentialgleichung hat man einerseits die konstante Funktion $f_0 \equiv 0$, aber auch, wie man leicht nachrechnet, für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $g_a(x) = (x - a)^3$. Wir haben also $f_0(a) = g_a(a) = 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(a) = 0$$

keine eindeutige Lösung mehr hat. In der Tat ist für alle $b, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ mit $b \leq a \leq c$ die Funktion

$$g(x) := \begin{cases} (x-b)^3 & x \leq b \\ 0 & b < x < c \\ (x-c)^3 & x \geq c \end{cases}$$

ebenfalls eine Lösung.

2.2 Existenz von Lösungen nach Peano

Für die Existenz und v.a. Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen

$$y' = F(x, y)$$

nach dem Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 ist die Lipschitz-Bedingung zusätzlich zur Stetigkeit von F essentiell. In diesem Abschnitt wollen wir im Wesentlichen zeigen, dass wir zumindest die Existenz einer Lösung, aber im Allgemeinen nicht ihre Eindeutigkeit auch dann garantieren, wenn die rechte Seite $F(x, y)$ lediglich stetig ist. Zur Vereinfachung betrachten wir nur Differentialgleichungen erster Ordnung, keine Systeme.

2.2.1 Der Satz von Arzelà-Ascoli

Wir führen zunächst einen neuen allgemeinen Begriff ein. Hierfür sei stets $\|\cdot\|$ eine fest gewählte Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^m$, beispielsweise die Maximumsnorm (vgl. Abschnitt 2.1.1).

Definition 2.2.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$.

(i) Wir nennen die Folge $(f_n)_n$ **gleichgradig stetig** in $x \in D$, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f_n(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \|x - y\| < \delta.$$

Ist die Folge $(f_n)_n$ in jedem $x \in D$ gleichgradig stetig, so nennen wir sie gleichgradig stetig **auf** D.

(ii) Wir nennen die Folge $(f_n)_n$ **gleichmäßig gleichgradig stetig** auf D, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f_n(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } \|x - y\| < \delta.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge gleichmäßig stetig ist (vgl. Definition A.4.2 und Satz A.4.4). Hier betrachten wir eine Erweiterung dieses Resultates.

Lemma 2.2.2. *Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und $(f_n)_n$ eine gleichgradig stetige Folge von Funktionen $f_n : K \to \mathbb{R}$. Dann ist die Folge $(f_n)_n$ gleichmäßig gleichgradig stetig.*

Beweis. Angenommen, die Folge $(f_n)_n$ wäre gleichgradig stetig, aber nicht gleichmäßig gleichgradig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$, Folgen $(x_k)_k$ und $(y_k)_k$ aus K mit $\|x_k - y_k\| \to 0$ for $k \to \infty$, und eine Teilfolge $(n_k)_k$, so dass

$$|f_{n_k}(x_k) - f_{n_k}(y_k)| \geq \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, existiert eine Teilfolge $(x_{k_\ell})_\ell$, die gegen einen Grenzwert $x^* \in D$ konvergiert. Wegen $\|x_k - y_k\| \to 0$ konvergiert dann auch die Teilfolge $(y_{k_\ell})_\ell$ gegen denselben Grenzwert x^*.

Da die Folge $(f_n)_n$ gleichgradig stetig ist, existiert nun ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_n(x) - f_n(x^*)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für alle } x \in K \text{ mit } \|x - x^*\| < \delta$$

gilt. Wählen wir nun ℓ hinreichend groß, so dass $\|x_{k_\ell} - x^*\| < \delta$ und $\|y_{k_\ell} - x\| < \delta$ gilt, dann folgt

$$\varepsilon \leq |f_{n_{k_\ell}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{k_\ell}}(y_{k_\ell})| \leq |f_{n_{k_\ell}}(x_{k_\ell}) - f_{n_{k_\ell}}(x^*)| + |f_{n_{k_\ell}}(y_{k_\ell}) - f_{n_{k_\ell}}(x^*)| < \varepsilon,$$

also ein Widerspruch und die Behauptung folgt.

q.e.d.

Wir kommen nun zum Satz von Arzelà-Ascoli. Dieser ist in gewisser Weise eine Version des bekannten Satzes von Bolzano-Weierstrass (vgl. Satz A.1.5) für Funktionenfolgen und wird ein zentrales Hilfsmittel für den angestrebten Existenzsatz sein.

Satz 2.2.3 (Arzelà-Ascoli). *Sei $K \subset \mathbb{R}^m$ kompakt und sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : K \to \mathbb{R}$. Zudem sei die Folge $(f_n)_n$ gleichgradig stetig und beschränkt, d.h. es gebe ein $M > 0$, so dass für alle $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $|f_n(x)| \leq M$. Dann existiert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$ (vgl. Definition A.1.7) und ihre Grenzfunktion ist stetig.*

Beweis. Der Beweis besteht aus insgesamt fünf Schritten:

1. Schritt: Wir konstruieren zunächst eine geeignete abzählbare dichte Teilmenge von K. Es bezeichne für $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^m$

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^m \;:\; \|x - y\| < r\}$$

die offene Kugel vom Radius r um x. Hiermit definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{U}_k := \{B_{2^{-k}}(x) : x \in K\}$ aller Kugeln mit Radius 2^{-k} um alle Punkte in K. Dann liefert $\mathcal{U}_k$ eine offene Überdeckung der kompakten Menge K, so dass es nach dem Satz von Heine-Borel (vgl. Satz A.3.4) eine endliche Teilüberdeckung gibt. Zu jedem k existiert also ein $m_k \in \mathbb{N}$ und Punkte $x_{k,1}, ..., x_{k,m_k} \in K$, so dass schon die m_k Kugeln $B_{2^{-k}}(x_{k,j})$, $j = 1, ..., m_k$, ganz K überdecken. Wir definieren dann die Menge aller dieser Punkte

$$T := \{x_{k,j} \;:\; k \in \mathbb{N}, j = 1, ..., m_k\}.$$

Als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen ist T abzählbar und nach Konstruktion dicht in K.

2. Schritt: Wir konstruieren nun eine Teilfolge von $(f_n)_n$, die auf der Menge T konvergiert. Wir verwenden dazu ein Diagonalfolgen-Argument. Da T abzählbar ist, definieren die Elemente von T eine Folge $(x_k)_k$.Nach Voraussetzung ist nun die (Zahlen-)Folge

$(f_n(x_1))_n$ beschränkt, so dass nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass (vgl. Satz A.1.5) eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{1,\ell}}(x_1))_\ell$ existiert. Die Folge $(f_{n_{1,\ell}}(x_2))_\ell$ ist wiederum beschränkt, also existiert eine konvergente Teilfolge $(f_{n_{2,\ell}}(x_2))$. Man beachte, dass nach Konstruktion auch die Folge $(f_{n_{2,\ell}}(x_1))_\ell$ konvergiert. Setzen wir diese Konstruktion für alle x_k genauso fort, so erhalten wir nach m Schritten eine Folge $(f_{n_{m,\ell}})_\ell$, die in jedem Punkt $x_1, ..., x_m$ konvergiert. Setzen wir nun für jedes $\ell \geq 1$ $f_{n_\ell} := f_{n_{\ell,\ell}}$, so konvergiert die Folge $(f_{n_\ell})_\ell$ auf der ganzen Menge T. Für $x \in T$ definieren wir

$$f(x) := \lim_{\ell\to\infty} f_{n_\ell}(x).$$

3. Schritt: Wir zeigen nun die (punktweise) Konvergenz der im 2. Schriit konstruierten Teilfolge $(f_{n_\ell})_\ell$ auf der gesamten Menge K. Dazu sei $x \in K \setminus T$. Da T dicht in K liegt, existiert eine Folge $(x_n)_n$ aus T mit $x_n \to x, n \to \infty$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da K kompakt ist, ist die Folge $(f_n)_n$ nach Lemma 2.2.2 gleichmäßig gleichgradig stetig. Es existiert also ein von n unabhängiges $\delta > 0$, so dass für alle n, k mit $\|x_n - x_k\| < \delta$ die Ungleichung

$$|f_n(x_n) - f_n(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Wir können nun ℓ hinreichend groß wählen, so dass auch $|f(x_n) - f_{n_\ell}(x_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ und $|f_{n_\ell}(x_k) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ gelten.

Wählen wir nun N hinreichend groß, so dass $\|x_n - x\| < \frac{\delta}{2}$ für alle $n > N$ gilt, so folgt $\|x_n - x_k\| < \delta$ für alle $n, k > N$ und somit auch

$$|f(x_n) - f(x_k)| \leq |f(x_n) - f_{n_\ell}(x_n)| + |f_{n_\ell}(x_n) - f_{n_\ell}(x_k)| + |f_{n_\ell}(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon.$$

Damit ist die Folge $(f(x_n))_n$ eine Cauchy-Folge, also konvergent.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Grenzwert nicht von der gewählten Folge $(x_n)_n$ abhängt. Sei $(\tilde{x}_n)_n$ eine weitere Folge aus T mit $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x$. Dann gilt

$$|f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \leq |f(x_n) - f_{n_\ell}(x_n)| + |f_{n_\ell}(x_n) - f_{n_\ell}(\tilde{x}_n)| + |f_{n_\ell}(\tilde{x}_n) - f(x_n)|,$$

was wir mit ähnlichen Argumenten wie zuvor abschätzen können.

4. Schritt: Wir zeigen die (gleichmäßige) Stetigkeit der Grenzfunktion f auf K. Zu zeigen ist wegen der Kompaktheit von K nur die Stetigkeit von f. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen, gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenfolge $(f_n)_n$ auf dem Kompaktum K existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in K$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt, dass

$$|f_{n_\ell}(x) - f_{n_\ell}(y)| < \frac{1}{5}\varepsilon.$$

Man beachte, dass δ unabhängig von x, y, n_ℓ gewählt werden kann. Seien nun $x^*, y^* \in K$ beliebig mit $\|x^* - y^*\| < \frac{1}{2}\delta$ und $(x_n)_n, (y_n)_n$ Folgen aus T mit $x_n \to x^*$ bzw. $y_n \to y^*$ für $n \to \infty$. Wir können nun n hinreichend groß wählen, dass $\|x_n - y_n\| < 2\|x^* - y^*\| < \delta$

gilt. Indem wir n ggf. noch größer wählen, können wir nach Definiton von f ebenfalls erreichen, dass

$$|f(x^*) - f(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon \quad \text{und} \quad |f(y^*) - f(y_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$$

gilt. Weiterhin gilt für hinreichend große ℓ wegen der punktweisen Konvergenz der Teilfolge $(f_{n_\ell})_\ell$ auf der Menge T, dass auch

$$|f(x_n) - f_{n_\ell}(x_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon \quad \text{und} \quad |f(y_n) - f_{n_\ell}(y_n)| < \frac{1}{5}\varepsilon$$

gilt. Insgesamt erhalten wir somit

$$\begin{aligned} &|f(x^*) - f(y^*)| \\ \leq &|f(x^*) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_{n_\ell}(x_n)| + |f_{n_\ell}(x_n) - f_{n_\ell}(y_n)| \\ &\qquad\qquad + |f_{n_\ell}(y_n) - f(y_n)| + |f(y_n) - f(y^*)| \\ < &\varepsilon, \end{aligned}$$

und somit die Stetigkeit von f auf ganz K.

<u>*5. Schritt:*</u> Es bleibt noch, die gleichmäßige Konvergenz der Teilfolge $(f_{n_\ell})_\ell$ zu zeigen. Diese folgt aus der Kompaktheit von K. Nehmen wir im Gegenteil an, die Folge sei nicht gleichmäßig konvergent, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(f_{n_{\ell_k}})_k$, sowie $x_k \in K$ $(k \in \mathbb{N})$, so dass

$$|f_{n_{\ell_k}}(x_k) - f(x_k)| > \varepsilon_0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Da K kompakt ist, besitzt die Folge $(x_k)_k$ eine konvergente Teilfolge (x_{k_j}) mit Grenzwert $\tilde{x} \in K$. Wählen wir nun eine Folge $(\tilde{x}_n)_n$ aus der dichten Menge T mit $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenfolge existiert nun ein $\delta > 0$, so dass für $x, y \in K$ mit $\|x - y\| < \delta$ die Abschätzung

$$f_{n_{\ell_{k_j}}}(x) - f_{n_{\ell_{k_j}}}(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$$

gilt, wobei wir wieder δ unabhängig von j, x, und y wählen können. Für hinreichend große j und n ist nun $\|x_{k_j} - \tilde{x}_n\| < \delta$. Wegen der Stetigkeit von f können wir zudem (indem wir ggf. j und n noch größer wählen), auch

$$|f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_j})| < \frac{1}{3}\varepsilon_0$$

annehmen. Wegen der punktweisen Konvergenz der Folge f_{n_ℓ}, und somit jeder ihrer Teilfolgen, haben wir zudem für hinreichend großes j die Abschätzung

$$|f_{n_{\ell_{k_j}}}(\tilde{x}_n) - f(x_n)| < \frac{1}{3}\varepsilon_0.$$

Für genügend große j und n gilt also

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 < &|f_{n_{\ell_{k_j}}}(x_{k_j}) - f(x_{k_j})| \\ \leq &|f_{n_{\ell_{k_j}}}(x_{k_j}) - f_{n_{\ell_{k_j}}}(\tilde{x}_n)| + |f_{n_{\ell_{k_j}}}(\tilde{x}_n) - f(\tilde{x}_n)| + |f(\tilde{x}_n) - f(x_{k_j})| \\ < &\varepsilon_0, \end{aligned}$$

was offenbar nicht sein kann. Damit haben wir unsere Annahme, dass die Teilfolge $(f_{n_\ell})_\ell$ nicht gleichmäßig konvergiert, zu einem Widerspruch geführt, und die Behauptung folgt.

q.e.d.

2.2.2 Der Existenzsatz von Peano

Ein wesentliches Hilfsmittel im Beweis zum Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 ist der Banach'sche Fixpunktsatz 2.1.7, den wir im Wesentlichen aufgrund der geforderten (lokalen) Lipschitz-Bedingung, der die rechte Seite $F(x,y)$ unserer Differentialgleichung

$$y' = F(x,y)$$

genügen muss, anwenden konnten. Dieser garantiert dann neben der (lokalen) Existenz auch die Eindeutigkeit einer Lösung. Wie wir etwa in Beispiel 2.1.24 gesehen haben, ist die Eindeutigkeit allerdings nicht mehr zu garantieren, wenn wir auf die Forderung der lokalen Lipschitz-Bedingung verzichten. Wir wollen hier nun zeigen, dass die Stetigkeit von F ausreicht, um die Existenz, wenn auch nicht die Eindeutigkeit, einer Lösung zu garantieren.

Dazu betrachten wir zunächst das folgende Resultat, welches ein entscheidende Hilfsmittel für den Beweis des Satzes von Peano 2.2.7 sein wird.

Proposition 2.2.4. *Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ und $F : [x_0, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann existiert mindestens eine Lösung $f : [x_0, b] \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Funktion

$$f_n : (-\infty, b] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} y_0, & x \le x_0 \\ y_0 + \int_{x_0}^x F\left((t, f_n\left(t - \frac{1}{n}\right)\right) \mathrm{d}t, & x_0 < x \le b. \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass diese Definition von f_n in der Tat sinnvoll ist und eine stetige Funktion liefert: Zunächst gilt für $x \in [x_0, x_0 + \frac{1}{n}]$ (also $x - \frac{1}{n} \le x_0$, nach obiger Definition

$$f_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, y_0)\mathrm{d}t,$$

was wegen der Stetigkeit von F wohldefiniert und stetig ist. Nehmen wir nun an, f_n sei auf dem Intervall $[x_0, x_0 + \frac{m}{n}]$ für ein $m \in \mathbb{N}$ wohldefiniert und stetig (wobei wir $x_0 + \frac{m+1}{n} \le b$ annehmen). Dann gilt für $x \in (x_0 + \frac{m}{n}, x_0 + \frac{m+1}{n}]$

$$f_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F(t, f_n(t - \frac{1}{n}))\mathrm{d}t$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist für das gewählte x der Ausdruck $t-\frac{1}{n}$ stets in $[x_0, x_0+\frac{m}{n}]$ enthalten, wo nach Induktionsvoraussetzung f_n wohldefiniert und stetig ist, also folgt dasselbe auch für das Intervall $[x_0, x_0+\frac{m+1}{n}]$ und somit per Induktion auf dem gesamten Definitionsbereich.

Nach Voraussetzung ist F beschränkt, sagen wir $|F(x,y)| \leq M$ für ein $M > 0$. Damit folgt

$$|f_n(x)| \leq |y_0| + M(b - x_0) =: C$$

und für $x, x^* \in [x_0, b]$

$$|f_n(x) - f_n(x^*)| \leq \left| \int_x^{x^*} F\left(t, f_n\left(t - \frac{1}{n}\right)\right) \mathrm{d}t \right| \leq M|x - x^*|.$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_n$ ist somit beschränkt und gleichgradig stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$.

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli 2.2.3 existiert somit eine gleichmäßig konvergente Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_n$. Die Grenzfunktion bezeichnen wir mit $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$. Als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen ist f^* selbst stetig (vgl. Satz A.4.6). Wir haben nun

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[x_0,b]} |f_{n_k}(x) - f^*(x)| = 0.$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\left| f_{n_k}\left(x - \frac{1}{n_k}\right) - f^*(x) \right| \\
\leq &\left| f_{n_k}\left(x - \frac{1}{n_k}\right) - f_{n_k}(x) \right| + |f_{n_k}(x) - f^*(x)| \\
\leq &\frac{M}{n_k} + |f_{n_k}(x) - f^*(x)|
\end{aligned}$$

gilt also auch

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in[x_0,b]} \left| f_{n_k}\left(x - \frac{1}{n_k}\right) - f^*(x) \right| = 0.$$

Somit konvergiert die Funktionenfolge $(\tilde{f}_k)_k$ mit $\tilde{f}_k(x) = f_{n_k}\left(x - \frac{1}{n_k}\right)$ ebenfalls gleichmäßig gegen f^*. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von F auf dem Kompaktum $[x_0, b] \times [-C, C]$ ist somit auch die Funktionenfolge $(F(\cdot, \tilde{f}_k(\cdot))_k$ gleichmäßig konvergent mit Grenzfunktion $x \mapsto F(x, f^*(x))$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz kann man Limesbildung und Integration vertauschen (vgl. Satz A.5.9) und erhält für $x \in [x_0, b]$

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} F\left(t, f_{n_k}\left(t - \frac{1}{n_k}\right)\right) \mathrm{d}t \right] \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[y_0 + \int_{x_0}^{x} F\left(t, \tilde{f}_k(t)\right) \mathrm{d}t \right] \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f^*(t))\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Somit ist die stetige Funktion f^* ein Fixpunkt des Operators

$$T : \mathscr{C}([x_0, b]) \to \mathscr{C}([x_0, b]),\ g \mapsto \left(x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, g(t))\mathrm{d}t \right),$$

also folgt nach Lemma 2.1.8, dass f^* eine Lösung unseres betrachteten Anfangswertproblems ist, also die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 2.2.5. *Während der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf mit der sogenannten Picard-Iteration ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Lösung liefert (vgl. Beispiel 2.1.14), ist dies für Proposition 2.2.4 nicht mehr der Fall. Der Satz von Arzelà-Ascoli liefert nur die Existenz einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge, aber keinen direkten Weg, diese zu konstruieren. In vielen konkreten Beispielen kann man allerdings zeigen, dass die zu Beginn des Beweises konstruierte Folge $(f_n)_n$ selbst schon gleichmäßig konvergiert.*

Bemerkung 2.2.6. *Durch eine leichte Modifikation der Konstruktion der Funktionenfolge $(f_n)_n$ im Beweis von Proposition 2.2.4 erhält man auch die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x, y), \quad y(b) = y_0$$

für beliebiges $y_0 \in \mathbb{R}$, mit fast wörtlich demselben Beweis.

Ist $F : [a, b] \times \mathbb{R}$ stetig und beschränkt und $x_0 \in (a, b)$, so erhält man die Existenz von jeweils mindestens einer Lösung auf den Intervallen $[a, x_0]$ bzw. $[x_0, b]$ mit der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$. Da diese in x_0 jeweils einseitig differenzierbar sind und die Ableitung dort den Wert $F(x_0, y_0)$ annehmen muss, erhält man auch die Existenz einer stetig differenzierbaren Lösung $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems auf dem gesamten Intervall $[a, b]$ (vgl. Lemma A.5.5).

Wir haben nun die nötige Vorarbeit für den Hauptsatz dieses Abschnittes geleistet.

Satz 2.2.7 (Peano). *Seien $I = [a,b], J = [c,d] \subset \mathbb{R}$ kompakte Intervalle, $F : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und $x_0 \in (a,b)$ und $y_0 \in (c,d)$ innere Punkte von I bzw. J. Dann gelten folgende Aussagen.*

(*i*) *Für das Anfangswertproblem*

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

gibt es ein abgeschlossenes Intervall $I_0 = [x_-, x_+] \subset I$ mit $x_0 \in (x_-, x_+)$ und (mindestens) eine stetig differenzierbare Funktion $f : I_0 \to \mathbb{R}$, die das Anfangswertproblem löst.

(*ii*) *Jede Lösung von (1) lässt sich bis auf den Rand von $I \times J$ fortsetzen: Ist $f : (x_-, x_+) \to \mathbb{R}$ eine Lösung mit (x_-, x_+) maximal, dann lässt sich die Lösung auf $[x_-, x_+]$ fortsetzen und es gilt*

$$x_- = a \text{ oder } f(x_-) = c \text{ oder } f(x_-) = d$$

und

$$x_+ = b \text{ oder } f(x_+) = c \text{ oder } f(x_+) = d.$$

Beweis.

(*i*) Wir setzen die Funktion F fort zu einer stetigen Funktion

$$\tilde{F} : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = \begin{cases} F(x,c) & y < c \\ F(x,y) & y \in [c,d] \\ F(x,d) & y > d. \end{cases}.$$

Dann ist $\tilde{F}$ offenbar auf ganz $I \times \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, denn offenbar gilt

$$|\tilde{F}(x,y)| \leq \max\{|F(x,y)| : (x,y) \in I \times J\} =: M$$

für alle $(x,y) \in I \times \mathbb{R}$. Nach Proposition 2.2.4 wissen wir also, dass eine stetig differenzierbare Lösung $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$y' = \tilde{F}(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

existiert (vgl. auch Bemerkung 2.2.6). Es folgt also auch $|\tilde{F}(x, \tilde{f}(x))| \leq M$ für alle $x \in [a,b]$ und wir haben als direkte Konsequenz aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung A.5.3

$$|\tilde{f}(x) - y_0| \leq M|x - x_0|.$$

Für $x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ mit

$$\rho := \frac{1}{M} \min\{d - y_0, y_0 - c\}$$

folgt daher sicherlich $\tilde{f}(x) \in [c, d]$ und damit $\tilde{F}(x, \tilde{f}(x)) = F(x, \tilde{f}(x))$. Also ist $\tilde{f}$ auch eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

und die Behauptung folgt.

(*ii*) Diese Behauptung folgt genau wie im Beweis von Lemma 2.1.16. Man beachte hierbei auch Bemerkung 2.1.17, laut der die dort (und hier nicht) vorausgesetzte Lipschitz-Bedingung für den Beweis der Fortsetzbarkeit einer Lösung nicht essentiell ist.

q.e.d.

Vergleicht man die Beweise des Satzes von Picard-Lindelöf 2.1.13 und von Proposition 2.2.4, so ist die Konstruktion der Approximationsfolge (von der im letzteren Fall aber nur eine Teilfolge zu konvergieren braucht!) recht ähnlich. Die Modifikation der Konstruktion für den Beweis von Proposition 2.2.4 ist jedoch notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 2.2.8. Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y' = 2x - 2\sqrt{\max\{y, 0\}}, \quad y(0) = 0.$$

Für die Picard-Iteration (vgl. Beispiel 2.1.14) betrachten wir die Funktionenfolge $(f_n)_n$ definiert durch $f_0(x) = 0$ und

$$f_{n+1}(x) := \int_0^x 2t - 2\sqrt{\max\{f_n(t), 0\}}\mathrm{d}t.$$

Damit erhalten wir für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= 0 \\
f_1(x) &= \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2 \\
f_2(x) &= \int_0^x 2t - 2\sqrt{\max\{t^2, 0\}}\mathrm{d}t = \int_0^x 2t - 2\sqrt{t^2}\mathrm{d}t = 0 \\
f_3(x) &= \int_0^x 2t\mathrm{d}t = x^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wie man leicht durch Induktion einsieht, gilt stets $f_{2n}(x) = 0$ und $f_{2n+1}(x) = x^2$. Die Folge ist also offenbar nicht konvergent. Wählt man konvergente Teilfolgen, so gibt es zwei mögliche Grenzfunktionen, $f_*(x) = 0$ und $f^*(x) = x^2$. Beide erfüllen aber nicht die Differentialgleichung, ergeben also keine Lösung unseres Anfangswertproblems.

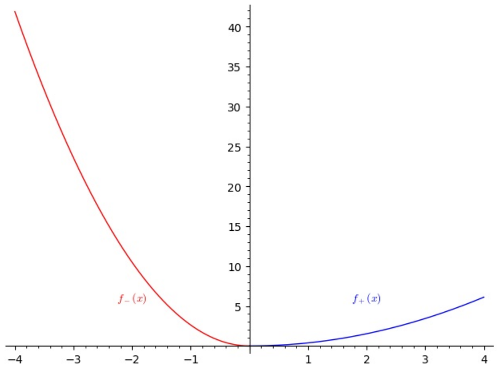

Abbildung 2.2: Lösung des Anfangswertproblems $y' = 2x - 2\sqrt{\max\{y, 0\}},\ y(0) = 0$.

Laut dem Satz von Peano 2.2.7 wissen wir aber, dass es eine Lösung geben muss. Man kann diese in diesem Fall sogar bestimmen: Durch den **Ansatz** $f_+(x) = cx^2$ für eine Konstante $c \geq 0$ erhält man aus der Differentialgleichung für $x \geq 0$

$$f_+'(x) = 2cx \quad \text{und} \quad 2x - 2\sqrt{\max\{f_+(x), 0\}} = 2(1 - \sqrt{c})x,$$

d.h. es muss gelten $c = 1 - \sqrt{c}$, also $c = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Da auch die Anfangsbedingung erfüllt ist, ist also

$$f_+(x) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} x^2$$

für $x \geq 0$ eine Lösung des Anfangswertproblems.

Auf analoge Weise erhält man für $x \leq 0$ die Funktion

$$f_-(x) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} x^2$$

als Lösung. Beide Lösungen lassen sich zu einer Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ zusammensetzen, und man erhält

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} x^2 & x \geq 0 \\ \frac{3+\sqrt{5}}{2} x^2 & x < 0 \end{cases}$$

als Lösung des Anfangswertproblems auf ganz $\mathbb{R}$. Tatsächlich ist diese Lösung sogar eindeutig bestimmt (Übung).

Kapitel 3

Lineare Differentialgleichungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Systemen linearer Differentialgleichungen. Diese spielen in vielen Anwendungen eine extrem wichtige Rolle, da einerseits viele Beispiele wichtiger Differentialgleichungen linear sind oder sich auf lineare Gleichungen zurückführen lassen. In diesem Kapitel und späteren Kapiteln benötigen wir einige zentrale Resultate aus der Linearen Algebra (vgl. auch Appendix B).

3.1 Lineare Systeme von Differentialgleichungen

3.1.1 Strukturaussagen

Einzelne lineare Differentialgleichungen haben wir bereits in Abschnitt 1.3.2 behandelt. Die Definition für Systeme sieht formal ähnlich aus.

Definition 3.1.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine matrix-wertige stetige Funktion und $b : I \to \mathbb{R}^n$ eine vektor-wertige stetige Funktion.

(i) Dann heißt

$$y' = A(x)y$$

ein **homogenes lineares Differentialgleichungssystem** erster Ordnung.

(ii) Man nennt

$$y' = A(x)y + b(x)$$

ein **inhomogenes** lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung und $y' = A(x)y$ das zugehörige homogene Differentialgleichungssystem.

Bemerkung 3.1.2. *Es wird sich als praktisch erweisen, für die Matrixfunktion A und die Vektorfunktion b in Definition 3.1.1 auch komplex-wertige Funktionen zuzulassen, also A :*

$I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$. Eine Lösung des Systems ist dann eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}^n$, die

$$f'(x) = A(x)f(x) + b(x) \quad \text{für alle } x \in I$$

erfüllt. Die unabhängige Variable x bleibt dabei jedoch stets reell.

Der komplexe Fall lässt sich auf den reellen zurückführen (Übung).

Bemerkung 3.1.3. *Wie man sofort einsieht definiert $\mathcal{L}(f) := f' - A(x)f$ eine lineare Abbildung auf dem Raum der stetig differenzierbaren Funktionen $f : I \to \mathbb{C}^n$, d.h. es gilt*

$$\mathcal{L}(f + \alpha g) = \mathcal{L}(f) + \alpha\mathcal{L}(g)$$

für alle stetig differenzierbaren Funktionen f und g und $\alpha \in \mathbb{C}$. Eine stetig differenzierbare Funktion f ist offenbar genau dann eine Lösung des Systems

$$y' = A(x)y,$$

wenn $f \in \mathrm{Kern}(\mathcal{L})$ gilt. Insbesondere bilden damit alle Lösungen dieses Differentialgleichungssystems einen $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Diese Bemerkung können wir noch etwas präzisieren.

Satz 3.1.4. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$ stetige Funktionen. Dann gilt:*

(i) Zu jedem $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{C}^n$ existiert genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

welche auf ganz I definiert ist. Jede weitere Lösung von (1) ist eine Einschränkung dieser Lösung.

(ii) Zu jedem $x_0 \in I$ ist die Abbildung, die jedem $y_0 \in \mathbb{C}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = A(x)y, \quad y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

zuordnet, ein Isomorphismus von $\mathbb{C}$-Vektorräumen. Insbesondere hat der Raum der Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x)y \tag{3}$$

genau Dimension n.

Beweis.

(i) Nach Bemerkung 3.1.2 können wir uns auf den reellen Fall beschränken. Wir betrachten die Funktion

$$F : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ (x, y) \mapsto A(x)y + b(x).$$

Dann ist F nach Voraussetzung stetig und in $y_1, ..., y_n$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_{y_j} f_i(x) = A_{i,j}(x),$$

wobei $A_{i,j}$ den (i, j)-ten Eintrag der Matrix A bezeichne. Insbesondere ist also jede der partiellen Ableitungen von F auf $D := I \times \mathbb{R}^n$ stetig

Sei nun $J \subset I$ ein kompaktes Intervall. Dann ist jede der partiellen Ableitungen von F auf $J \times \mathbb{R}^n$ beschränkt.

Da $J \times \mathbb{R}^n$ konvex ist, folgt mit Lemma 2.1.12, dass F auf $J \times \mathbb{R}^n$ einer globalen Lipschitz-Bedingung genügt. Nach Satz 2.1.18 existiert also auf dem gesamten Teilintervall J eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1).

Ist nun $(J_k)_k$ eine Folge kompakter Intervalle mit $J_k \subseteq J_{k+1}$ und $\bigcup_k J_k = I$, so erhalten wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung auf ganz I aus den vorherigen Überlegungen.

Die Behauptung über die Einschränkung der Lösung folgt direkt aus Korollar 2.1.15.

(ii) Nach Teil (i) ist die beschriebene Abbildung, die wir mit φ bezeichnen wollen, wohldefiniert. Nach Bemerkung 3.1.3 ist φ zudem linear. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung ist $f(x) = 0$ die einzige Lösung für die Anfangsbedingung $y(x_0) = 0$, also gilt $\mathrm{Kern}\varphi = \{0\}$, so dass φ injektiv ist. Weiter ist jede Lösung f von (3) eine Lösung des Anfangswertproblems (2) für $y_0 = f(x_0)$. Da eine solche Lösung nach Teil (i) existiert, folgt auch die Surjektivität von φ und damit die Behauptung.

q.e.d.

Beispiel 3.1.5. Betrachten wir auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2x^{-2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $f(x) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$ und $g(x) = \begin{pmatrix} 1/x \\ -1/x^2 \end{pmatrix}$ beides Lösungen des Systems sind. Da die Vektoren $f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind, bilden also nach Satz 3.1.4 die Funktionen f und g eine Basis des Raumes aller Lösungen des Systems.

3.1.2 Fundamentalmatrizen, die Wronski-Determinante und Variation der Konstanten

Definition 3.1.6. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.4 seien $f_1, ..., f_n$ linear unabhängige Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$.

(i) Die Matrix $F(x)$, deren Spalten genau die Vektoren $f_1(x), ..., f_n(x)$ sind, heißt eine **Fundamentalmatrix** des Systems.

(ii) Die Funktion $W(x) := \det F(x)$ heißt die **Wronski-Determinante** der Lösungen $f_1, ..., f_n$.

Lemma 3.1.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.1.4 und der Notation von Definition 3.1.6 gilt:*

(i) *Die Fundamentalmatrix $F(x)$ ist für alle $x \in I$ invertierbar und es gilt die Matrix-Differentialgleichung*

$$F'(x) = A(x)F(x).$$

Jede Lösung von $y' = A(x)y$ ist von der Form $F(x) \cdot \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^n$.

(ii) *Ein System $f_1, ..., f_n$ von Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ ist genau dann ein Fundamentalsystem, wenn die zugehörige Wronski-Determinante $W(x)$ niemals verschwindet,*

$$W(x) \neq 0 \quad \textit{für alle } x \in I.$$

Beweis.

(i) Die behauptete Matrix-Differentialgleichung gilt nach Voraussetzung für jede Spalte von F, also für die gesamte Matrix.Weiter sind die Spalten von $F(x)$ für jedes $x \in I$ nach Satz 3.1.4 linear unabhängig, was direkt impliziert, dass die Matrix $F(x)$ invertierbar ist (vgl. Lemma B.1.8). Der Ausdruck $F(x)\alpha$ für $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)^{tr} \in \mathbb{C}^n$ ist genau die Linearkombination $\alpha_1 f_1 + ... + \alpha_n f_n$, also folgt die Behauptung, da jede Lösung eine Linearkombination der f_j ist.

(ii) Dies folgt sofort aus (i) zusammen mit der Cramer'schen Regel (siehe Satz B.2.4).

q.e.d.

Nachdem wir mit Satz 3.1.4 die Struktur der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungssysteme analysiert haben, wenden wir uns nun, ähnlich wie auch in der Linearen Algebra bei Gleichungssystemen, den Lösungen inhomogener Systeme zu.

Satz 3.1.8. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und seien $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b : I \to \mathbb{C}^n$ stetige Funktionen. Dann gilt Folgendes:*

(*i*) *Ist f_0 irgendeine Lösung des Differentialgleichungssystems*

$$y' = A(x)y + b(x), \tag{4}$$

so ist jede Lösung des Systems gegeben durch $f_0 + g$, wobei g eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $y' = A(x)y$ ist. Umgekehrt ist für jede Lösung g des homogenen Systems $f_0 + g$ eine Lösung des inhomogenen Systems (4). Die Menge aller Lösungen von (4) bildet also einen n-dimensionalen affinen Unterraum des Raums aller differenzierbaren Funktionen auf I.

(*ii*) *Ist $F(x) = (f_1(x), ..., f_n(x))$ eine Fundamentalmatrix des homogenen Systems $y' = A(x)y$, so erhält man alle Lösungen $f : I \to \mathbb{R}$ des inhomogenen Systems (4) durch*

$$f(x) = F(x)u(x), \quad u(x) = \int_{x_0}^{x} F(t)^{-1}b(t)\mathrm{d}t + \alpha, \quad x_0, x \in I,\ \alpha \in \mathbb{C}^n \tag{5}$$

Beweis.

(*i*) Sei f eine beliebige weitere Lösung von (4) und wir setzen $g = f_0 - f$. Dann gilt

$$g' = f_0' - f' = (A(x)f_0 + b(x)) - (A(x)f + b(x)) = A(x)(f_0 - f) = A(x)g,$$

so dass g in der Tat eine Lösung des homogenen Systems.

Ist umgekehrt g eine beliebige Lösung des homogenen Systems, so gilt für $f = f_0 + g$

$$f' = f_0' + g' = (A(x)f_0 + b(x)) + A(x)g = A(x)(f_0 + g) + b(x) = A(x)f + b(x).$$

Also ist, wie behauptet, dass f eine Lösung des inhomogenen Systems ist.

Da nach Satz 3.1.4 die Lösungen des homogenen Systems einen n-dimensionalen Teilraum des Raumes aller differenzierbaren Funktionen auf I bilden, ist somit die Lösungsmenge von (4) ein affiner Teilraum, da wir nach Teil (*i*) von Satz 3.1.4 wissen, dass eine Lösung des inhomogenen Systems existiert.

(*ii*) Da für die Multiplikation von differenzierbaren matrix- und vektorwertigen Funktionen ebenfalls die übliche Leibniz-Regel (vgl. Lemma A.5.2) gilt (Übung), können wir berechnen

$$f'(x) = F'(x)u(x)+F(x)u'(x) = A(x)F(x)u(x)+F(x)(F(x)^{-1}b(x)) = A(x)f(x)+b(x),$$

wobei wir im zweiten Schritt die Identität $F'(x) = A(x)F(x)$ aus Lemma 3.1.7 verwendet haben. Damit ist f in der Tat eine Lösung des Systems (4). Da wiederum nach Lemma 3.1.7 jede Lösung des homogenen Systems von der Form $F(x)\alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{C}^n$ ist, folgt mit Teil (i), dass in der Tat jede Lösung von dieser Form ist.

q.e.d.

Bemerkung 3.1.9. *Vergleicht man den obigen Satz 3.1.8 mit Satz 1.3.9 und v.a. den zugehörigen Beweisen, so stellt man fest, dass sie sich nicht wesentlich unterscheiden. Satz 1.3.9 ist natürlich der Spezialfall $n = 1$ in Satz 3.1.8.*

Zum Abschluss dieses Abschnittes halten wir noch eine wichtige Eigenschaft der Wronski-Determinante fest. Als Vorbereitung hierzu formulieren wir das folgende Lemma.

Lemma 3.1.10. *Die Abbildung* $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R},\ X \mapsto \det X$ *ist differenzierbar und für beliebiges $B \in \mathbb{R}^{n\times}$ und $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar gilt für die Richtungsableitung nach B*

$$D_B(\det X) := \lim_{h\to 0} \frac{\det(X + hB) - \det X}{h} = \det(X) \cdot \operatorname{Spur}(BX^{-1}).$$

Beweis. Die Determinante ist nach der Leibniz-Formel (vgl. Satz B.2.2) eine Polynomabbildung in den Matrixeinträgen und damit wie behauptet stetig differenzierbar.

Wir zeigen die Behauptung zunächst für $X = I_n$ die Einheitsmatrix. Wieder nach der Leibnizformel ergibt sich

$$\det(I_n + hB) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) c_{1,\sigma(1)} \cdots c_{n,\sigma(n)}.$$

Hierbei bezeichnen c_{ij} die Einträge von $I_n + hB$ und alle übrigen Bezichnungen sind wie in Satz B.2.2. Wir fassen diesen Ausdruck als Polynom in h auf. Ist $\sigma \neq \mathrm{id}$, so enthält das Produkt $c_{1,\sigma(1)} \cdots c_{n,\sigma(n)}$ mindestens 2 Einträge von $I_n + hB$, die nicht auf der Diagonalen stehen. Der entsprechende Summand ist also durch h^2 teilbar. Für $\sigma = \mathrm{id}$ ergibt sich

$$c_{1,1} \cdots c_{n,n} = (1 + hb_{1,1}) \cdots (1 + hb_{n,n}) = 1 + h\operatorname{Spur}(B) + h^2 P(h),$$

wo $P(h)$ ein geeignetes Polynom in h sei. Insgesamt haben wir also

$$\det(I_n + hB) = 1 + \operatorname{Spur}(B)h + h^2\tilde{P}(h)$$

für ein geeignetes Polynom $\tilde{P}(h)$. Damit folgt aber

$$\frac{\det(I_n + hB) - \det(I_n)}{h} = \operatorname{Spur}(B) + h\tilde{P}(h) \to \operatorname{Spur}(B), \quad h \to 0,$$

wie behauptet.

Die Behauptung für beliebiges invertierbares $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ folgt dann direkt wegen der Beziehung

$$\det(X + hB) = \det(X)\det(I_n + hBX^{-1}).$$

q.e.d.

Satz 3.1.11. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetig. Die Wronski-Determinante $W(x) = \det F(x)$ eines beliebigen Fundamentalsystems $F(x)$ des homogenen Differentialgleichungssystems $y' = A(x)y$ erfüllt die lineare Differentialgleichung*

$$W'(x) = (\mathrm{Spur} A(x))W(x).$$

Beweis. Nach der Kettenregel (Übung) und Lemma 3.1.10 gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\det F(x) &= D_{F'(x)}\det(F(x)) \\ &= \det(F(x))\mathrm{Spur}(F'(x)F(x)^{-1}) = \mathrm{Spur}(A(x))W(x),\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Beziehung $F'(x) = A(x)F(x)$ aus Lemma 3.1.7 verwendet haben.

q.e.d.

3.2 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten

In Satz 3.1.8 haben wir gesehen, dass man die Lösung eines inhomogenen linearen Differentialgleichungssystem durch Variation der Konstanten, wie auch im Falle einer Gleichung, auf die Lösung des entsprechenden homogenen Systems zurückführen kann. Im Allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, für eine gegebene Matrix $A(x)$ eine Basis des Lösungsraumes von $y' = A(x)y$ anzugeben. Ist jedoch $A(x) = A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konstant, so liefert Lineare Algebra eine Möglichkeit, die entsprechenden Systeme zu lösen.

3.2.1 Eigenwerte und Eigenvektoren

Satz 3.2.1. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konstant.*

(i) *Sei $v \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ (vgl. Definition B.3.1). Dann ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, \quad f(x) = e^{\lambda x} v$$

eine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

(ii) *Bilden die Vektoren $v_1, ..., v_n \in \mathbb{C}^n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$, so bilden die Funktionen $f_1, ..., f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ mit*

$$f_j(x) = e^{\lambda_j x} v_j$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen.

Beweis.

(i) Wegen $Av = \lambda v$ folgt

$$f'(x) = \lambda e^{\lambda x} v = e^{\lambda x}(Av) = Af(x).$$

(ii) Nach *(i)* sind alle f_j Lösungen des Differentialgleichungssystems. Es gilt dann für die Wronski-Determinante

$$W(x) = \det(f_1(x), ..., f_n(x)) = \det\left(\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 x} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n x} \end{pmatrix} \cdot (v_1, ..., v_n)\right)$$
$$= e^{(\lambda_1 + ... + \lambda_n)x} \det(v_1, ..., v_n) = e^{\mathrm{Spur}(A)x} \det(v_1, ..., v_n),$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass die Spur einer Matrix genau die Summe ihrer Eigenwerte ist. Da $v_1, ..., v_n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ bilden, ist $\det(v_1, ..., v_n) \neq 0$ und wir finden $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit Lemma 3.1.7 *(ii)* folgt also die Behauptung.

q.e.d.

Hat die Koeffizientenmatrix A des Systems reelle Einträge, so mag es etwas unbefriedigend sein, wenn in Satz 3.2.1 komplexwertige Funktionen als Lösungen gefunden werden. Diesem Umstand fasst das folgende Korollar Abhilfe. Als Vorbemerkung sei hierzu vermerkt, dass für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ aus $Av = \lambda v$ für $v \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$ stets auch $A\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$ folgt.

Korollar 3.2.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die reellen Eigenwerte von A seien $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ und die komplexen Eigenwerte von A seien $\mu_1, \overline{\mu_1}, ..., \mu_s, \overline{\mu_s}$ $(r + 2s = n)$. Weiter seien $v_1, ...v_r \in \mathbb{R}^n$ bzw. $w_1, \overline{w_1}, ..., w_s, \overline{w_s}$ Eigenvektoren mit $Av_j = \lambda_j v_j$ bzw. $Aw_k =$*

$\mu_k w_k$, $A\overline{w_k} = \overline{\mu_k w_k}$ und $v_1, ..., v_r, w_1, \overline{w_1}, , ...w_s, \overline{w_s}$ seien linear unabhängig über $\mathbb{C}$. Dann bilden die reellwertigen Funktionen

$$e^{\lambda_j x} v_j, \quad \mathrm{Re}\,(e^{\mu_k x} w_k)\,, \quad \mathrm{Im}\,(e^{\mu_k x} w_k)\,, \quad j = 1, ..., r,\ k = 1, ..., s$$

eine reelle Basis des Lösungsraumes von $y' = Ay$.

Beweis. Wegen

$$\mathrm{Re}\,(e^{\mu_k x} w_k) = \frac{1}{2}\left(e^{\mu_k x} w_k + e^{\overline{\mu_k} x}\overline{w_k}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{Im}\,(e^{\mu_k x} w_k) = \frac{1}{2i}\left(e^{\mu_k x} w_k - e^{\overline{\mu_k}}\overline{w_k}\right)$$

sind nach Satz 3.2.1 alle angegebenen Funktionen Lösungen der Differentialgleichung. Nach Satz 3.1.4 genügt es nun zu zeigen, dass die Funktionen in $x = 0$ linear unabhängig sind. Dies folgt aber sofort aus der linearen Unabhängigkeit der Eigenvektoren

$$v_1, ..., v_r, w_1, \overline{w_1}, ..., w_s, \overline{w_s},$$

da die Transformation

$$(w_k, \overline{w}_k) \mapsto \left(\frac{1}{2}(w_k + \overline{w_k}), \frac{1}{2i}(w_k - \overline{w_k})\right) = (\mathrm{Re}(w_k), \mathrm{Im}(w_k)), \quad k = 1, ..., s$$

offenbar invertierbar und $\mathbb{C}$-linear ist, so dass auch die Vektoren

$$v_1, ..., v_r, \mathrm{Re}(w_1), ..., \mathrm{Re}(w_s), \mathrm{Im}(w_1), ..., \mathrm{Im}(w_s)$$

linear unabhängig sind.

q.e.d.

Bemerkung 3.2.3. *Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt jedes Polynom mit komplexen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren. Die Voraussetzungen von Korollar 3.2.2 sind also erfüllt, sobald $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, also genau dann, wenn das Minimalpolynom von A über $\mathbb{C}$ in verschiedene Linearfaktoren zerfällt (vgl. Proposition B.3.6).*

Beispiel 3.2.4. (i) Sei $A = \begin{pmatrix} 12 & -10 \\ 15 & -13 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom (und auch das Minimalpolynom) von A ist $x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$, wir haben also die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$, z.B. mit Eigenvektor $v_1 = (1,1)^{tr}$, und $\lambda_2 = -3$, z.B. mit Eigenvektor $(2,3)^{tr}$. Wir erhalten somit nach Satz 3.2.1 das Fundamentalsystem von Lösungen des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$

$$f_1(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = e^{-3x}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung f des Anfangswertproblems

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0$$

ist dann gemäß Satz 3.1.4 sicher eine Linearkombination dieser beiden Lösungen, $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ und die Konstanten α_1, α_2 lassen sich durch Einsetzen der Anfangsbedingung bestimmen,

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = y_0,$$

also durch die Lösung eines aus der Linearen Algebra bekannten linearen Gleichungssystems.

(ii) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Das charakteristische Polynom (und auch das Minimalpolynom) von A ist dann $x^2 - 2x + 5$, A hat also die komplexen Eigenwerte $1+2i$ und $1-2i$ mit zugehörigen Eigenvektoren $v = (1-2i, -1)^{tr}$ bzw. $w = (1+2i, -1)^{tr}$. Die Vektoren v, w sind offenbar linear unabhängig (über $\mathbb{C}$), also erhalten wir nach Satz 3.2.1 das komplexwertige Fundamentalsystem von Lösungen

$$f_1(x) = e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 1-2i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_2(x) = e^{(1-2i)x} \begin{pmatrix} 1+2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Beachtet man die wohlbekannte Identität

$$e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b)), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

sieht man unmittelbar, dass in der Tat $f_2 = \overline{f_1}$ gilt. Wir erhalten also mit Korollar 3.2.2 das reellwertige Fundamentalsystem

$$\operatorname{Re}(f_1(x)) = e^x \begin{pmatrix} \cos(2x) + 2\sin(2x) \\ -\cos(2x) \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Im}(f_1(x)) = e^x \begin{pmatrix} \sin(2x) - 2\cos(2x) \\ -\sin(2x) \end{pmatrix}.$$

Eine leicht andere Formulierung von Satz 3.2.1 erhält man wie folgt:

Bemerkung 3.2.5. *Ist $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix, so bilden die Funktionen $f_j(x) = e^{\lambda_j x}\mathfrak{e}_j$, wobei $\mathfrak{e}_j = (0, ...0, 1, 0, ..., 0)^{tr}$ die j-te Spalten der Einheitsmatrix I_n bezeichne, offenbar ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $y' = Dy$. Ist nun $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konjugiert zu D, existiert also eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $T^{-1}AT = D$, so ist die j-te Spalte von T ein Eigenvektor $v_j = T\mathfrak{e}_j$ zum Eigenwert λ_j. Vergleichen wir mit Satz 3.2.1, so bilden also die Funktionen $Tf_j(x)$ ein Fundamentalsystem für das Gleichungssystem $y' = Ay$.*

Mithilfe von Satz 3.2.1 sind wir nun in der Lage, Differentialgleichungssysteme $y' = Ay$ zu lösen, sofern die konstante Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar ist. Nun ist bekanntermaßen nicht jede Matrix diagonalisierbar, aber jede Matrix ist (über $\mathbb{C}$) konjugiert zu ihrer Jordan-Normalform (vgl. Satz B.3.8). In Anlehnung an Bemerkung 3.2.5 lässt uns das folgende Lemma die Untersuchung allgemeiner Matrizen auf die Untersuchung von Matrizen in Jordan-Normalform reduzieren.

Lemma 3.2.6. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ beliebig. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Lösung des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$, wenn die Funktion*

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,\ x \mapsto T^{-1}f(x)$$

das Differentialgleichungssystem $y' = (T^{-1}AT)y$ löst.

Beweis. Es gilt

$$g' = T^{-1}f' = T^{-1}Af = (T^{-1}AT)(T^-1f) = (T^{-1}AT)g.$$

q.e.d.

3.2.2 Die Matrix-Exponentialfunktion

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Untersuchung allgemeiner Differentialgleichungssysteme mit konstanten Koeffizienten ist die Matrix-Exponentialfunktion.

Definition 3.2.7. Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definieren wir die **Matrix-Exponentialfunktion** über

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k := \lim_{M\to\infty} \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!}A^k.$$

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass die Matrix-Exponentialfunktion tatsächlich wohldefiniert ist, dass also die sie definierende Reihe immer konvergiert. Dazu benötigen wir das folgende Lemma als Vorbereitung.

Lemma 3.2.8. *Für $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Einträgen a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, sei*

$$\|A\| := \|A\|_2 := \sqrt{\mathrm{Spur}(\overline{A}^{tr}A)} = \sqrt{\sum_{i=1,j}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

Dann gilt für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Ungleichung

$$\|AB\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Beweis. Die Einträge von A seien wieder a_{ij}, die von B seien b_{ij}. Dann gilt für den (i,j)-ten Eintrag c_{ij} von AB

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Es folgt daher aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz[1]

$$\begin{aligned}
\|AB\|^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} |c_{ij}|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|^2 \\
&\leq \sum_{i,j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^{n} |b_{\ell j}|^2 \right) \\
&= \left(\sum_{i,k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j,\ell=1}^{n} |b_{\ell j}|^2 \right) \\
&= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Hieraus erhalten wir die gewünschte Konvergenzaussage für die Exponentialreihe.

Proposition 3.2.9. *Die Reihe* $\exp(A)$ *konvergiert für jedes* $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Beweis. Offenbar ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{C}^{n\times n}$, welche über den $\mathbb{R}$-Isomorphismus $\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ von der Euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^{2n^2}$ induziert wird. Insbesondere gilt daher die Dreiecksungleichung und wir erhalten für $m \leq M \in \mathbb{N}_0$ beliebig

$$\left\| \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{M} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{M} \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=m+1}^{M} \frac{1}{k!} \|A\|^k,$$

wobei wir im letzen Schritt Lemma 3.2.8 verwendet haben.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Da die reelle Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ bekanntlich für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, M \geq N$

$$\left\| \sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!} A^k - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{M} \frac{1}{k!} \|A\|^k < \varepsilon$$

[1] Bezeichnet $(\cdot,\cdot)$ ein beliebiges (positiv definites) Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^m$, dann gilt

$$(v,w)^2 \leq (v,v)(w,w).$$

gilt. Damit ist die Folge der Partialsummen $\left(\sum_{k=0}^{M} \frac{1}{k!} A^k\right)_M$ eine Cauchy-Folge und damit, da $\mathbb{C}^{n\times n} \cong \mathbb{R}^{2n^2}$ als endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum vollständig ist, konvergent.

q.e.d.

Wir fassen nun einige Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion zusammen.

Lemma 3.2.10. *Sein $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gilt:*

(i) *Gilt $AB = BA$, so folgt* $\exp(A + B) = \exp(A) \cdot \exp(B)$.

(ii) *Ist B invertierbar, so gilt* $\exp(B^{-1}AB) = B^{-1}\exp(A)B$.

(iii) $\exp(A)$ *ist invertierbar mit* $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

Beweis.

(i) Wegen $AB = BA$ gilt der binomische Lehrsatz,

$$(A + B)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
\exp(A + B) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(A + B)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k}{j} A^j B^{k-j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!} B^{k-j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} B^{\ell} = \exp(A) \cdot \exp(B).
\end{aligned}$$

(ii) Ist B invertierbar so gilt offenbar für alle $k \in \mathbb{N}_0$ $(B^{-1}AB)^k = B^{-1}A^kB$ und somit

$$\begin{aligned}
\exp(B^{-1}AB) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(B^{-1}AB)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^{-1}A^kB \\
&= B^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) B = B^{-1}\exp(A)B.
\end{aligned}$$

(iii) Da $A(-A) = (-A)A$ gilt, folgt mit Teil (i)

$$\exp(A) \cdot \exp(-A) = \exp(A + (-A)) = \exp(0) = I_n$$

und damit die Behauptung.

q.e.d.

Für die Lösung von linearen Differentialgleichungssystemen (mit konstanten Koeffizienten) bietet die Matrix-Exponentialfunktion ein wichtiges Werkzeug, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.2.11. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) *Man hat*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(xA) = A\exp(xA),$$
also ist $F(x) := \exp(xA)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems $y' = Ay$. Diese Fundamentalmatrix ist durch die Anfangsbedingung $F(0) = I_n$ eindeutig bestimmt.

(ii) *Die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$, $y(0) = c$ für $c \in \mathbb{C}^n$ ist gegeben durch $\exp(xA)c$.*

(iii) *Für die Wronski-Determinante $W(x)$ des Fundamentalsystems $F(x) = \exp(xA)$ gilt $W(x) = \det\exp(xA) = \exp(x\mathrm{Spur}(A))$.*

Beweis.

(i) Seien $x, h \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt nach Lemma 3.2.8 und Lemma 3.2.10
$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{h}[\exp((x+h)A) - \exp(xA)] - A\exp(xA)\right\| \\
=&\left\|\left(\frac{1}{h}[\exp(hA) - I_n] - A\right)\cdot\exp(xA)\right\| \\
\leq&\left\|\frac{1}{h}[\exp(hA) - I_n] - A\right\|\cdot\|\exp(xA)\| = \left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}h^{k-1}A^k\right\|\cdot\|\exp(xA)\| \\
\leq& h\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}h^k\|A\|^{k+2}\cdot\|\exp(xA)\|.
\end{aligned}$$

Ist $|h| \leq 1$, so ist offenbar $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+2)!}\|A\|^{k+2}$ eine konvergente Majorante der Reihe, so dass der obige Ausdruck für $h \to 0$ ebenfalls gegen 0 konvergiert. Damit folgt
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\exp(xA) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\exp((x+h)A) - \exp(xA)) = A\exp(xA)$$
wie behauptet. Die übrigen Behauptungen folgen direkt aus Lemma 3.1.7.

(ii) Diese Behauptung folgt ebenfalls direkt aus Lemma 3.1.7 (i).

(*iii*) Folgt direkt aus Satz 3.1.11, indem man zusätzlich die Anfangsbedingung $F(0) = I_n$, also $W(0) = 1$ verwendet.

q.e.d.

3.2.3 Anwendung auf Differentialgleichungssysteme

Wir haben mit Satz 3.2.11 das Problem der Lösung eines homogenen, linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten auf die Berechnung einer Matrix-Exponentialfunktion zurückgeführt. Da jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konjugiert zu ihrer Jordan-Normalform (vgl. Satz B.3.8), also einer Blockdiagonalmatrix, ist, reicht es nach Lemma 3.2.10 (*ii*) aus, die Matrix-Exponentialfunktion auf Blockdiagonalmatrizen und Jordan-Blöcken auszuwerten, um diese explizit zu machen. Dies liefert das folgende Lemma.

Lemma 3.2.12. (*i*) *Für eine Blockdiagonalmatrix* $A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_r) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *mit quadratischen Blöcken* $A_j \in \mathbb{C}^{n_j \times n_j}$ *gilt*

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(A_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(A_r) \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für eine Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ $\exp(A) = \operatorname{diag}(e^{a_1}, ..., e^{a_n})$.

(*ii*) *Sei* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Für einen Jordan-Block*

$$J = J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x \cdot J) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \cdots & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{x^2}{2} \\ & & & \ddots & x \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Beweis.

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt
$$A^k = \operatorname{diag}(A_1^k, ..., A_r^k)$$
und somit
$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{diag}(A_1^k, ..., A_r^k) = \operatorname{diag}(\exp(A_1), ..., \exp(A_r)).$$

(ii) Wir schreiben
$$x \cdot J = \lambda x \cdot I_n + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$
Da $\lambda x \cdot I_n$ eine Skalarmatrix ist, kommutiert sie mit N und es folgt nach Lemma 3.2.10 (i)
$$\exp(x \cdot J) = \exp(\lambda x \cdot I_n + N) = \exp(\lambda x I_n) \cdot \exp(N).$$
Nach Teil (i) gilt nun
$$\exp(\lambda x \cdot I_n) = \operatorname{diag}(e^{\lambda x}, ..., e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} I_n.$$
Weiterhin gilt
$$N^0 = I_n,\ N^1 = \begin{pmatrix} 0 & x & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & x \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x^2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & x^2 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, ...$$
$$N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & x^{n-1} \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \quad N^k = 0,\ k \geq n.$$
Damit folgt
$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k,$$
also insgesamt die Behauptung.

q.e.d.

Wir fassen die nun gewonnenen Aussagen über lineare Differentialgleichungssysteme zusammen.

Satz 3.2.13. *Sei* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(*i*) *Für jeden* $m \times m$*-Jordan-Block* $J_m(\lambda_i)$ *(vgl. Definition B.3.7) zum Eigenwert* λ_i *von* A *existiert ein linear unabhängiges System* $f_{i,1}, ..., f_{i,m}$ *von Lösungen des Differentialgleichungssystems* $y' = Ay$ *der Form*

$$f_{i,j}(x) = p_{i,j}(x)e^{\lambda_i x}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

wobei die $p_{i,j}(x)$ *vektorwertige Polynomfunktionen sind, d.h. jede Komponente von* $p_{i,j}(x)$ *ist ein Polynom in* x *vom Grad* $\leq j-1$*. Insbesondere ist* $p_{i,1}(x)$ *konstant und ein Eigenvektor von* A*.*

(*ii*) *Die Systeme* $f_{i,j}$ *aus Teil* (*i*) *für alle Jordan-Blöcke in der Jordan-Normalform von* A *bilden ein Fundamentalsystem von Lösungen von* $y' = Ay$*.*

(*iii*) *Ist* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, so erhält man ein reellwertiges Fundamentalsystem, indem man in Teil* (*i*) *zu jedem Paar* $\lambda, \overline{\lambda}$ *komplex konjugierter Eigenverte von* A *die Lösungspaare* $\mathrm{Re}(f_1), \mathrm{Im}(f_1), ..., \mathrm{Re}(f_m), \mathrm{Im}(f_m)$ *betrachtet.*

Beweis. Ist A in Jordan-Normalform, so folgen die Behauptungen in (*i*) und (*ii*) direkt aus Lemma 3.2.12 zusammen mit Satz 3.2.11.

Ansonsten existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $B := T^{-1}AT$ in Jordan-Normalform ist. Nach den obigen Überlegungen gilt die Behauptung also für B anstelle von A. Nach Lemma 3.2.10 gilt nun $\exp(x \cdot A) = T \exp(x \cdot B)T^{-1}$. Die Spalten dieser Matrix sind nun von der Form $\tilde{p}_{i,j}(x)e^{\lambda_i x}$ für gewisse vektorwertige Polynome $\tilde{p}_{i,j}$ vom Grad $\leq m_i - 1$, wobei m_i die Größe des zum Eigenwert λ_i gehörigen Jordan-Blocks sei. Multipliziert man nun $\exp(x \cdot A)$ von rechts mit einer invertierbaren Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so ändert sich der von den Spalten von $\exp(A)$ aufgespannte Funktionenraum nicht. Wie man sich leicht überlegt (Übung), haben die Spalten von $\exp(x \cdot A)T = T \exp(x \cdot B)$ die Form $f_{i,j}(x) = p_{i,j}(x)e^{\lambda_i x}$, wobei wie behauptet der Grad von $p_{i,j}(x)$ in jeder Komponente $\leq j-1$ ist, wie wir behauptet hatten.

Der Beweis von Teil (*iii*) erfolgt genau wie in Korollar 3.2.2.

q.e.d.

Bemerkung 3.2.14. *Als historischer Kommentar sei angemerkt, dass die Motivation für Jordan, die nach ihm benannte Normalform für komplexe Matrizen zu finden, im Studium von Systemen linearer Differentialgleichungen begründet war. Vor Jordan hatte bereits Weierstrass eine etwas andere Normalform für denselben Zweck hergeleitet.*

Wir fassen das nun Erarbeitete wieder in einem Verfahren zur Lösung von homogenen linearen Differentialgleichungssystemen zusammen.

Verfahren 3.2.15.
Gegeben Ein Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Bestimme eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass $T^{-1}AT = B$ in Jordan-Normalform ist.
2. Berechne $\exp(xJ)$ für jeden Jordan-Block von B mit Lemma 3.2.12 und erhalte so $\exp(xB)$.
3. Die Spalten von $T\exp(xB)$ liefern ein Fundamentalsystem von Lösungen.
4. Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Überführe das gefundene Fundamentalsystem in ein reellwertiges Fundamentalsystem.

Da es mitunter etwas aufwendig sein kann, eine geeignete Transformationsmatrix T zu finden, die A in Jordan-Normalform überführt, man aber andererseits die Jordan-Normalform selbst von A oft recht einfach bestimmen kann, bietet es sich manchmal an, das obige Verfahren etwas zu modifizieren.

Verfahren 3.2.16.
Gegeben Ein Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

1. Bestimme die Jordan-Normalform sowie alle Eigenvektoren von A.
2. Für jeden Jordan-Block $J_m(\lambda_i)$ von A und zugehörigen Eigenvektor v ist $e^{\lambda_i x}v$ eine Lösung.
3. Setze die übrigen Lösungen als $f_{i,j}(x) = p_{i,j}(x)e^{\lambda_i x}$ an, wobei $p_{i,j}$ Polynome vom Grad $\leq j-1$ mit zu bestimmenden Koeffizienten sind.
4. Setze $f_{i,j}(x)$ aus dem Ansatz in die Differentialgleichung ein, um die Koeffizienten der Polynome zu bestimmen.

Beispiel 3.2.17. Wir demonstrieren beide Verfahren 3.2.15 und 3.2.16 an dem Differentialgleichungssystem

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Das charakteristische Polynom $\chi_A(X)$ von A ist gegeben durch

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} X+4 & -4 \\ 1 & X \end{pmatrix} = (X+4)X + 4 = (X+2)^2,$$

wir haben also $\lambda = -2$ als einzigen Eigenwert. Der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist

$$\mathrm{Kern}(A + 2I_2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Wir erhalten demnach keine Basis aus Eigenvektoren, also ist A nicht diagonalisierbar. Man rechnet leicht nach, dass $(A+2I_2)^2 = 0$ gilt. Als Hauptvektor der Stufe 2 wähle man nun einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Kern}(A+2I_2)$, etwa $v = (1,0)^{tr}$. Dann gilt $(A+2I_2)v = (-2,-1)^{tr}$ und wir erhalten die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

für die gilt

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: B.$$

Nach Lemma 3.2.12 gilt

$$\exp(x \cdot B) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Verfahren 3.2.15 erhalten wir nun ein Fundamentalsystem von Lösungen des Gleichungssystems aus den Spalten von

$$T \exp(x \cdot B) = e^{-2x} \begin{pmatrix} -2 & -2x+1 \\ -1 & -x \end{pmatrix}.$$

(ii) Aus Teil (i) erhalten wir mit dem berechneten Eigenvektor von A mit Satz 3.2.1 eine Lösung

$$f_1(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 3.2.13 können wir nun für eine zweite Lösung in unserem Fundamentalsystem den Ansatz

$$f_2(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} a_1 x + a_0 \\ b_1 x + b_0 \end{pmatrix}$$

für noch zu bestimmende Koeffizienten a_0, a_1, b_0, b_1. Da wir zu f_2 ein beliebiges Vielfaches von f_1 addieren können, ohne den aufgespannten Lösungsraum zu verändern, dürfen wir zur Vereinfachung $b_0 = 0$ annehmen.

Wir berechnen damit

$$f_2'(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} -2a_1 x - 2a_0 + a_1 \\ -2b_1 x + b1 \end{pmatrix}$$

und

$$Af_2(x) = e^{-2x} \begin{pmatrix} (-4a_1 + 4b_1)x - 4a_0 \\ -a_1 x - a_0 \end{pmatrix}.$$

Durch Vergleich beider Ausdrücke erhalten wir das folgens lineare Gleichungssystem für die Koeffizienten,

$$\begin{aligned} -2a_1 &= -4a_1 + 4b_1 \\ -2a_0 + a_1 &= -4a_0 \\ -2b_1 &= -a_1 \\ b_1 &= -a_0. \end{aligned}$$

Aus den letzten beiden Gleichungen ergibt sich sofort $a_1 = -2a_0$, $b_1 = -a_0$, was konsistent mit den ersten beiden Gleichungen ist, wir erhalten also, indem wir $a_0 = 1$ wählen, die Lösung

$$f_2(x) = e^{-2x}\begin{pmatrix}-2x+1\\ -x\end{pmatrix}.$$

In Satz 3.1.8 haben wir gesehen, wie sich das Verfahren der Variation der Konstanten anwenden lässt, um die Lösungen eines inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = A(x)y + b(x)$$

zu bestimmen, wenn die Lösungen des zugehörigen homogenen Systems bekannt sind. Sind A und b jedoch beide konstant, so kann mitunter schneller zu einer Lösung gelangen.

Proposition 3.2.18. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{C}^n$. Ist dann v eine Lösung des linearen Gleichungssystems*

$$Av = -b,$$

so ist $f(x) = v$ eine (konstante) partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay + b.$$

Alle Lösungen dieses Differentialgleichungssystems sind dann gegeben durch

$$v + \exp(xA)\cdot c, \quad c \in \mathbb{C}^n.$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt direkt durch Einsetzen in die Differentialgleichung, der Rest folgt direkt aus Satz 3.1.8.

q.e.d.

Bemerkung 3.2.19. *Man beachte, dass das lineare Gleichungssystem $Av = -b$ in Proposition 3.2.18 jedenfalls immer dann eine Lösung besitzt, wenn A invertierbar ist.*

3.3 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Eines der ersten Resultate dieser Vorlesung war der Reduktionssatz 1.2.8, mit dem wir Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen konnten. Es ist nichtsdestotrotz sinnvoll, die Resultate aus dem letzten Abschnitt konkret auf lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung anzuwenden.

Definition 3.3.1. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $a_0, ..., a_{n-1}, b : I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen. Dann nennt man

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

eine **homogene, lineare Differentialgleichung** n-ter Ordnung. Die Gleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

nennt man eine **inhomogene** lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung und

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

die zugeordnete homogene Differentialgleichung.

Die Struktur der Lösungsmenge von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung liefert der folgende Satz.

Satz 3.3.2. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $a_0, ..., a_{n-1}, b : I \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen.*

(i) *Die Menge aller Lösungen $f : I \to \mathbb{C}$ der homogenen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

bildet einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V der Dimension n. Jede Lösung dieser Gleichung lässt sich auf das gesamte Intervall fortsetzen.

(ii) *Die Menge L aller Lösungen $f : I \to \mathbb{C}$ der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

ist ein affiner Teilraum des Raumes aller auf I n-mal differenzierbaren Funktionen. Ist f_0 irgendeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, so gilt

$$L = f_0 + V.$$

Beweis.

(i) Die Lösungsmenge der homogenen Gleichung ist offenbar der Kern des linearen Operators

$$\mathcal{L} : \mathscr{C}^n(I) \to \mathscr{C}(I),\ f \mapsto f^{(n)} + a_{n-1}(x)f^{(n-1)} + ... + a_1(x)f' + a_0(x)f,$$

also ein Vektorraum.

Weiterhin liefert der Reduktionssatz 1.2.8 folgendes äquivalentes System von Differentialgleichungen erster Ordnung,

$$y' = A(x)y, \quad A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Die Lösungen dieses Systems bilden nach Satz 3.1.4 einen Vektorraum W der Dimension n, also folgt auch $\dim V = n$, da die Abbildung

$$V \to W,\ f \mapsto \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

nach Satz 1.2.8 bijektiv und offenbar linear ist. Die Fortsetzbarkeit jeder Lösung folgt direkt aus der Fortsetzbarkeit der Lösungen von (1) nach Satz 3.1.4.

(ii) Die Behauptung folgt genau wie in Satz 3.1.8: Die Differenz zweier Lösungen der inhomogenen Gleichung ist eine Lösung der homogenen Gleichung.

q.e.d.

Beispiel 3.3.3. Wie man durch Einsetzen leicht überprüft, sind die Funktionen $f_1(x) = x$ uns $f_2(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0.$$

Da die Vektoren

$$\begin{pmatrix} f_1(1) \\ f_1'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f_2(1) \\ f_2'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind, folgt aus Satz 3.3.2 und Satz 3.1.4, dass f_1 und f_2 eine Basis des Raumes aller Lösungen bilden.

Wir wenden uns nun Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu. In diesem Fall ist die Matrix in (1) die Begleitmatrix des Polynoms

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0,$$

welches somit auch das charakteristische (und das Minimal-)Polynom der Matrix ist (Übung). Hieraus motiviert sich die folgende Definition.

Definition 3.3.4. Das Polynom

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$$

nennen wir das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$.

Als Folgerung aus Satz 3.2.13 erhalten wir somit folgendes vereinfachtes Resultat für Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Satz 3.3.5. *Seien $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{C}$ und $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0 = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{C}[X]$ (mit $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$) das charakteristische Polynom der linearen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0.$$

Dann bilden die Funktionen

$$e^{\lambda_j x}, xe^{\lambda_j x}, ..., x^{m_j-1}e^{\lambda_j x},\ j = 1, ..., k$$

eine Basis des Lösungsraumes der Differentialgleichung.
Sind $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und schreiben wir für alle Nullstellen $\lambda_j = \alpha_j + \beta_j i$, so erhält man eine reellwertige Lösungsbasis, indem man die Funktionen oben für solche λ_j mit $\beta_j > 0$ ersetzt durch

$$e^{\alpha x}\cos(\beta x), xe^{\alpha x}\cos(\beta x), ..., x^{m_j-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x),$$

$$e^{\alpha x}\sin(\beta x), xe^{\alpha x}\sin(\beta x), ..., x^{m_j-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

und die Lösungen für die komplex konjugierte Nullstelle weglässt.

Beweis. Wir betrachten wieder das zugehörige System von Differentialgleichungen aus (1). Da die Koeffizientenmatrix A, wie bereits erwähnt, die Begleitmatrix eines Polynoms ist, ist ihr charakteristisches Polynom gleich ihrem Minimalpolynom. Es folgt also (vgl. Proposition B.3.9), dass es zum Eigenwert λ_j in der Jordan-Normalform von A genau einen Jordan-Block der Größe m_j gibt. Nach Satz 3.2.13 finden wir also zu jedem Eigenwert λ_j linear unabhängige Lösungen des linearen Systems

$$f_{j,1}(x) = p_{j,1}(x)e^{\lambda_j x}, ..., f_{j,m_j}(x) = p_{j,m_j}(x)e^{\lambda_j x},$$

wobei $p_{j,k}(x)$ ein (vektorwertiges) Polynom vom Grad $\leq k - 1$ ist. Nach dem Reduktionssatz 1.2.8 bzw. Satz 3.3.2 müssen somit auch die jeweils ersten Komponenten dieser Lösung linear unabhängig sein. Da wir somit m_j linear unabhängige Polynome vom Grad

$\leq m_j - 1$ haben, spannen diese den Raum aller Polynome vom Grad $\leq m_j - 1$ auf, so dass wir sie durch die Standardbasis $1, x, ..., x^{m_j - 1}$ ersetzen können und wir erhalten die Behaupteten Lösungen der linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Die Aussage über die reellwertigen Lösungen folgt direkt aus Korollar 3.2.2.

q.e.d.

Beispiel 3.3.6. Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$y^{(7)} - 4y^{(6)} + 5y^{(5)} - 25y^{(4)} + 115y''' - 63y'' + 135y' - 675y = 0$$

ist

$$\begin{aligned} &X^7 - 5X^6 + 5X^5 - 25X^4 + 115X^3 - 63X^2 + 135X - 675 \\ &\qquad = (X-3)^3(X-(-1+2i))^2(X-(-1-2i))^2. \end{aligned}$$

Aus Satz 3.3.5 können wir nun direkt ein Fundamentalsystem von Lösungen ablesen,

$$e^{3x},\ xe^{3x},\ x^2e^{3x},\ e^{-x}\cos(2x),\ xe^{-x}\cos(2x), e^{-x}\sin(2x),\ xe^{-x}\sin(2x).$$

Zum Schluss dieses Abschnittes betrachten wir inhomogene lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, bei denen die rechte Seite eine bestimmte Form hat.

Proposition 3.3.7. *Sei $q(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad m und $\mu \in \mathbb{C}$. Dann ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung*

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = q(x)e^{\mu x}$$

mit charakteristischem Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ gegeben durch $f_0(x) = p(x)e^{\mu x}$, wobei $p(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad $m + k$ mit $k = \max\{\ell \geq 0 : (X - \mu)^\ell \mid P\}$. Ist insbesondere $m = 0$, also $q = \alpha \in \mathbb{C}$ konstant, und μ keine Nullstelle von P, so erhalten wir

$$f_0(x) = \frac{\alpha}{P(\mu)}e^{\mu x}$$

als partikuläre Lösung.

Beweis. Durch Induktion sieht man leicht ein, dass

$$(p(x)e^{\mu x})^{(r)} = e^{\mu x}\sum_{\ell=0}^{r}\binom{r}{\ell}\mu^\ell p^{(r-\ell)}(x).$$

Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir für die linke Seite

$$\begin{aligned}
&e^{\mu x}\sum_{r=0}^{n} a_r \sum_{\ell=0}^{r}\binom{r}{\ell}\mu^\ell p^{(r-\ell)}(x)\\
=&e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n} p^{(s)}(x)\sum_{\ell=0}^{n-s}\binom{s+\ell}{\ell}a_{s+\ell}\mu^\ell\\
=&e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}p^{(s)}(x)\sum_{\ell=0}^{n-s}(s+\ell)(s+\ell-1)\cdots(\ell+1)a_{s+\ell}\mu^\ell\\
=&e^{\mu x}\sum_{s=0}^{n}\frac{1}{s!}p^{(s)}(x)P^{(s)}(\mu).
\end{aligned}$$

Ist nun μ eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms P, so ist $P^{(s)}(\mu) = 0$ für $s \leq k$, also ist die linke Seite bis auf den Exponentialfaktor ein Polynom vom Grad $\deg p - k$. Vergleicht man dies mit der vorgegebenen rechten Seite, so ergibt sich, dass p ein Polynom vom Grad $m + k$ ist und die erste Behauptung folgt.

Den Beweis der zweiten Behauptung lassen wir als Übung.

q.e.d.

Beispiel 3.3.8. Betrachtet wir die Differentialgleichung

$$y'' + y = \alpha e^{i\omega x}, \quad (\alpha \in \mathbb{C}^\times,\ \omega > 0).$$

Diese Gleichung beschreibt im Wesentlichen eine **angeregte Schwingung** (Übung).

Offenbar finden wir in $f_1(x) = e^{ix}$ und $f_2(x) = e^{-ix}$ ein Fundamentalsystem der zugehörigen homogenen Gleichung.

Aus Proposition 3.3.7 erhalten wir für $\omega \neq 1$ die partikuläre Lösung

$$f_0(x) = \frac{\alpha}{1-\omega^2}e^{i\omega x}.$$

Man beachte, dass e^{it} für $t \in \mathbb{R}$ beschränkt bleibt, also ist jede Lösung der Differentialgleichung, die nach Satz 3.3.2 von der Form

$$\frac{\alpha}{1-\omega^2}e^{i\omega x} + c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$$

für gewisse Konstanten c_1, c_2 ist, ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}$ beschränkt.

Gilt nun $\omega = 1$, so haben wir, wieder nach Proposition 3.3.7, eine partikuläre Lösung der Form

$$f_0(x) = (\beta + \gamma x)e^{ix}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert die Gleichung

$$2i\gamma e^{ix} = \alpha e^{ix},$$

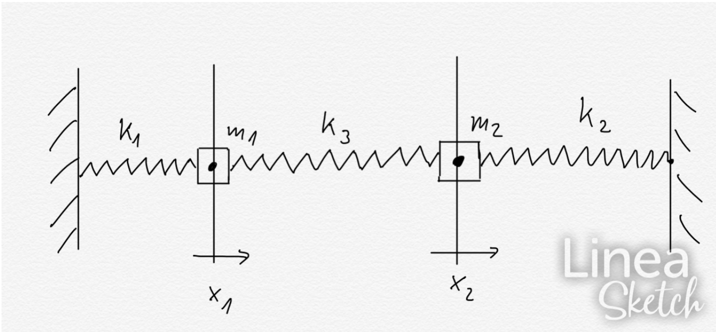

Abbildung 3.1: Zwei Massen, gekoppelt durch Federn

also haben wir $\gamma = i\frac{\alpha}{2}i \neq 0$, während wir β beliebig wählen können (man beachte, dass βe^{ix} eine Lösung der homogenen Gleichung ist). Für $\beta = 0$ ergibt sich so die partikuläre Lösung

$$f_0(x) = -\frac{\alpha}{2} ixe^{ix}.$$

Es folgt also, da alle Lösungen der homogenen Gleichung beschränkt sind, dass in diesem Fall jede Lösung der inhomogenen Gleichung unbeschränkt bleibt. Dieses Phänomen nennt man auch **Resonanzkatastrophe**: Regt man ein schwingendes System genau in seiner **Eigenfrequenz** (im Beispiel 1) an, so schwingt es immer stärker mit.

3.4 Gekoppelte Schwingungen

Als wichtige Anwendung des bisher Gelernten wollen wir gekoppelte Schwingungen untersuchen. Betrachten wir dazu folgenden Aufbau: Abbildung 3.1 zeigt zwei Massen m_1, m_2 and Positionen x_1, x_2, die durch eine Feder verbunden sind und jeweils durch eine weitere Feder mit einer starren Wand verbunden sind. Wir ignorieren sämtliche Reibungseffekte. und auch Effekte der Gravitation[2]. Weiter nehmen wir an, dass die Federn dem Hooke'schen Gesetz genügen, welches besagt, dass die Kraft, die eine um eine Länge $\Delta\ell$ aus ihrem Grundzustand gedehnt wird, proportinal zu dieser Längenänderung und ihr entgegengerichtet ist,

$$F = -k\Delta\ell.$$

Die Proportionalitätskonstante $k > 0$ nennt man hierbei auch die **Federkonstante**. Die Federkonstanten der Federn in der Skizze haben die Werte k_1, k_2, k_3. Wir normieren die Positionen x_1, x_2 der Massen so, dass sich das System für $x_1 = x_2 = 0$ in Ruhe befindet und in beiden Fällen eine Bewegung nach rechts einen positiven Wert annimmt.

[2]Die Gravitation zwischen den Massen selbst ist vernachlässigbar und man stellt sich den Aufbau in Abbildung 3.1 etwa auf einem Tisch vor, auf dem die Massen reibungsfrei gleiten können

Uns interessiert der zeitliche Verlauf der Positionen x_1, x_2 in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach dem zweiten Newton'schen Gesetz und dem Hooke'schen Gesetz gilt für die Kraft F_1, die auf die Masse m_1 wirkt, die Gleichung

$$F_1 = m_1\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - k_3(x_1 - x_2) = -(k_1 + k_3)x_1 + k_3x_2,$$

wobei wir der in der Physik üblichen Konvention folgen, eine Ableitung nach der Zeit mit einem Punkt statt einem Strich zu kennzeichnen. Analog gilt für die auf m_2 wirkende Kraft F_2 die Gleichung

$$F_2 = m_2\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k_3(x_2 - x_1) = k_3x_1 - (k_2 + k_3)x_2.$$

Zusammenfassend erhalten wir also das Differentialgleichungssystem $x = (x_1, x_2)^{tr}$

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \ddot{x} = -\begin{pmatrix} k_1 + k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_2 + k_3 \end{pmatrix} x.$$

Beide Matrizen in der obigen Gleichung sind positiv definit. Etwas verallgemeinernd werden wir uns daher im Folgenden mit Differentialgleichungssystemen der Form

$$M\ddot{x} = -Kx \tag{1}$$

beschäftigen, wobei $M, K \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>0}$ positiv definite Matrizen seien.

Zunächst betrachten wir aber allgemeine Differentialgleichungssysteme der Form

$$y'' = Ay, \quad A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Der folgende Satz ist eine direkte Konsequenz bzw. ein Analogon zu Sätze 3.1.4, 3.2.1 and 3.3.2. Den detaillierten Beweis lassen wir als Übung.

Satz 3.4.1. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Für das Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung*

$$y'' = Ay \tag{2}$$

gilt Folgendes:

(i) *Die Lösungen von (2) bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension $2n$.*

(ii) *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass λ^2 ein Eigenwert von A mit Eigenvektor v ist, so ist*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n,\ f(x) = e^{\lambda x}v$$

eine Lösung von (2).

(iii) *Ist A invertierbar und diagonalisierbar mit einer Basis aus Eigenvektoren $v_1, ..., v_n$ zu Eigenwerten $\lambda_1^2, ..., \lambda_n^2$, so bilden die Funktionen*

$$f_j^+(x) = e^{\lambda_j x}v_j, \quad f_j^-(x) = e^{-\lambda_j x}v_j, \quad j = 1, .., n$$

eine Basis des Lösungsraumes von (2).

Beweis. Übung.

q.e.d.

Bemerkung 3.4.2. *Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ reell, so erhält man in der Situation von Satz 3.4.1 (iii) eine reell-wertige Lösungsbasis, indem man Real- und Imaginärteile der komplex-wertigen Lösungen betrachtet (vgl. Korollar 3.2.2).*

Hieraus erhalten wir direkt folgendes Resultat für einen Spezialfall der Gleichung (1):

Korollar 3.4.3. *Für $M = I_n$ besitzt Gleichung (1), also*

$$\ddot{x} = -Kx$$

für $K \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>0}$ eine Lösungsbasis

$$f_j^+(t) = e^{i\omega_j t} v_j, \quad f_j^-(t) = e^{-i\omega_j t} v_j, \quad j = 1, ..., n$$

wobei $v_1, ..., v_n$ die (reellen) Eigenvektoren von K zu den reellen Eigenwerten $\omega_1^2, ..., \omega_n^2$, $\omega_1, ..., \omega_n > 0$, von K sind.
Eine reellwertige Lösungsbasis ist gegeben durch

$$\phi_j(t) = \cos(\omega_j t) v_j, \quad \psi_j(t) = \sin(\omega_j t) v_j, \quad j = 1, ..., n.$$

Beweis. Da K positiv definit und damit symmetrisch ist, ist K über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar (vgl. Proposition B.3.6 (*iii*)) und alle Eigenwerte sind positiv. Wir haben daher eine Basis aus reellen Eigenvektoren $v_1, ..., v_n \in \mathbb{R}^n$ von K und zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$. Setzen wir $\omega_j = \sqrt{\lambda_j}$, so folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.4.1.

q.e.d.

Beispiel 3.4.4. Nehmen wir in Abbildung 3.1 $m_1 = m_2 = m$ an. Dann können wir in der Tat (1) mithilfe von Korollar 3.4.3 lösen: Wir haben dann das System von Differentialgleichungen

$$\ddot{x} = -\begin{pmatrix} \frac{k_1+k_3}{m} & -\frac{k_3}{m} \\ -\frac{k_3}{m} & \frac{k_2+k_3}{m} \end{pmatrix} x$$

zu lösen.

Zu weiteren Vereinfachung nehmen wir $k_1 = k_2 = k$ an. Wir erhalten dann die Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{k}{m}$ mit zugehörigem Eigenvektor $v_1 = (1,1)^{tr}$ und $\lambda_2 = \frac{k+2k_3}{m}$ mit Eigenvektor $v_2 = (1,-1)^{tr}$. Nach Korollar 3.4.3 ist die allgemeine reelle Lösung gegeben durch

$$\left[c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \left[c_3 \cos\left(\sqrt{\frac{k+2k_3}{m}}t\right) + c_4 \sin\left(\sqrt{\frac{k+2k_3}{m}}t\right)\right]\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

für Konstanten $c_1, ..., c_4 \in \mathbb{R}$. Sind die Anfangswerte $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ vorgegeben, legen diese die Konstanten $c_1, ..., c_4$ eindeutig fest.

Speziell für $c_3 = c_4 = 0$ findet man aus der obigen Gleichung $x_1(t) = x_2(t)$, die Massen bewegen sich also synchron und die mittlere Feder behält stets die gleiche Länge.

Für $c_1 = c_2 = 0$ hingegen gilt $x_1(t) = -x_2(t)$, die Massen bewegen sich also stets in entgegengesetzter Richtung.

Im Allgemeinen können wir die Lösung von (1) nicht auf Korollar 3.4.3 zurückführen. Schon wenn die Massen m_1, m_2 im obigen Beispiel nicht identisch sind, können wir die Gleichung nicht einfach mit M^{-1} multiplizieren, da dann die Matrix auf der rechten Seite nicht mehr symmetrisch ist und Korollar 3.4.3 nicht mehr anwendbar ist. Es gibt zudem zahlreiche Beispiele aus der Physik, in denen die Matrix M auf der linken Seite nicht diagonal ist. Für den allgemeinen Fall formulieren wir das folgende Lemma als Hilfsmittel:

Lemma 3.4.5. *Seien $M, K \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>0}$ positiv definit.*

(i) *Alle Nullstellen des Polynoms $P(X) = \det(X \cdot M + K)$ sind reell und negativ.*

(ii) *Sind $\alpha_1, ..., \alpha_n$ die Nullstellen von P, so gibt es eine zugehörige Basis $v_1, ..., v_n$ von $\mathbb{R}^n$, so dass die Gleichung*

$$Kv_j = -\alpha_j \cdot Mv_j, \quad j = 1, ..., n$$

erfüllt ist.

Beweis.

(i) Nach dem Satz von der Hauptachsentranformation (vgl. Proposition B.3.6) (iii)) gibt es eine orthogonale Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (d.h. $T^{-1} = T^{tr}$) mit

$$T^{tr}MT = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

wobei die Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ von M alle positiv sind. Indem wir $C := \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})T^{tr}$ setzen, erhalten wir also eine invertierbare Matrix $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit

$$M = C^{tr}C.$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned}\det(\alpha M + K) = 0 \Leftrightarrow 0 &= \det(C^{-tr}(\alpha M + K)C^{-1})) \\ &= \det(\alpha(C^{-tr}MC^{-1}) + C^{-tr}KC^{-1}) \\ &= \det(\alpha I_n + C^{-tr}KC^{-1}).\end{aligned}$$

Da K symmetrisch ist, gilt für die Matrix $\tilde{K}$

$$\tilde{K}^{tr} = (C^{-tr}KC^{-1})^{tr} = C^{-tr}K^{tr}C^{-1} = \tilde{K},$$

$\tilde{K}$ ist also ebenfalls symmetrisch. Für jedes $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt weiterhin

$$v^{tr}\tilde{K}v = v^{tr}C^{-tr}KC^{-1}v = (C^{-1}v)^{tr}K(C^{-1}v) > 0,$$

da K positiv definit ist, also ist auch $\tilde{K}$ positiv definit.

Somit haben wir gezeigt, dass $\det(\alpha M + K) = 0$ genau dann gilt, wenn λ ein Eigenwert von $-\tilde{K}$ ist. Diese sind aber wie behauptet alle reell und negativ.

(ii) Die Matrix $\tilde{K} = C^{-tr}KC^{-1}$ ist, wie oben gezeigt, positiv definit und somit über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar, d.h. es existiert eine Basis $u_1, ..., u_n$ von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von $\tilde{K}$. Ist nun α_j eine Nullstelle des Polynoms P, also nach dem Beweis von *(i)* $-\alpha_j$ ein Eigenwert von $\tilde{K}$, so gilt

$$(C^{-tr}KC^{-1})u_j = \tilde{K}u_j = -\alpha_j u_j. \tag{3}$$

Definieren wir nun $v_j := C^{-1}u_j$, so bilden $v_1, ..., v_n$ ebenfalls eine Basis von $\mathbb{R}^n$, da C invertierbar ist. Multiplizieren wir (3) von links mit C^{tr}, so finden wir

$$Kv_j = KC^{-1}(Cv_j) = KC^{-1}u_j = -\alpha_j C^{tr}u_j = -\alpha_j(C^{tr}C)v_j = \alpha_j M v_j,$$

wie behauptet.

q.e.d.

Bemerkung 3.4.6. *Für $M \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>0}$ kann man auch eine Zerlegung $M = C^{tr}C$ finden, bei der C eine invertierbare Dreiecksmatrix ist. Diese Zerlegung nennt man dann eine* ***Cholesky-Zerlegung*** *von M.*

Hiermit können wir also eine allgemeine Lösung unseres Gleichungssystems (1) angeben.

Satz 3.4.7. *Eine Basis des Lösungsraumes des Differentialgleichungssystems* (1) *hat die Form*

$$f_j^+(t) = e^{i\omega_j t} v_j, \quad f_j^-(t) = e^{-i\omega_j t} v_j, \quad j = 1, ..., n,$$

wobei $\omega_1, ..., \omega_n > 0$ *seien, so dass* $-\omega_1^2, ..., -\omega_n^2$ *die Nullstellen des Polynoms* $\det(X \cdot M + K)$ *sind und* $v_j \in \operatorname{Kern}(K - \omega^2 M)$ *gilt.*

Beweis. Der Beweis läuft vollkommen analog zu dem von Korollar 3.4.3.

q.e.d.

Kapitel 4

Abhängigkeitssätze

In diesem kurzen Kapitel wollen wir untersuchen, wie sich die Lösungen von Differentialgleichungen verhalten, wenn man die rechte Seite bzw. die Anfangsbedingungen leicht stört. Häufig ist man gezwungen, bei der Modellierung von Anwendungsproblemen gewisse Vereinfachungen anzunehmen, da sich z.B. nicht immer alle Parameter in einer exakten Formel quantifizieren lassen (in der Physik bzw. Mechanik etwa Reibungseffekte, Luftwiderstand, etc., bei Räuber-Beute-Modellen äußere Einflüsse wie das Klima), oder man durch leichte Veränderung der Differentialgleichung eine einfacher lösbare Gleichung erhält, wie etwa durch die Klein-Winkel-Näherung bei der Pendelgleichung (vgl. Beispiel 1.2.7). Einige der Schlüsse, die wir im Folgenden sehen werden, erinnern an unsere Betrachtungen in Abschnitt 1.4.2, wo wir Abschätzungen für die Lösung von Differentialgleichungen hergeleitet haben.

4.1 Stetige Abhängigkeit

Wir beginnen zunächst mit einem Beispiel, das zeigt, dass die zunächst vielleicht einleuchtende Vermutung, dass eine kleine Störung in den Daten auch nur wenig Einfluss auf die Lösung hat, leider falsch ist.

Beispiel 4.1.1. Betrachten wir die Situation eines sogenannten **Doppelpendels** (siehe Abbildung 4.1). Hierbei sind zwei Punktmassen m_1, m_2 an masselosen, starren Stäben wie gezeigt reibungsfrei aufgehängt und man will die Auslenkungswinkel θ_1, θ_2 in Abhängigkeit von der Zeit untersuchen. Die Grundidee des Energieerhaltungssatzes, die wir in Beispiel 1.2.7 verwendet haben, um eine Differentialgleichung herzuleiten, die die Schwingung eines einzelnen Pendels beschreibt, liefert (mit deutlich mehr Aufwand[1]) folgendes System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung für ein Doppelpendel.

$$\begin{aligned}
&(m_1+m_2)\ell_1\ddot{\theta}_1 + m_2\ell_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2) + m_2\ell_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1-\theta_2) + (m_1+m_2)g\sin(\theta_1) = 0,\\
&\ell_2\ddot{\theta}_2 + \ell_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1-\theta_2) - \ell_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1-\theta_2) + g\sin(\theta_2) = 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

[1] Für eine Herleitung der Gleichung siehe etwa `https://math24.net/double-pendulum.html`

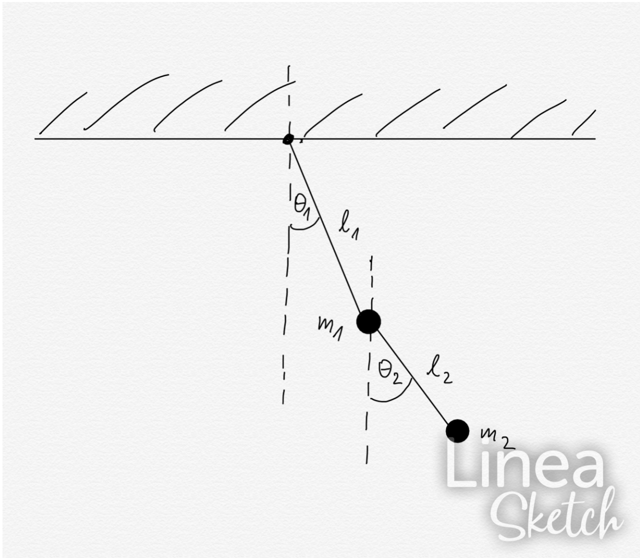

Abbildung 4.1: Ein Doppelpendel

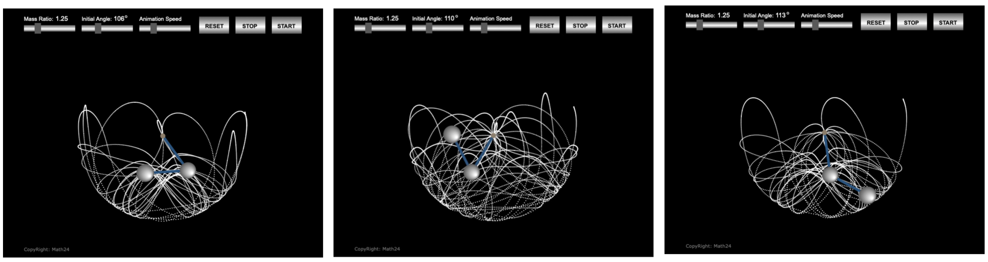

Abbildung 4.2: Bewegung des Doppelpendels bei Anfangsauslenkung $\theta_1 = \theta_2 = 106°, 110°, 113°$

Man kann zeigen, dass diese System **chaotisch** ist, d.h., das zwar für jede Anfangsbedingung eine eindeutige Lösung existiert, diese aber extrem sensitiv (und unvorhersehbar) von den Anfangsdaten abhängt. Die untenstehenden Bilder stammen von der Webseite `https://math24.net/double-pendulum.html` und zeigen jeweils eine Simulation der Bewegung des Doppelpendels für nur leicht verschiedene Anfangsbedingungen. Man sieht sehr deutlich, dass der qualitative Verlauf der Bewegung selbst für dicht beieinanderliegende Anfangsbedingungen sich bereits sehr stark ändert.

Für die nachfolgenden theoretischen Betrachtungen benötigen wir folgenden Begriff.

Definition 4.1.2. Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes, kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Für $x_0 \in (a, b]$ nennen wir den Ausdruck

$$(\mathcal{D}^- f)(x_0) := \limsup_{h \searrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}$$

die linksseitige, obere **Dini-Derivierte** von f in x_0.

Bemerkung 4.1.3. (*i*) *Lässt man $\pm\infty$ als Werte zu, so existiert die linkssetige, obere Dini-Derivierte offenbar für beliebige stetige Funktionen.*

(*ii*) *Indem man das vorgegebene Vorzeichen von h bzw. den Limes superior in der Definition durch einen Limes inferior ersetzt, erhält man analog auch rechtsseitige, sowie untere Dini-Derivierte einer stetigen Funktion.*

Wir benötigen das folgende Lemma über die Dini-Derivierte:

Lemma 4.1.4. *Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes, kompaktes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Weiter gelte $f(a) < g(a)$. Dann gilt genau eine der folgenden zwei Aussagen:*

(*i*) *Es gilt $f(x) < g(x)$ für alle $x \in I$.*

(*ii*) *Es exisitiert ein $x_0 \in (a, b]$, so dass $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a, x_0)$, $f(x_0) = g(x_0)$, und*
$$(\mathcal{D}^- f)(x_0) \geq (\mathcal{D}^- g)(x_0)$$
gelten.

Beweis. Offenbar können nicht gleichzeitig (*i*) und (*ii*) eintreten. Nehmen wir also an, dass (*i*) nicht gilt.

Nach Voraussetzung gibt es ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) \geq g(x^*)$. Wählen wir dann x_0 als das Infimum der Menge aller dieser x^*. Da f und g beide stetig sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a, a + \varepsilon)$ gilt, also haben wir $x_0 > a$. Weiter gilt wieder wegen der Stetigkeit $f(x_0) \geq g(x_0)$. Nach Definition von x_0 gilt aber auch

$$f(x_0) - g(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} f(x) - g(x) \leq 0,$$

insgesamt also $f(x_0) = g(x_0)$.

Sei nun $0 < h < x_0 - a$. Dann haben wir $f(x_0 - h) < g(x_0 - h)$, also folgt

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} > \frac{g(x_0) - g(x_0 - h)}{h}.$$

Die Behauptung über die Dini-Derivierte folgt nun direkt, indem man den Limes superior für $h \searrow 0$ auf beiden Seiten betrachtet.

q.e.d.

Für differenzierbare Funktionen haben wir folgendes Resultat. Es bezeichne wie auch in vorherigen Kapiteln $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem Raum $\mathbb{R}^n$.

Lemma 4.1.5. *Sei $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar. Dann gilt für jedes $x \in I$*

$$(\mathcal{D}^- \|f\|)(x) \leq \|f'(x)\|.$$

Beweis. Übung.

q.e.d.

Wir führen noch folgendes Konzept formal ein.

Definition 4.1.6. Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $F : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein intervall und $x_0 \in I$. Eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}^n$ heißt eine **Näherungslösung** des Anfangswertproblems

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D,$$

falls für alle $x \in I$ auch $(x, f(x)) \in D$ gilt und es $\gamma, \delta > 0$ gibt mit

$$\|f(x_0) - y_0\| \leq \gamma \quad \text{und} \quad \|f'(x) - F(x, f(x))\| \leq \delta \quad \text{für alle } x \in I.$$

Wir nennen (γ, δ) auch die **Toleranz** der Näherungslösung.

Hiermit erhalten wir nun einen Abschätzungssatz für Lösungen von Differentialgleichungen, gewissermaßen eine Präzisierung von Satz 1.4.8.

Satz 4.1.7. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die auf D einer globalen Lipschitz-Bedingung*

$$\|F(x,y) - F(x,\tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x,y), (x,\tilde{y}) \in D$$

mit Lipschitz-Konstante $L > 0$ genüge (vgl. Definition 2.1.10). Weiter sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nicht-entartetes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

wobei $x_0 \in I$ gelte. Sei zudem $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}^n$ eine Näherungslösung für (2) mit Toleranz (γ, δ). Dann gilt für alle $x \in I$ die Abschätzung

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \gamma e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L|x-x_0|} - 1\right).$$

Beweis. Angenommen es existiert ein $b \in I$ mit $b > x_0$. Seien weiterhin $\tilde{\gamma} > \gamma$ und $\tilde{\delta} > \delta$ und

$$g : [x_0, b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) := \tilde{\gamma} e^{L(x-x_0)} + \frac{\tilde{\delta}}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right).$$

Es gilt dann nach Konstruktion

$$g(x_0) = \tilde{\gamma} \quad \text{und} \quad g'(x) = \tilde{\delta} + Lg(x) \quad \text{für alle } x_0 \in [x_0, b].$$

Betrachten wir nun die Funktion $h : [x_0, b] \to \mathbb{R},\ h(x) := \|f(x) - \tilde{f}(x)\|$. Es gilt dann nach Voraussetzung $h(x_0) \leq \gamma < \tilde{\gamma}$ und nach Lemma 4.1.5 auch

$$\begin{aligned}(\mathcal{D}^- h)(x) &\leq \|f'(x) - \tilde{f}'(x)\| \\ &= \|F(x, f(x)) - \tilde{f}'(x)\| \\ &\leq \|F(x, f(x)) - F(x, \tilde{f}(x))\| + \|F(x, \tilde{f}(x)) - \tilde{f}'(x)\| \\ &\leq L\|f(x) - \tilde{f}(x)\| + \delta \\ &< Lh(x) + \tilde{\delta}\end{aligned} \tag{3}$$

für alle $x \in (x_0, b]$.

Wir behaupten, dass $h(x) < g(x)$ für alle $x \in [x_0, b]$ gilt. Ansonsten gäbe es nach Lemma 4.1.4 ein $x^* \in (x_0, b]$ mit $h(x^*) = g(x^*)$ und

$$(\mathcal{D}^- h)(x^*) \geq (\mathcal{D}^- g)(x^*) = g'(x^*) = \tilde{\delta} + Lg(x^*) = \tilde{\delta} + Lh(x^*),$$

also haben wir einen Widerspruch zu (3).

Per Grenzübergang $\tilde{\gamma} \searrow \gamma$, $\tilde{\delta} \searrow \delta$ ergibt sich so die behauptete Abschätzung

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \gamma e^{L(x-x_0)} + \frac{\delta}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right)$$

für alle $x \in [x_0, b]$.

Für $x < x_0$ argumentiert man analog und vervollständigt so den Beweis.

q.e.d.

Der folgende Satz zeigt formal, dass man für hinreichend gutartige Anfangswertprobleme in der Tat eine stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten hat, d.h. verändert man die Anfangsbedingungen und auch die rechte Seite nur leicht, ändert sich auch die Lösung des Problems nur leicht.

Satz 4.1.8. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung (vgl. Definition 2.1.10) genügt. Weiter sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$y' = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad \text{mit } x_0 \in I^\circ \text{ und } (x_0, y_0) \in D.$$

(*i*) *Dann existieren ein $\alpha > 0$ und ein $L > 0$, so dass die kompakte Menge*

$$S_\alpha := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}^n \; : \; \|y - f(x)\| \leq \alpha\}$$

ganz in D enthalten ist und die Abschätzung

$$\|F(x, y) - F(x, \tilde{y})\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y), (x, \tilde{y}) \in S_\alpha$$

gilt.

(*ii*) *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass jede Lösung $\tilde{f}$ des Anfangswertproblems*

$$y' = \tilde{F}(x, y), \quad y(x_0) = \tilde{y}_0, \tag{4}$$

wobei $\tilde{F} : S_\alpha \to \mathbb{R}^n$ stetig sei und einer lokalen Lipschitz-Bedingung genüge, sowie

$$\|y_0 - \tilde{y}_0\| < \delta, \quad \|F(x, y) - \tilde{F}(x, y)\| < \delta \quad \text{für alle } (x, y) \in S_\alpha$$

gelten mögen, auf ganz I existiert und die Abschätzung

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I$$

erfüllt.

Beweis.

(*i*) Da die Menge $\{(x, f(x)) \; : \; x \in I\} \subset D$ kompakt und hat somit einen positiven Abstand $\rho > 0$ zu der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \setminus D$ (Übung). Für $\alpha := \rho/2$ gilt also $S_\alpha \subset D$. Weiterhin ist S_α offenbar abgeschlossen und beschränkt, also kompakt.

Da F einer lokalen Lipschitz-Bedingung auf D genügt, folgt nach Lemma 2.1.12 direkt, dass $F|_{S_\alpha}$ einer globalen Lipschitz-Bedingung. Daher existiert die Konstante $L > 0$ wie behauptet.

(*ii*) Sei $\varepsilon > 0$. Ist $\tilde{f} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{I} \subseteq I$ eine Lösung (4), so folgt nach Satz 4.1.7 mit $\gamma = \delta$ die Abschätzung

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \delta \left[e^{L|x - x_0|} + \frac{1}{L} \left(e^{L|x - x_0|} - 1 \right) \right], \quad \text{für alle } x \in \tilde{I}. \tag{5}$$

Wir können nun δ so klein wählen, dass die rechte Seite von (5) $\leq \min\{\alpha, \varepsilon\}/2$ ist. Damit gilt also $(x, \tilde{f}(x)) \in S_{\alpha/2}$ für alle $x \in \tilde{I}$. Nach Satz 2.1.19 und Satz 2.1.21 lässt sich nun aber die Lösung $\tilde{f}$ auf das ganze Intervall I fortsetzen und dort gilt nach Satz 4.1.7 ebenfalls (5). Damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

Gerade in Anwendungen fasst man oft verschiedene Einflussgrößen in der Modellierung durch Parameter zusammen. Vor diesem, aber auch, wie wir im Anschluss sehen werden, vor eher theoretischem Hintergrund ist das folgende Korollar wichtig.

Korollar 4.1.9. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ offen und $H : U \to \mathbb{R}^n$, $(x, y, p) \mapsto H(x, y, p)$ eine stetige Funktion, die in y einer lokalen Lipschitz-Bedingung genüge, d.h. zu jedem Punkt in U existiere eine offene Umgebung V und ein $L > 0$, so dass gilt*

$$\|H(x, y, p) - H(x, \tilde{y}, p)\| \leq L\|y - \tilde{y}\| \quad \text{für alle } (x, y, p), (x, \tilde{y}, p) \in V.$$

Weiter sei $(x_0, y_0, p_0) \in U$, $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $x_0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = H(x, y, p_0), \quad y(x_0) = y_0.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $\delta > 0$, so dass für alle $\tilde{y}_0, \tilde{p}_0 \in U$ mit $\|y_0 - \tilde{y}_0\| < \delta$ und $\|p_0 - \tilde{p}_0\| < \delta$ eine Lösung $\tilde{f}$ des Anfangswertproblems

$$y' = H(x, y, \tilde{p}_0), \quad y(x_0) = \tilde{y}_0$$

auf ganz I existiert und für alle $x \in I$ die Ungleichung

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| < \varepsilon$$

erfüllt.

Beweis. Für $\alpha > 0$ betrachten wir die Menge

$$T_\alpha := \{(x, y, p) \in I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \,:\, \|y - f(x)\| + \|p - p_0\| \leq \alpha\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Diese Menge ist offenbar kompakt, also existiert nach demselben Argument wie im Beweis von Satz 4.1.8 (i) ein $\alpha > 0$, so dass $T_\alpha \subset U$ gilt.

Da H stetig ist existiert für alle $\delta > 0$ ein $\rho > 0$, so dass für alle $\alpha < \rho$ und $(x, y, p), (x, y, p_0) \in T_\alpha$ die Abschätzung

$$H(x, y, p) - H(x, y, p_0)\| < \delta$$

erfüllt ist. Die Behauptung folgt nun mit Satz 4.1.8 (ii) mit $F(x, y) = H(x, y, p_0)$ und $\tilde{F}(x, y) = H(x, y, p)$.

q.e.d.

Hieraus erhalten wir folgenden Satz, den wir als Verallgemeinerung von Satz 1.4.8 verstehen können.

Satz 4.1.10. *Sei $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ offen und $F : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung in y genüge. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = F(x, y)$ auf einem kompakten Intervall $I = [a, b]$.*
Ist $g : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige stetige Abbildung mit

$$g(a) \leq f(a) \quad \text{und} \quad (\mathcal{D}^- g)(x) \leq F(x, g(x)) \quad \text{für alle } x \in (a, b],$$

so gilt

$$g(x) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in I.$$

Beweis. Für $p \geq 0$ sei f_p die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = F(x, y) + p, \quad y(a) = f(a) + p.$$

Nach Korollar 4.1.9 existiert $f_p$für alle hinreichend kleinen $p \geq 0$ und es gilt $\lim_{p \to 0} f_p(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Daher reicht es zu zeigen, dass für $p > 0$ und $x \in I$ stets $g(x) < f_p(x)$ gilt.

Sei also $p > 0$. Dann gilt offenbar $g(a) < f_p(a)$ nach Konstruktion. Wäre dann die behauptete Ungleichung für ein $x \in (a, b]$ nicht erfüllt, so gäbe es nach Lemma 4.1.4 ein $x_0 \in (a, b]$ mit $g(x) < f_p(x)$ für alle $a \leq x < x_0$, $g(x_0) = f_p(x_0)$ und $(\mathcal{D}^- g)(x_0) \geq (\mathcal{D}^- f_p)(x_0)$. Da f_p aber differenzierbar ist, folgt damit

$$(\mathcal{D}^- g)(x_0) \geq (\mathcal{D}^- f_p)(x_0) = f_p'(x_0) = F(x_0, f_p(x_0)) + p = F(x_0, g(x_0)) + p > (\mathcal{D}^- g)(x_0)$$

nach Voraussetzung an g. Das ist offenbar ein Widerspruch und die Behauptung folgt.
q.e.d.

Zum Abschluss dieses Abschnitts leiten wir noch eine berühmte und wichtige Abschätzung her, die als das *Lemma von Grönwall* oder *Grönwall'sche Ungleichung* bekannt ist.

Lemma 4.1.11 (Grönwall'sche Ungleichung). *Sei $I = [a, b]$ ein nicht-leeres, kompaktes Interval. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und es mögen stetige Funktionen $\alpha : I \to \mathbb{R}$ und $\beta : I \to [0, \infty)$ existieren, so dass für alle $x \in I$ die Abschätzung*

$$f(x) \leq \alpha(x) + \int_a^x \beta(t) f(t) \mathrm{d}t$$

gilt.
Dann haben wir für $x \in I$ die Abschätzung

$$f(x) \leq \alpha(x) + \int_a^x \alpha(t) \beta(t) e^{\int_t^x \beta(s) \mathrm{d}s}.$$

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir im Folgenden $B(x) := \int_a^x \beta(t)\mathrm{d}t$, was wegen der Stetigkeit von β wohldefiniert ist. Wir betrachten dann die Funktion

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(x) = e^{-B(x)} \cdot \int_a^x \beta(t)f(t)\mathrm{d}t.$$

F ist differenzierbar und es gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} F'(x) = -\beta(x)e^{-B(x)} \int_a^x \beta(t)f(t)\mathrm{d}t + e^{-B(x)}\beta(x)f(x) \\ = \beta(x)e^{-B(x)} \left[f(x) - \int_a^x \beta(t)f(t)\mathrm{d}t \right] \leq \alpha(x)\beta(x)e^{-B(x)}. \end{aligned}$$

Durch Integration erhält man somit wegen $F(a) = 0$

$$F(x) = F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^x \alpha(t)\beta(t)e^{-B(t)}\mathrm{d}t.$$

Es folgt somit nach Definition von F

$$\int_a^x \beta(t)f(t)\mathrm{d}t \leq e^{B(x)} \int_a^x \alpha(t)\beta(t)e^{-B(t)}\mathrm{d}t = \int_a^x \alpha(t)\beta(t)e^{-\int_t^x \beta(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t.$$

Da nach Voraussetzung $f(x) - \alpha(x) \leq \int_a^x \beta(t)f(t)\mathrm{d}t$ gilt, folgt also die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 4.1.12. *Sind die Funktionen α, β konstant, gilt das entsprechende Resultat (mit demselben Beweis) auch für halboffene Intervalle $I = [a, b)$, wobei wir $b = \infty$ zulassen können. Die Abschätzung vereinfacht sich dann zu*

$$f(x) \leq \alpha e^{\beta \cdot (x-a)},$$

wie wir in der Übung sehen werden.

4.2 Differenzierbare Abhängigkeit bei autonomen Gleichungen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns stets mit einer autonomen Differentialgleichung

$$y' = G(y), \tag{1}$$

wobei $G : D \to \mathbb{R}^n$ ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) eine stetige Funktion sei, die einer lokalen Lipschitz-Bedingung genüge.

Wir wissen also nach dem Satz von Picard-Lindelö 2.1.13 und dem Fortsetzungssatz 2.1.21, dass es zu jedem Anfangswert $z \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\Phi(x, z)$ von (1) gibt, welche die Anfangsbedingung $y(0) = z$ erfüllt, und es gibt ein maximales (offenes) Existenzintervall $I_{max}(z)$, auf dem diese Lösung existiert (vgl. auch die Diskussion in Abschnitt 1.4.1).

Im Folgenden wollen wir diesen so genannten lokalen Fluss $\Phi(x, z)$ als Funktion von zwei Variablen untersuchen. Hierzu haben wir zunächst die folgende Aussage als Konsequenz des Stetigkeitsresultates Satz 4.1.8.

Satz 4.2.1. *Unter den in diesem Abschnitt geltenden Voraussetzungen gilt: Die Menge*

$$U_G := \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \ : \ z \in D, \ x \in I_{max}(z)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

ist offen und die Funktion

$$\Phi : U_G \to \mathbb{R}^n, \quad (x, z) \mapsto \Phi(x, z)$$

ist stetig.

Beweis. Sei $(x^*, z^*) \in U_G$. Da das maximale Existenzintervall $I_{max}(z^*)$ offen ist, existiert ein $\rho > 0$ mit $[x^* - \rho, x^* + \rho] \subset I_{max}(z^*)$. Auf diesem Intervall existiert also die Lösung $\Phi(x, z^*)$. Nach Satz 4.1.8 existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $\Phi(x, z)$ für alle (x, z) mit $\|z - z^*\| < \delta$ und $|x - x^*| < \rho$ existiert. Damit ist U_G wie behauptet offen.

Wir zeigen noch die Stetigkeit von Φ. Sei dazu wieder $(x^*, z^*) \in U_G$ und $((x_n, z_n))_n$ eine Folge in U_G mit $\lim_{n\to\infty}(x_n, z_n) = (x^*, y^*)$. Für hinreichend große n existiert daher $\Phi(x^*, z_n)$ wieder wegen Satz 4.1.8. Nach der Dreiecksungleichung haben wir somit

$$\|\Phi(x_n, z_n) - \Phi(x^*, z^*)\| \leq \|\Phi(x_n, z_n) - \Phi(x^*, z_n)\| + \|\Phi(x^*, z_n) - \Phi(x^*, z^*)\|.$$

Sei nun $K \subset U_G$ eine kompakte Umgebung von (x^*, z^*). Für hinreichend großes n gilt also $(x^*, z_n), (x_n, z_n) \in K$. Da G auf K stetig ist, nimmt jede Komponente von G dort ein Maximum M_i an und es gilt nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung für jede Komponente von Φ_i von Φ gilt

$$\Phi_i(x_n, z_n) - \Phi_i(x^*, z_n) = \Phi_i'(\xi, z_n)(x_n - x^*) = G_i(\Phi(\xi, z_n))(x_n - x^*),$$

es folgt also wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ und der Beschränktheit von G, dass

$$\|\Phi(x_n, z_n) - \Phi(x^*, z_n)\| \leq M|x_n - x^*| \to 0, \quad n \to \infty$$

für eine geeignete Konstante M gilt. Nach dem Stetigkeitssatz 4.1.8 gilt zudem $\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n, z^*) = \Phi(x^*, z^*)$, also folgt insgesamt

$$\Phi(x_n, z_n) \to \Phi(x^*, z^*), \ n \to \infty,$$

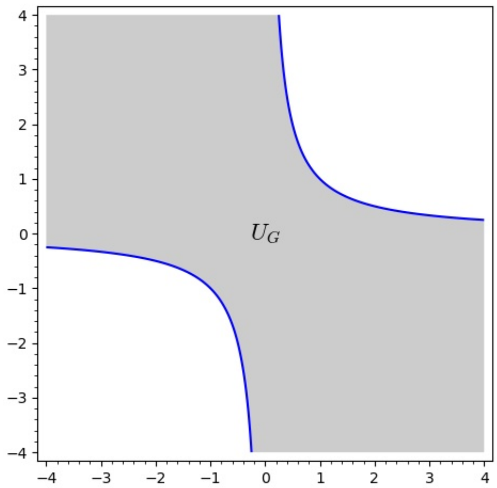

Abbildung 4.3: Die Menge U_G ist dass eingefärbte Gebiet zwischen den zwei Hyperbelästen

also ist $\Phi : U_G \to \mathbb{R}^n$ wie behauptet (folgen-)stetig.

q.e.d.

Beispiel 4.2.2. Die Differentialgleichung

$$y' = y^2$$

lässt sich elementar durch Separation der Variablen lösen. Für den lokalen Fluss gilt dann

$$\Phi(x,z) = \frac{z}{1-xz} \text{ für } \begin{cases} x \in (-\infty, 1/z) & \text{, falls } z > 0 \\ x \in (1/z, \infty) & \text{, falls } z < 0 \\ x \in \mathbb{R} & \text{, falls } z = 0. \end{cases}$$

Die Menge U aus Satz 4.2.1 ist also gegeben durch

$$U_G = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xz < 1\}$$

(siehe auch Abbildung 4.3). Auf dieser Menge ist Φ offenbar stetig.

Nach Voraussetzung ist die Funktion $\Phi : U_G \to \mathbb{R}^n$ wie in Satz 4.2.1 in der ersten Variable x stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_x \Phi(x,z) = G(\Phi(x,z)).$$

Sei nun die Funktion G zusätzlich zu den übrigen Voraussetzungen in (1) stetig differenzierbar und nehmen wir an (was zunächst alles andere als klar ist!), dass Φ genügend oft stetig differenzierbar ist, dass man die partiellen Ableitungen vertauschen kann.

Ist $\Phi = (\phi_1, ..., \phi_n)^{tr}$ und $z = (z_1, ..., z_n)^{tr}$, so schreiben wir (unter leichtem Missbrauch der Notation)

$$\partial_z \Phi(x, z) = \left(\partial_{z_j} \phi_i\right)_{ij}$$

für die $n \times n$-Matrix aller partiellen Ableitungen der Komponenten von Φ, gewissermaßen als partielle Jacobi-Matrix in z. Weiter bezeichne $J(G)$ die (übliche) Jacobi-Matrix von G. Nach unserer Annahme über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen haben wir dann

$$\partial_x(\partial_z \Phi(x, z)) = \partial_z(\partial_x \Phi(x, z)) = \partial_z(G(\Phi(x, z))) = J(G)(\Phi(x, z)) \cdot \partial_z \Phi(x, z),$$

wobei wir im letzen Schritt die mehrdimensionale Kettenregel verwendet haben. Wegen $\Phi(0, z) = z$ und $\partial_z z = I_n$ ist unter unseren Annahmen als $\partial_z \Phi(x, z)$ eine Lösung des (Matrix-)Anfangswertproblems

$$Y' = J(G)(\Phi(x, z)) \cdot Y, \quad Y(0) = I_n.$$

Wir wollen nun zeigen, dass unsere Annahme auch gerechtfertigt ist. Hierzu benötigen wir zunächst das folgende Lemma, das man als mehrdimensionale Version des Satzes von Taylor (vgl. Satz A.6.1) verstehen kann. Im Folgenden bezeichne $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ (vgl. Lemma 3.2.8).

Lemma 4.2.3. *Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig (total) differenzierbar. Für eine beliebige kompakte, konvexe Teilmenge $K \subset U$ Existiert dann eine stetige Funktion $R : K \times K \to \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass für alle $(x, y) \in K \times K$*

$$F(y) - F(x) = J(F)(x) \cdot (y - x) + R(x, y) \cdot (y - x)$$

gilt und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|R(x, y)\| < \varepsilon \quad \textit{für alle } x, y \in K \textit{ mit } \|x - y\| < \delta.$$

Beweis. Seien $x, y \in K$ beliebig. Da K konvex ist, gilt für alle $t \in [0, 1]$ auch $x+t(y-x) \in K$. Wir können also die Funktion

$$Q : [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \quad Q(t) = F(x + t(y - x))$$

definieren. Diese ist sicherlich stetig differenzierbar, da dies für F gilt und wir haben somit

$$\begin{aligned} F(y) - F(x) &= Q(1) - Q(0) \\ &= \int_0^1 Q'(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 J(F)(x + t(y - x)) \cdot (y - x)\mathrm{d}t \\ &= \tilde{R}(x, y) \cdot (y - x) \end{aligned}$$

mit $\tilde{R}(x, y) = \int_0^1 J(F)(x + t(y - x))\mathrm{d}t$. Als Funktion auf $K \times K$ ist $\tilde{R}$ nun stetig: $J(F)$ ist nach Voraussetzung stetig auf K, also wegen der Kompaktheit von K gleichmäßig stetig.

Also existiert zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\|J(F)(x) - J(F)(y)\| < \varepsilon$ für alle $x, y \in K$ mit $\|x-y\| < \delta$. Definieren wir nun $\|(x,y)\| := \|x\| + \|y\|$ als Norm auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Für $(x,y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in K$ mit $\|(x,y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\| < \delta$ folgt dann auch für $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\|x + t(y-x) - (\tilde{x} + t(\tilde{y} - \tilde{x}))\| &= \|(1-t)(x-\tilde{x}) + t(y-\tilde{y})\| \\ &\leq \|x - \tilde{x}\| + \|y - \tilde{y}\| = \|(x,y) - (\tilde{x}, \tilde{y})\| < \delta,\end{aligned}$$

also folgt

$$\|J(F)(x + t(y-x)) - J(F)(\tilde{x} + t(\tilde{y} - \tilde{x}))\| < \varepsilon$$

und damit auch

$$\|\tilde{R}(x,y) - \tilde{R}(\tilde{x}, \tilde{y})\| \leq \int_0^1 \|J(F)(x + t(y-x)) - J(F)(\tilde{x} + t(\tilde{y} - \tilde{x}))\| \mathrm{d}t < \varepsilon,$$

also ist $\tilde{R}$ stetig.

Setzen wir nun $R(x,y) := \tilde{R}(x,y) - J(F)(x)$, so haben wir nach Konstruktion

$$F(y) - F(x) = \tilde{R}(x,y) \cdot (y-x) = J(F)(x) \cdot (y-x) + R(x,y) \cdot (y-x)$$

wie verlangt, und wegen der Stetigkeit von R und der Tatsache, dass $R(x,x) = J(F)(x) - J(F)(x) = 0$ für alle $x \in K$ gilt folgt auch die zweite Bedingung.

q.e.d.

Hiermit können wir nun zeigen, dass die Annahmen, die wir in der Diskussion von Lemma 4.2.3 getroffen haben, tatsächlich gerechtfertigt sind.

Satz 4.2.4. *Es gelten die Bedingungen in* (1) *und G sei zudem stetig differenzierbar. Für die Funktion $\Phi : U_G \to \mathbb{R}^n$ wie in Satz 4.2.1 existiert dann die partielle Ableitung $\partial_z \Phi$ und diese ist auf U_G stetig. Für festes z ist diese Ableitung gleich der Lösung $B(x,z)$ des (Matrix-)Anfangswertproblems*

$$Y' = J(G)(\Phi(x,z)) \cdot Y, \quad Y(0) = I_n.$$

Insbesondere ist Φ auf U_G stetig differenzierbar.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass nach fast wörtlich demselben Beweis wie für Lemma 3.2.8 die Ungleichung

$$\|A \cdot v\| \leq \|A\| \cdot \|v\| \tag{2}$$

für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $v \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Sei nun $\varepsilon > 0$ und $(x,z) \in U_G$ und $K \subset U_G$ eine kompakte Umgebung von (x,z). Seien dann $R : K \times K \to \mathbb{R}^{n \times n}$ wie in Lemma 4.2.3 und $\delta > 0$ so, dass $\|R(x,y)\| < \varepsilon$ für alle $x, y \in K$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt. Weiter sei $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $(x, z + h) \in K$ gilt. Dann gelten nach Lemma 2.1.8 die Integralgleichungen

$$\Phi(x, z) = z + \int_0^x G(\Phi(t, z))\mathrm{d}t$$

und

$$\Phi(x, z + h) = z + h + \int_0^x G(\Phi(t, z + h))\mathrm{d}t.$$

Für $x > 0$ ergibt sich hieraus aus der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\|\Phi(x, z + h) - \Phi(x, z)\| \leq \|h\| + \int_0^x \|G(\Phi(t, z + h)) - G(\Phi(t, z))\|\mathrm{d}t$$

Analog behandelt man den Fall $x < 0$. Im Folgenden betrachten wir stets nur $x > 0$.

Sei nun $V \subseteq D$ eine offene Umgebung der Menge $\{\Phi(t, z) : 0 \leq t \leq x\}$ dergestalt, dass der Abschluss $\overline{V}$ von V kompakt und in D enthalten ist. Eine solche Umgebung existiert nach Satz 4.1.8. Wieder nach Satz 4.1.8 existiert dann für hinreichend kleines $h \in \mathbb{R}^n$, wobei wir ohne Einschränkung $\|h\| < \delta$ annehmen können, dass $\Phi(x, z + h)$ existiert und die Menge $\{\Phi(t, z + h) : 0 \leq t \leq x\}$ in V enthalten ist. Da G einer lokalen Lipschitz-Bedingung genügt, existiert eine Lipschitz-Konstante $L > 0$ auf der kompakten Menge $\overline{V}$ (vgl. Lemma 2.1.12 (ii)). Hieraus ergibt sich nun die Abschätzung

$$\|\Phi(x, z + h) - \Phi(x, z)\| \leq \|h\| + L \int_0^x \|\Phi(t, z + h) - \Phi(t, z)\|\mathrm{d}t.$$

Nach der Grönwall'schen Ungleichung Lemma 4.1.11 (vgl. auch Bemerkung 4.1.12) gilt demnach die Abschätzung

$$\|\Phi(x, z + h) - \Phi(x, z)\| \leq \|h\|e^{Lx}. \tag{3}$$

Sei nun $B(x, z)$ die Lösung des Matrix-Anfangswertproblems im Satz. Dann folgt wieder aus Lemma 2.1.8 die Identität

$$B(x, z) \cdot h = h + \int_0^x J(G)(\Phi(x, z))B(t, z) \cdot h\mathrm{d}t.$$

Wieder aus der Dreiecksungleichung folgt damit für $\|h\|$ hinreichend klein

$$\begin{aligned} &\|\Phi(x, z + h) - \Phi(x, z) - B(x, z) \cdot h\| \\ &\qquad \leq \int_0^x \|G(\Phi(t, z + h)) - G(\Phi(t, z)) - J(G)(\Phi(t, z)) \cdot B(t, z) \cdot h\|\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun Lemma 4.2.3 und erneut die Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} &\|\Phi(x, z + h) - \Phi(x, z) - B(x, z) \cdot h\| \\ &\qquad \leq \int_0^x \left\| J(G)(\Phi(t, z)) \cdot \Big(\Phi(t, z + h) - \Phi(t, z) - B(t, z) \cdot h\Big) \right\| \mathrm{d}t \\ &\qquad\qquad + \int_0^x \left\| R\Big(\Phi(t, z), \Phi(t, z + h)\Big) \cdot \Big(\Phi(t, z + h) - \Phi(t, z)\Big) \right\| \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Wegen (2) lässt sich dies weiter nach oben abschätzen durch

$$\int_0^x \|J(G)(\Phi(t,z))\| \cdot \|\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z) - B(t,z)\cdot h\| \mathrm{d}t \\ + \int_0^x \|R(\Phi(t,z), \Phi(t,z+h))\| \cdot \|\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z)\| \mathrm{d}t.$$

Nun ist die Abbildung $y \mapsto \|J(G)(y)\|$ nach Voraussetzung stetig, ist also auf der kompakten Menge $\overline{V}$ durch ein $M \geq 0$ beschränkt, so dass gilt

$$\int_0^x \|J(G)(\Phi(t,z))\| \cdot \|\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z) - B(t,z)\cdot h\| \mathrm{d}t \\ \leq M \int_0^x \|\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z) - B(t,z)\cdot h\| \mathrm{d}t. \quad (4)$$

Wegen der Stetigkeit von Φ und Lemma 4.2.3 gibt es nun zu $\varepsilon > 0$ ein $0 < \delta^* < \delta$ mit

$$\|R(\Phi(t,z), \Phi(t,z+h))\| < \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq x$$

für alle $\|h\| < \delta^*$. Mit (3) haben wir somit

$$\begin{aligned} &\int_0^x \|R(\Phi(t,z), \Phi(t,z+h))\| \cdot \|(\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z))\| \mathrm{d}t \\ <&\varepsilon \int_0^x \|(\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z))\| \mathrm{d}t \\ \leq&\varepsilon\|h\| \int_0^x e^{Lt} \mathrm{d}t = \varepsilon\|h\| \frac{1}{L}\left(e^{Lx} - 1\right) \\ \leq&\varepsilon C\|h\| \end{aligned} \quad (5)$$

für eine von h unabhängige Konstante C. Aus (4) und (5) erhalten wir also für $\|h\| < \delta$ insgesamt

$$\|\Phi(x,z+h) - \Phi(x,z) - B(x,z)\cdot h\| \\ \leq \varepsilon C\|h\| + M \int_0^x \|\Phi(t,z+h) - \Phi(t,z) - B(t,z)\cdot h\| \mathrm{d}t,$$

also haben wir, wieder nach der Grönwall'schen Ungleichung Lemma 4.1.11 (vgl. auch Bemerkung 4.1.12)

$$\|\Phi(x,z+h) - \Phi(x,z) - B(x,z)\cdot h\| \leq \varepsilon C e^{Mx} \cdot \|h\| = \varepsilon C^* \|h\|$$

für eine von h unabhängig Konstante C^*.

Für $h \to 0$ folgt damit also die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 4.2.5. *Nach diesem doch recht aufwendigen Beweis für die einfache Differenzierbarkeit von Φ unter den gegebenen Voraussetzungen sei angemerkt, dass man im Wesentlichen mittels vollständiger Induktion zeigen kann, dass wenn in Satz 4.2.4 die Funktion G r-mal stetig differenzierbar ist, dies auch für die Funktion Φ gilt. Wir verzichten hier jedoch auf die Details.*

4.3 Der Begradigungssatz

Als Anwendung desd Abhängigkeitssatzes Satz 4.2.4 wollen wir noch Transformationen autonomer Differentialgleichungen untersuchen.

Definition 4.3.1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^m$ und $G : D \to \mathbb{R}^n$ bzw. $H : E \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbare Funktionen. Weiter sei $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Psi : U \to E$ eine beliebige Abbildung. Wir nennen Ψ **lösungserhaltend** von $y' = G(y)$ in $z' = H(z)$, falls für jede Lösung f der Differentialgleichung $y' = G(y)$ die Funktion $x \mapsto \Psi(f(x))$ für x in einem geeigneten Intervall eine Lösung von $z' = H(z)$ ist.

Für gutartige Abbildungen Ψ lässt sich mit dem folgenden Lemma leicht untersuchen, ob sie für ein gegebenes Paar autonomer Differentialgleichungen lösungserhaltend sind oder nicht.

Lemma 4.3.2. *Die Bezeichnungen seien wie in Definition 4.3.1, wobei wir zusätzlich annehmen, dass Ψ stetig differenzierbar sei. Dann ist Ψ genau dann lösungserhaltend von $y' = G(y)$ in $z' = H(z)$, wenn für alle $y \in U$ die Identität*

$$J(\Psi)(y)G(y) = H(\Psi(y))$$

gilt.

Beweis. Sei $y_0 \in U$ beliebig und $f(x)$ eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = G(y), \quad y(0) = y_0.$$

Ist $\Psi : U \to E$ lösungserhaltend, so gilt für geeignete x

$$H(\Psi(f(x))) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi(f(x)) = J(\Psi)(f(x))f'(x) = J(\Psi)(f(x))G(f(x)),$$

also insbesondere für $x = 0$

$$H(\Psi(y_0)) = J(\Psi)(y_0)G(y_0)$$

wie behauptet.

Gelte umgekehrt die behauptete Identität, so zeigt dieselbe Rechnung für eine Lösung f von $y' = G(y)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Psi(f(x)) = J(\Psi)(f(x))G(f(x)) = H(\Psi(f(x)),$$

also ist $\Psi(f(x))$ eine Lösung von $z' = H(z)$ und Ψ somit lösungserhaltend.

q.e.d.

Beispiel 4.3.3. Es sei eine Differentialgleichung $y' = G(y)$ auf einer Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ mit stetig differenzierbarem G gegeben. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\Psi : U \to D$ stetig differenzierbar, so dass $J(\Psi)(y)$ für alle $y \in U$ invertierbar ist. Ψ ist also eine Koordinatentransformation. Sei dann

$$G^* : U \to \mathbb{R}^n, y \mapsto J(\Psi)(y)^{-1}G(\Psi(y)).$$

Dann ist Ψ wegen Lemma 4.3.2 nach Konstruktion lösungserhaltend von $y' = G^*(y)$ in $y' = G(y)$.

Sei konkreter etwa

$$D = \{y = (y_1, y_2)^{tr} \in \mathbb{R}^2 \ : \ r_1 < \sqrt{y_1^2 + y_2^2} < r_2\}, \quad 0 < r_1 < r_2 < \infty$$

ein Kreisring und $G = (G_1(y_1, y_2), G_2(y_1, y_2))$ stetig differenzierbar. Dann können wir die Differentialgleichung

$$y' = G(y)$$

in Polarkoordinaten ausdrücken: Sei $U := \{(r, \varphi)^{tr} \in \mathbb{R}^2 \ : \ r_1 < r < r_2\}$ und

$$\Psi : U \to \mathbb{R}^2, \ \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Dann ist offenbar $\Psi(U) = D$ und es gilt

$$J(\Psi)(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Wegen $\det J(\Psi)(r, \varphi) = r \neq 0$ ist diese Matrix auf U invertierbar und wir erhalten die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} G^*(r, \varphi) &= J(\Psi)(r, \varphi)^{-1} \begin{pmatrix} G_1(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \\ G_2(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_1(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \\ G_2(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit einer solchen Transformation lassen sich manchmal Gleichungen vereinfachen (Übung).

Wir kommen nun zur angekündigten Anwendung des Satzes über die differenzierbare Abhängigkeit 4.2.4. Grob gesagt werden wir zeigen, dass autonome Gleichungen sich in der Nähe nicht-stationärer Punkte im Wesentlichen immer gleich verhalten.

Satz 4.3.4 (Begradigungssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $G : D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Weiter sei $y_0 \in D$ **kein** stationärer Punkt der Differentialgleichung $y' = G(y)$, also gelte $G(y_0) \neq 0$. Dann gibt es offene Umgebungen $U, V \subseteq D$ von y_0 und eine stetig differenzierbare, invertierbare Abbildung $\Psi : U \to V$, die Lösungserhaltend ist von*

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \textit{in} \quad y' = G(y).$$

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $y_0 = 0$ und $G(y_0) = (1, 0, ..., 0)^{tr}$ gilt, ansonsten führen wir eine geeignete Koordinatentransformation durch (Übung).

Wir definieren nun für $y = (y_1, y_2, ..., y_n)^{tr} \in D$ (vgl. Satz 4.2.1)

$$\Psi(y) = \Phi(y_1, (0, y_2, ..., y_n)^{tr}).$$

Nach Sätze 4.2.1 and 4.2.4 ist Ψ in einer Umgebung von 0 wohldefiniert und stetig differenzierbar. Bezeichnen wir die Komponenten von Ψ mit $\psi_1, ..., \psi_n$, so finden wir

$$J(\Psi)(y) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \partial_{y_1} \Psi = \partial_{y_1} \Phi(y_1, (0, y_2, ..., y_n)^{tr}) = G(\Phi(y_1, (0, y_2, ..., y_n)^{tr}) = G(\Psi(y)).$$

Nach Lemma 4.3.2 ist Ψ somit lösungserhaltend von

$$y' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad y' = G(y)$$

wie behauptet.

Wir zeigen nun noch, dass Ψ invertierbar ist. Es gilt

$$\partial_{y_1} \Psi(0) = G(\Psi(0)) = G(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

die erste Spalte von $J(\Psi)(0)$. Wegen

$$\Psi((0, y_2, ..., y_n)^{tr}) = \Phi(0, (0, y_2, ..., y_n)^{tr}) = (0, y_2, ..., y_n)^{tr}$$

folgt für $i, j \geq 2$ $\partial_{x_j}\psi_i(0) = \delta_{ij}$, das Kronecker-delta. Wir haben somit

$$J(\Psi)(0) = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist offenbar invertierbar, also folgt mit dem Satz über die Umkehrfunktion aus der Analysis-Vorlesung, dass Ψ in einer Umgebung von 0 invertierbar ist.

q.e.d.

Nach Satz 4.3.4 ist es nur von Interesse, das lokale Verhalten autonomer Gleichungen in der Nähe von stationären Punkten zu untersuchen. Dies wird der Inhalt des folgenden Kapitels sein.

Kapitel 5

Autonome Systeme

in diesem Kapitel untersuchen wir wiederum autonome Differentialgleichungssysteme

$$y' = G(y),$$

für eine stetige Funktion $G : D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, die zusätzlich einer lokalen Lipschitz-Bedingung genüge. Die (eindeutige) Lösung, die zusätzlich die Anfangsbedingung $y(0) = z \in \mathbb{R}^n$ erfüllt, bezeichnen wir wieder mit $\Phi(x, z)$ auf ihrem maximalen Existenzintervall $I_{max}(z)$.

Oftmals ist es nicht oder nur schwer möglich, eine exakte Lösung eines solchen Systems explizit anzugeben. Oftmals wird man daher das System durch ein lineares Differentialgleichungssystem annähern und von dort auf das (lokale) Verhalten von Lösungen des ursprünglichen Systems schließen, besonders in der Nähe stationärer Punkte (siehe Definition 1.4.3 (*iii*)).

Als Anwendung wollen wir uns zudem ein wichtiges Modell aus der Populationsdynamik genauer ansehen.

5.1 Linearisierung und Stabilität

5.1.1 Stabilität von Gleichgewichtspunkten

Definition 5.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $G : D \to \mathbb{R}^n$ stetig. Weiter sei $z_0 \in D$ ein Gleichgewichtspunkt der Differentialgleichung

$$y' = G(y)$$

und G sei in einer Umgebung von z_0 differenzierbar. Dann nennen wir das Differentialgleichungssystem

$$y' = J(G)(z_0)y,$$

wobei $J(G)(z_0)$ die Jacobi-Matrix von G im Punkt z_0 bezeichne, die **Linearisierung** des Systems $y' = G(y)$ in z_0.

Bemerkung 5.1.2. *Für das System $y' = G(y)$ wie in Definition 5.1.1 sei $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung des linearisierten Systems. Dann erfüllt die Funktion $\tilde{f}: \ x \mapsto z_0 + f_0(x)$ einerseits*

$$\tilde{f}'(x) = f_0'(x) = J(G)(z_0) \cdot f_0(x)$$

und andererseits in einer kompakten Umgebung von z_0 nach Lemma 4.2.3

$$\begin{aligned} G(\tilde{f}(x)) = G(z_0 + f_0(x)) &= G(z_0) + J(G)(z_0) \cdot f_0(x) + R(z_0 + f_0(x), f_0(x))f_0(x) \\ &= J(G)(z_0) \cdot f_0(x) + R(z_0 + f_0(x), f_0(x))f_0(x), \end{aligned}$$

wobei $R(z_0 + f_0(x), z_0)$ für $f_0(x) \to 0$ gegen 0 konvergiert. Ist die linearisierte Lösung also klein, so liefert $\tilde{f}$ eine Näherungslösung für die ursprüngliche Differentialgleichung.

Ist die Funktion G zweimal stetig differenzierbar, so kann man den „Linearisierungs-fehler"nach demselben Prinzip noch genauer quantifizieren.

Wählt man für ein autonome Gleichung als Anfangswert einen stationären Punkt, so ist die Lösung konstant. Man spricht auch von einer Gleichgewichtslösung. Es ist häufig von Interesse, ob solche Gleichgewichtslösungen stabil sind, ob also leichte Abweichungen vom Gleichgewicht trotzdem zu einer Lösung führen, die nahe am Gleichgewicht bleibt.

Definition 5.1.3. Sei z_0 ein stationärer Punkt einer Differentialgleichung

$$y' = G(y), \tag{1}$$

wobei $G : D \to \mathbb{R}^n$ stetig sei und einer lokalen Lipschitzbedingung genüge.

(i) Der stationäre Punkt z_0 heißt **stabil**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \delta$

$$\|\Phi(x, z) - z_0\| < \varepsilon$$

für alle $x \in I_{max}(z)$ gilt. Anderenfalls heißt z_0 **instabil**.

(ii) Der Punkt z_0 heißt **asymptotisch stabil**, falls z_0 stabil ist und ein $\rho > 0$ existiert, so dass für alle $z \in D$ mit $\|z - z_0\| < \rho$

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x, z) = z_0$$

gilt.

(iii) Ein stationärer Punkt z_0, der nicht asymptotisch stabil ist, heißt **neutral stabil**.

Bemerkung 5.1.4. *Ist z_0 ein stabiler stationärer Punkt von $y' = G(y)$, so liegt für $\|z - z_0\|$ hinreichend klein der Wert $\Phi(x, z)$ für alle $x \in I_{max}(z)$ in einer kompakten Menge, $\overline{B_\varepsilon(z_0)}$. Nach Satz 1.4.5 folgt somit $I_{max}(z) = \mathbb{R}$, $\Phi(x, z)$ ist also für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.*

Beispiel 5.1.5. Betrachten wir das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-y_2)y_1 \\ (1+y_1-y_2)y_2 \end{pmatrix} = G(y_1, y_2).$$

Die erste Komponente der rechten Seits wird genau dann 0, wenn $y_2 = 2$ oder $y_1 = 0$ gilt. Ist $y_2 = 2$, so erzwingt die zweite Komponente $y_1 = 1$. Ist $y_1 = 0$, so verschwindet die zweite Komponente für $y_2 \in \{0, 1\}$, wir haben also insgesamt drei Gleichgewichtspunkte, $(0,0)^{tr}$, $(0,1)^{tr}$, und $(1,2)^{tr}$.

Es gilt

$$J(G)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 2-y_2 & -y_1 \\ y_2 & 1+y_1-2y_2 \end{pmatrix},$$

also haben wir die folgenden Linearisierungen in den Gleichgewichtspunkten:

- in $(0,0)^{tr}$:
$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y,$$
- in $(0,1)^{tr}$:
$$y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y,$$
- in $(1,2)^{tr}$:
$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} y.$$

Die Stabilität von Gleichgewichtspunkten lässt sich oft sehr anschaulisch aus dem **Vektorfeld** der Differentialgleichung ablesen: Man berechnet in möglichst vielen Punkten (y_1, y_2) den Wert $v = G(y_1, y_2)$ und repräsentiert diesen Vektor (bzw. oft seine normalisierte Form $v/\|v\|$) durch einen Pfeil in die entsprechende Richtung. In unserem Beispiel sieht das zugehörige Vektorfeld wie folgt aus: Augenscheinlich streben die Lösungen in der Nähe von $(0,0)^{tr}$ von diesem Punkt weg, was nahelegt, dass dieser Gleichgewichtspunkt instabil ist. In der Nähe von $(1,2)^{tr}$ streben die Lösungen für $y_1 = 0$ auf den Gleichgewichtspunkt zu, ansonsten jedoch von ihm weg, was wiederum die Instabilität dieses Gleichgewichtspunktes nahelegt. Lösungen in der Nähe des Gleichgewichtspunktes $(1,2)$ streben alle augenscheinlich in einem Strudel auf diesen Punkt zu, dieser Gleichgewichtspunkt scheint also asymptotisch stabil zu sein.

Aus der Übung wissen wir, dass die Lösungen eines homogenen linearen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

asymptotisch stabil sind, also für $x \to \infty$ gegen den einzigen Gleichgewichtspunkt $y = 0$ konvergieren, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil haben, und instabil sind (also i.A. unbeschränkt sind), sobald ein Eigenwert λ von A mit positivem Realteil existiert oder mit Realteil 0 und geometrischer Vielfachheit (Dimension des Eigenraumes), die kleiner ist

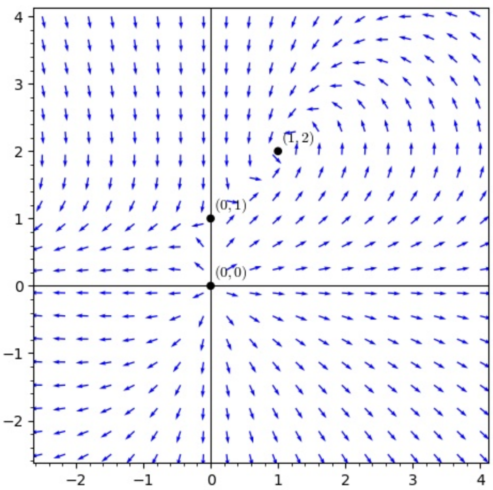

Abbildung 5.1: Das Vektorfeld zur Gleichung $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-y_2)y_1 \\ (1+y_1-y_2)y_2 \end{pmatrix}$

als die algebraische Vielfachheit (Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms χ_A). Untersuchen wir daraufhin die Linearisierungen unseres autonomen Systems in den Gleichgewichtspunkten.

- in $(0,0)^{tr}$: Die Koeffizientenmatrix ist eine Diagonalmatrix, wir können die Eigenwerte, 1 und 2, also sofort ablesen. Diese sind beide positiv, die Lösung der Linearisierung ist also für $x \to \infty$ unbeschränkt und somit instabil.
- in $(0,1)^{tr}$: Hier können wir wieder die Eigenwerte, 1 und -1, direkt ablesen. Da es einen positiven Eigenwert gibt, ist die Lösung der Linearisierung auch hier instabil. In Richtung des Eigenvektors zu -1, also $(0,1)^{tr}$, konvergiert die Lösung allerdings gegen 0, also auf die Gleichgewichtslösung zu.
- in $(1,2)^{tr}$: Die Koeffizientenmatrix der Linearisierung hat das charakteristische Polynom X^2+2X+2, also die Eigenwerte $-1 \pm i$. Diese haben beide negativen Realteil, die Lösung hier ist also stabil.

Im obigen Beispiel haben wir gesehen, dass das Stabilitätsverhalten von Gleichgewichtspunkten zumindest ähnlich zu sein scheint wie das Stabilitätsverhalten der Lösungen der zugehörigen Linearisierung. Dies ist in der Tat (mit leichten Einschränkungen) ein allgemeines Phänomen, wie wir bald sehen werden (vgl. Satz 5.1.9). Zuvor benötigen wir noch etwas algebraische Vorbereitung.

5.1.2 Eine reelle Version der Jordan-Normalform

Im Folgenden benötigen wir eine leichte Abwandlung der Jordan-Normalform einer reellen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Da A reelle Einträge besitzt, kommen Eigenwerte und (verallgemeinerte) Eigenvektoren stets in komplex konjugierten Paaren vor, sofern sie nicht reell sind. Für ein solches Paar $\mu, \overline{\mu}$, wobei wir $\mu = \alpha + \beta i$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schreiben, betrachten wir die jeweils zugehörigen Jordan-Blöcke in der Jordan-Normalform von A. Hat der betrachtete Jordanblock die Größe m, so korrespondiert hierzu ein Hauptvektor v_m vom Grad m, also $v_m \in \operatorname{Kern}((A - \mu I_n)^m) \setminus \operatorname{Kern}((A - \mu I_n)^{m-1})$ und eine Basis

$$B_\mu = \{v_1 = (A - \mu I_n)^{m-1} v_m, v_2 = (A - \mu I_n)^{m-2} v_m, ..., v_{m-1} = (A - \mu I_n) v_m, v_m\}$$

des zugehörigen Hauptraumes $H_\mu \leq \mathbb{C}^n$. Entsprechend haben wir eine Basis

$$B_{\overline{\mu}} = \{\overline{v_1} = (A - \overline{\mu} I_n)^{m-1} \overline{v_m}, \overline{v_2} = (A - \overline{\mu} I_n)^{m-2} \overline{v_m}, ..., \overline{v_{m-1}} = (A - \overline{\mu} I_n) \overline{v_m}, \overline{v_m}\}$$

für den Hauptraum $H_{\overline{\mu}}$ zum komplex konjugierten Eigenwert $\overline{\mu}$. Nach Konstruktion gilt dann für $k = 2, ..., m$

$$A v_k = v_{k-1} + \mu v_k \quad \text{und} \quad A\overline{v_k} = \overline{v_{k-1}} + \overline{\mu v_k} \quad \text{und} \quad A v_1 = \mu v_1. \tag{2}$$

Bezüglich dieser Basis B_μ ist die die Matrix der von A auf H_μ induzierten lineare Abbildung also genau der übliche Jordan-Block $J_m(\mu)$. Betrachten wir nun die Basis

$$\begin{aligned} B_{\mu,\overline{\mu}} = \Big\{ &\operatorname{Re}(v_1) = \frac{1}{2}(v_1 + \overline{v_1}), \operatorname{Im}(v_1) = \frac{1}{2i}(v_1 - \overline{v_1}), ..., \\ &\qquad \operatorname{Re}(v_m) = \frac{1}{2}(v_m + \overline{v_m}), \operatorname{Im}(v_m) = \frac{1}{2i}(v_m - \overline{v_m}) \Big\} \end{aligned} \tag{3}$$

der Summe $H_{\mu,\overline{\mu}} = H_\mu \oplus H_{\overline{\mu}}$ der beiden Haupträume $H_\mu, H_{\overline{\mu}}$. Wir erhalten dann für $k = 2, ..., m$ aus (2)

$$A \operatorname{Re}(v_k) = \frac{1}{2}\left(v_{k-1} + \mu v_k + \overline{v_{k-1}} + \overline{\mu v_k}\right) = \operatorname{Re}(v_{k-1}) + \alpha \operatorname{Re}(v_k) - \beta \operatorname{Im}(v_k)$$

und

$$A \operatorname{Im}(v_k) = \frac{1}{2i}\left(v_{k-1} + \mu v_k - \overline{v_{k-1}} - \overline{\mu v_k}\right) = \operatorname{Im}(v_{k-1}) + \beta \operatorname{Re}(v_k) + \alpha \operatorname{Im}(v_k),$$

sowie

$$A \operatorname{Re}(v_1) = \frac{1}{2}\left(\mu v_1 + \overline{\mu v_1}\right) = \alpha \operatorname{Re}(v_1) - \beta \operatorname{Im}(v_1)$$

und

$$A \operatorname{Im}(v_1) = \frac{1}{2i}\left(\mu v_1 - \overline{\mu v_1}\right) = \beta \operatorname{Re}(v_1) + \alpha \operatorname{Im}(v_1).$$

Die Abbildungsmatrix der von A auf dem Teilraum $H_{\mu,\overline{\mu}} = H_\mu \oplus H_{\overline{\mu}}$ induzierten linearen Abbildung bezüglich der Basis $B_{\mu,\overline{\mu}}$ ist daher eine Blockmatrix von der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & & \vdots \\ 0 & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & & 1 & 0 \\ & & & & & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & & & & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & & & & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun leicht folgendes zeigen.

Lemma 5.1.6. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$ beliebig. Die reellen Eigenwerte von A seien $\lambda_1, ..., \lambda_r$, die (echt) komplexen seien $\mu_1, \overline{\mu_1}, ..., \mu_s, \overline{\mu_s}$ mit Wiederholungen gemäß der geometrischen Vielfachheit der Eigenwerte, wobei wir $\mathrm{Im}(\mu_j) > 0$ annehmen. Wir setzen $\alpha_j = \mathrm{Re}(\mu_j)$ und $\beta_j = \mathrm{Im}(\mu_j)$. Dann existiert eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass*

$$T^{-1}AT = B := \mathrm{diag}(J^{(\varepsilon)}_{m_1}(\lambda_1), ..., J^{(\varepsilon)}_{m_r}(\lambda_r), K^{(\varepsilon)}_{n_1}(\mu_1), ..., K^{(\varepsilon)}_{n_s}(\mu_s))$$

gilt, wobei

$$J^{(\varepsilon)}_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \varepsilon & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & \varepsilon \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

und

$$K^{(\varepsilon)}_n(\mu) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \varepsilon & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \varepsilon & & & & & \vdots \\ 0 & & \alpha & \beta & \varepsilon & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\beta & \alpha & 0 & \varepsilon & & & \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & & \varepsilon & 0 \\ & & & & & & \ddots & 0 & \varepsilon \\ & & & & & & & \alpha & \beta \\ 0 & \dots & \dots & & & & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{Re}(\mu) = \alpha$, $\mathrm{Im}(\mu) = \beta$.

Beweis. Für $\varepsilon = 1$ folgt die Behauptung direkt aus den Vorüberlegungen, wenn man beachtet, dass für einen reellen Eigenwert λ der Hauptraum H_λ eine reelle Basis der Form B_λ wie in (2) besitzt.

Modifiziert man nun die Konstruktion aus der Vorüberlegung leicht, indem man statt der Vektoren v_k in der Basis B_{λ_i} (bzw. B_{μ_j}) aus (2) die Vektoren $\varepsilon^{k-1}v_k$ betrachtet, so erhält man aus den Spalten dieser modifizierten Basen, wobei man für die komplexen Eigenwerte μ_j analog die Basis $B_{\mu_j,\overline{\mu_j}}$ aus (3) konstruiert, eine reelle, invertierbare Matrix T, die das Gewünschte liefert.

q.e.d.

Beispiel 5.1.7. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 9 & 1 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & -4 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}.$$

Mit dem üblichen Verfahren zur Berechnung der Jordan-Normalform findet man etwa die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1-i & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1-i & 1+i & 1+i & 1-i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C}),$$

für die gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ & & 2+i & 1 & & \\ & & 0 & 2+i & & \\ & & & & 2-i & 1 \\ 0 & & & & 0 & 2-i \end{pmatrix},$$

die also A in die übliche Jordan-Normalform transformiert.

Sei nun $\varepsilon = 2$. Multiplizieren wir dann jeweils die 2., 4. und 6. Spalte von S mit 2, erhalten wir die Matrix

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2-2i & 1 & 2+2i \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 1-i & 2+2i & 1+i & 2-2i \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{C})$$

und damit die modifizierte (komplexe) Jordan-Normalform mit 2 auf der Nebendiagonalen,

$$S_2^{-1}AS_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ & & 2+i & 2 & & \\ & & 0 & 2+i & & \\ & & & & 2-i & 2 \\ 0 & & & & 0 & 2-i \end{pmatrix}.$$

Wie in den Vorüberlegungen zu Lemma 5.1.6 beschrieben ersetzen wir nun in der modifizierten Matrix die 3. Spalte durch ihren Realteil, die 4. durch den Imaginärteil der 3., sowie die 5. durch den Realteil der ursprünglichen 4., und die 6. durch deren Imaginärteil und erhalten so die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{R}).$$

Diese Matrix erfüllt dann wie gewünscht

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 2 & & & & 0 \\ 0 & -1 & & & & \\ & & 2 & 1 & 2 & 0 \\ & & -1 & 2 & 0 & 2 \\ & & & & 2 & 1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun noch ein zu der Basis aus Lemma 5.1.6 gehöriges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

Lemma 5.1.8. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit (komplexen) Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (mit Wiederholungen gemäß ihrer algebraischen Vielfachheit). Weiter nehme $\mathrm{Re}(\lambda_j)$ genau m verschiedene Werte $\alpha_1, ..., \alpha_m$ an, so dass gilt*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \mathrm{Re}(\lambda_1) = ... = \mathrm{Re}(\lambda_{j_1}) > \\ \alpha_2 &= \mathrm{Re}(\lambda_{j_1+1}) = ... = \mathrm{Re}(\lambda_{j_2}) > \\ &\cdots \\ \alpha_m &= \mathrm{Re}(\lambda_{j_{m-1}+1}) = ... = \mathrm{Re}(\lambda_n). \end{aligned}$$

Sei für $k = 1, ..., m$, in der Notation von (2),

$$V_k := \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda_j)=\alpha_k} H_{\lambda_j}$$

die Summe der entsprechenden Haupträume und sei $\pi_k : \mathbb{R}^n \to V_k$ die zugehörige Projektion auf den Teilraum V_k. Weiter sei $\varepsilon > 0$, so wie $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wie in Lemma 5.1.6.
Dann gilt:

(*i*) *Die Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle v, w\rangle := v^{tr}(TT^{tr})^{-1}w$$

definiert ein positiv definites Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.

(*ii*) *Für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\langle v, w\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle \pi_k(v), \pi_k(w)\rangle.$$

(*iii*) *Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{m} (\alpha_k - \varepsilon)\langle \pi_k(v), \pi_k(v)\rangle \le \langle v, Av\rangle \le \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + \varepsilon)\langle \pi_k(v), \pi_k(v)\rangle.$$

Beweis.

(*i*) Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist offenbar bilinear und symmetrisch. Weiter gilt für $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle v, v\rangle = v^{tr}(TT^{tr})^{-1}v = (T^{-1}v)^{tr}(T^{-1}v) = \|T^{-1}v\|^2,$$

wenn $\|\cdot\|$ die üblich Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Damit verschwindet $\langle v, v\rangle$ genau dann, wenn $T^{-1}v = 0$ gilt, also, da T^{-1} invertierbar ist, genau dann, wenn $v = 0$ gilt.

(ii) Für $v \in \mathbb{R}^n$ haben wir $v = \sum_{k=1}^m \pi_k(v)$, also gilt

$$\langle v, w\rangle = \sum_{k,\ell=1}^m \langle \pi_k(v), \pi_\ell(w)\rangle.$$

Es reicht also zu zeigen, dass für $k \neq \ell$ und $\langle \pi_k(v), \pi_\ell(w)\rangle = 0$ gilt. Es gilt wieder

$$\langle \pi_k(v), \pi_\ell(w)\rangle = (T^{-1}\pi_k v)^{tr}(T^{-1}\pi_\ell w).$$

Nach Konstruktion von T bilden nun die Spalten von T (ggf. nach Umsortierung) eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die die Zerlegung $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus ... \oplus V_k$ respektiert, d.h. die ersten $\dim V_1$ Spalten von T bilden eine Basis von V_1, die nächsten $\dim V_2$ Spalten bilden eine Basis von V_2 und so fort. Die bedeutet aber, dass die Vektoren $T^{-1}\pi_k(v)$ und $T^{-1}\pi_\ell(w)$ bezüglich des Standardskalarproduktes orthogonal zueinander sind, also folgt die Behauptung.

(iii) Es gilt

$$\langle v, Av\rangle = (T^{-1}v)^{tr}(BT^{-1}v).$$

Verwendet man nun die Zerlegung $v = \sum_{k=1}^m \pi_k(v)$ zusammen mit der Beobachtung, dass wegen der Blockstruktur von B $BT^{-1}\pi_k(v)$ wieder orthogonal auf allen Räumen $T^{-1}V_\ell$, $\ell \neq k$, steht, ergibt sich wie in (ii) die Beziehung

$$\begin{aligned}\langle v, Av\rangle = \sum_{k=1}^m (T^{-1}\pi_k(v))^{tr}(BT^{-1}\pi_k(v)) &= \sum_{k=1}^m (T^{-1}\pi_k(v))^{tr}(T^{-1}TBT^{-1}\pi_k(v)) \\ &= \sum_{k=1}^m \langle \pi_k(v), A\pi_k(v)\rangle.\end{aligned}$$

Es reicht also, die Behauptung auf den einzelnen Blöcken von B zu zeigen. Definieren wir nun den Shiftoperator

$$\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_d \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt bezüglich des Standardskalarprodukts bzw. der üblichen Euklidischen Norm nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\|\sigma(y)\| \leq \|y\| \quad \text{und} \quad |y^{tr}(\sigma(y))| \leq \|y\| \cdot \|\sigma(y)\| \leq \|y\|^2. \tag{4}$$

Für $v \in H_\lambda$ für einen reellen Eigenwert λ von A (man beachte $H_\lambda \leq V_k$ für ein k), gilt dann mit $w = T^{-1}v$

$$w^{tr} J_m^{(\varepsilon)}(\lambda) w = w^{tr}(\lambda w + \varepsilon\sigma(w)) = \lambda\|w\|^2 + \varepsilon(w^{tr}\sigma(w)).$$

Mit (4) folgt somit

$$(\lambda - \varepsilon)\|w\|^2 \leq w^{tr} J_m^{(\varepsilon)}(\lambda) w \leq (\lambda + \varepsilon)\|w\|^2.$$

Mit einer analogen Rechnung findet man dasselbe Resultat auch für komplexe Eigenwerte.

Insgesamt folgt somit

$$(\alpha_k - \varepsilon)\|T^{-1}\pi_k(v)\|^2 \leq (T^{-1}\pi_k(v))^{tr}(BT^{-1}\pi_k(v)) \leq (\alpha_k + \varepsilon)\|T^{-1}\pi_k(v)\|^2$$

und damit die Behauptung.

q.e.d.

5.1.3 Der Stabilitätssatz

Wir haben nun alle Vorbereitungen erledigt um den Stabilitätssatz zu formulieren und zu beweisen.

Satz 5.1.9 (Stabilitätssatz). *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar. Weiter sei z_0 ein stationärer Punkt der autonomen Differentialgleichung*

$$y' = G(y)$$

und wir setzen $A := J(G)(z_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(*i*) *Gilt* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *für jeden Eigenwert λ von A, so ist der Punkt z_0 asymptotisch stabil.*

(*ii*) *Gibt es mindestens einen Eigenwert λ von A mit* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, *so ist z_0 instabil.*

Beweis.

(*i*) Gilt $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte λ von A, so setzen wir

$$\varepsilon := -\frac{1}{2}\max\{\mathrm{Re}(\lambda) \,:\, \lambda \text{ Eigenwert von } A\}.$$

Weiter bezeichne zu diesem ε $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Skalarprodukt aus Lemma 5.1.8.

Im Folgenden verwenden wir die Notation $f = \mathcal{O}(h)$ für reellwertige Funktionen, wenn $|f| \leq C \cdot |h|$ für eine konstante $C > 0$ (und hinreichend große x) gilt.

Sei nun $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Lösung von $y' = G(y)$ und setze $g(x) = f(x) - z_0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\langle g(x), g(x)\rangle &= 2\langle g(x), f'(x)\rangle = 2\langle g(x), G(g(x)+z_0)\rangle \\ &= 2\langle g(x), Ag(x) + \mathcal{O}(\|g(x)\|^3) \\ &\leq 2\sum_{k=1}^{m} -\varepsilon\langle \pi_k(g(x)), \pi_k(g(x))\rangle + \mathcal{O}(\|g(x)\|^3) \\ &\leq -\varepsilon\langle g(x), g(x)\rangle,\end{aligned}$$

für $\|g(x)\|$ hinreichend klein. Hierbei haben wir in der zweiten Zeile Lemma 4.2.3 für die Ableitung von G verwendet, in der dritten die Abschätzung aus Lemma 5.1.8, und zum Schluss die Cauchy-Schwarz-Ungleichung.

Aus Korollar 1.4.10 bzw. Satz 4.1.7 ergibt sich hiermit direkt

$$\langle g(x), g(x)\rangle \leq e^{-\varepsilon x}\langle g(0), g(0)\rangle.$$

Da auf $\mathbb{R}^n$ bekanntlich alle Normen äquivalent sind, ergibt sich somit für die übliche Euklidische Norm

$$\|f(x) - z_0\| = \|g(x)\| \leq Ce^{-\varepsilon x/2} \to 0, \quad x \to \infty.$$

Damit folgt die behauptete asymptotische Stabilität von z_0.

(ii) Die Eigenwerte von A seien $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ und wie in Lemma 5.1.8 setzen wir

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \mathrm{Re}(\lambda_1) = ... = \mathrm{Re}(\lambda_{j_1}) > \\ \alpha_2 &= \mathrm{Re}(\lambda_{j_1+1}) = ... = \mathrm{Re}(\lambda_{j_2}) > \\ &\dots \\ \alpha_m &= \mathrm{Re}(\lambda_{j_{m-1}+1}) = ... = \mathrm{Re}(\lambda_n)\end{aligned}$$

und

$$V_k := \bigoplus_{\mathrm{Re}(\lambda_j)=\alpha_k} H_{\lambda_j}$$

mit den zugehörigen Projektionen $\pi_k : \mathbb{R}^n \to V_k$.

Nach Voraussetzung gilt dann $\alpha_1 > 0$. Setzen wir nun

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_2), \frac{1}{4}\alpha_1\right\}$$

und es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das entsprechende Skalarprodukt aus Lemma 5.1.8. Sei nun

$$C = \{z_0 + y \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle y - \pi_1(y), y - \pi_1(y)\rangle \leq \langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle\}$$

ein Doppelkegel mit Spitze in z_0. Für $z_0+y \in C$ gilt dann, da nach Lemma 5.1.8 die Räume V_j bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ paarweise orthogonal sind, also auch $(y-\pi_1(y)) \perp \pi_1(y)$,

$$\langle y, y\rangle = \langle y-\pi_1(y), y-\pi_1(y)\rangle + \langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle \leq 2\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle. \tag{5}$$

Sei nun $\|y\|$ hinreichend klein, so dass $z_0+y \in C$ gilt und $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wie in Lemma 5.1.6. Dann ergibt sich mit Lemma 4.2.3 und Lemma 5.1.8 die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\langle G(z_0+y), \pi_1(y)\rangle - \langle G(z_0+y), y-\pi_1(y)\rangle \\
=&\langle Ay, \pi_1(y)\rangle - \langle Ay, y-\pi_1(y)\rangle + \mathcal{O}(\|y\|^3) \\
=&(BT^{-1}y)^{tr}(T^{-1}\pi_1(y)) - (BT^{-1}y)^{tr}(T^{-1}(y-\pi_1(y))) + \mathcal{O}(\|y\|^3) \\
\geq&(\alpha_1-\varepsilon)\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle - (\alpha_2+\varepsilon)\langle y-\pi_1(y), y-\pi_1(y)\rangle + \mathcal{O}(\|y\|^3) \\
\geq&\varepsilon\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle + \mathcal{O}(\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle^{3/2}) \gneqq 0.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir zusätzlich (5) und die nach Wahl von ε geltende Abschätzung $(\alpha_1-\varepsilon)-(\alpha_2+\varepsilon) > \varepsilon$ verwendet.

Man erhält auf ähnliche Weise unter denselben Voraussetzungen

$$\begin{aligned}
\langle G(z_0+y), \pi_1(y)\rangle &\geq (\alpha_1-\varepsilon)\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle + \mathcal{O}(\|y\|^3) \\
&\geq 2\varepsilon\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle + \mathcal{O}(\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle^{3/2}) > \varepsilon\langle \pi_1(y), \pi_1(y)\rangle.
\end{aligned}$$

Sei nun $\delta > 0$ hinreichend klein und $v \in V_1$ beliebig. Für die Lösung $\Phi(x, z_0+\delta v)$ des Anfangswertproblems

$$y' = G(y), \quad y(0) = z_0 + \delta v$$

folgt also, da wir für hinreichend kleines x $\Phi'(x, z_0+\delta v) = G(\Phi(x, z_0+\delta v)) = G(z_0+y)$ für geignetes kleines $y \in C$ schreiben können, $\Phi(x, z_0+\delta v) \in C \cap B_r(z_0)$ für hinreichend kleines $r > 0$ und so

$$\|\Phi(x, z_0+\delta v) - z_0\| \geq ce^{\frac{1}{2}\varepsilon t}\|\Phi(0, z_0+\delta v) - z_0\|,$$

wegen Lemma 4.1.4 und Korollar 1.4.10, also haben wir wie behauptet Instabilität.

q.e.d.

Bemerkung 5.1.10. *Man beachte, dass Satz 5.1.9 keine Aussage für den Fall macht, wenn*

$$\max\{\mathrm{Re}(\lambda) \,:\, \lambda \text{ Eigenwert von } A\} = 0$$

gilt. Tatsächlich ist es in diesem Fall im Allgemeinen nicht möglich, allein aufgrund der Linearisierung zu entscheiden, ob ein stationärer Punkt stabil ist oder nicht.

Beispiel 5.1.11. Wir untersuchen das Differentialgleichungssystem

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 \cdot (2 - y_1 - y_2) \\ y_2 \cdot (1 - y_1 y_2) \end{pmatrix} = G(y).$$

Für einen stationären Punkt $z_0 = (z_1, z_2)^{tr}$ muss somit gelten:

$$z_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 2 - z_1 - z_2 = 0$$

und

$$z_2 = 0 \quad \text{oder} \quad 1 - z_1 z_2 = 0.$$

Ist $z_1 = 0$, so ist $1 - z_1 z_2 = 0$ niemals erfüllt, wir erhalten so also nur den stationären Punkt $(0, 0)^{tr}$. Wir können im Folgenden also $z_1 \neq 0$ annehmen. Gilt $2 - z_1 - z_2 = 0$ und $z_2 = 0$, ergibt sich $z_1 = 2$, also ist $(2, 0)^{tr}$ ein weiterer stationärer Punkt. Gilt $2 - z_1 - z_2 = 0$ und $1 - z_1 z_2 = 0$, also $z_2 = 1/z_1$, so erfüllt z_1 die Gleichung $2 - z_1 - 1/z_1 = 0$, also folgt $z_1 = 1$ und somit auch $z_2 = 1$. Wir erhalten als dritten und letzten stationären Punkt also den Punkt $(1, 1)$.

Wir berechnen direkt

$$J(G)(y) = \begin{pmatrix} 2 - 2y_1 - y_2 & -y_1 \\ -y_2^2 & 1 - 2y_1 y_2 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten also folgende Linearisierungen:

- In $(0, 0)^{tr}$: Hier erhalten wir

  $$A = J(G)(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Die Eigenwerte von A sind sofort abzulesen und beide positiv, also sagt uns Satz 5.1.9, dass dieser stationäre Punkt instabil ist (vgl. auch Abbildung 5.2)

- In $(2, 0)^{tr}$: Wir haben

  $$A = J(G)(2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Da A eine Dreiecksmatrix ist, können wir wieder die Eigenwerte sofort ablesen und wir sehen, dass es einen positiven Eigenwert gibt, auch dieser stationäre Punkt instabil ist.

- In $(1, 1)$: Die Linearisierung ist hier gegeben durch

  $$A = J(G)(1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Man sieht ohne große Schwierigkeiten, dass die Eigenwerte von A gegeben sind durch 0 und -2. In diesem Fall macht Satz 5.1.9 keine Aussage über das Stabilitätsverhalten dieses Punktes. Das Vektorfeld in Abbildung 5.3 legt allerdings nahe, dass dieser stationäre Punkt ebenfalls instabil ist.

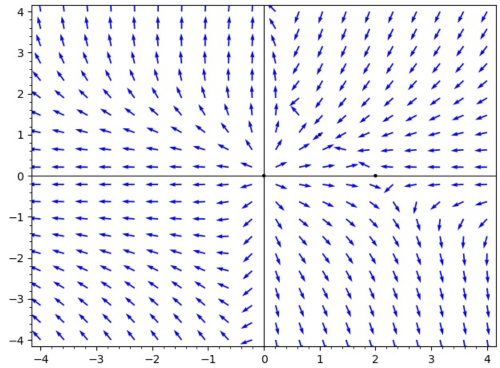

Abbildung 5.2: Vektorfeld zu $y' = G(y)$

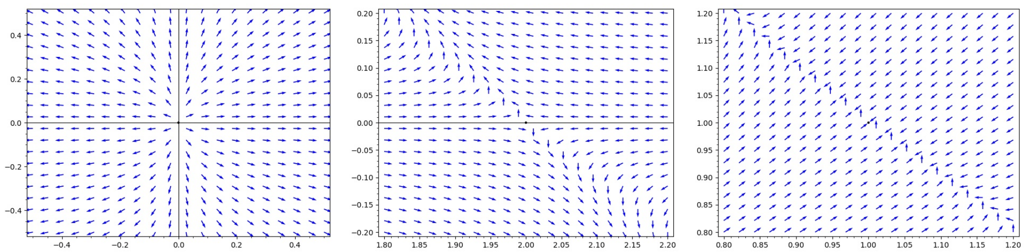

Abbildung 5.3: Vektorfeld zu $y' = G(y)$ in der Nähe der Gleichgewichtspunkte $(0,0)^{tr}, (2,0)^{tr}, (1,1)^{tr}$.

Das folgende Beispiel soll zeigen, dass die Linearisierung einer autonomen Differentialgleichung prinzipiell nicht in der Lage sein kann, eine allgemeine Aussage über die Stabilität von Gleichgewichtspunkten im Fall $\max\{\mathrm{Re}(\lambda) : \lambda \text{ Eigenwert von } A\} = 0$ zu treffen.

Beispiel 5.1.12. (*i*) Wir betrachten die Gleichung eines mathematischen Pendels (vgl. Beispiel 1.2.7) für den Fall $g = \ell$,

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0.$$

Diese ist nach dem Reduktionssatz äquivalent zu dem autonomen Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) \end{pmatrix} = G(y).$$

Offenbar sind $(0,0)^{tr}$ und $(\pi,0)^{tr}$ stationäre Punkte der Gleichung. Stellt man sich den Faden als masselosen starren Stab vor, korrespondiert der erste dieser Punkte offenbar zur Ruhelage des Pendels (es hängt senkrecht herunter), der zweite beschreibt die Situation, in der das Pendel senkrecht über dem Aufhängungspunkt steht. Aus der Anschauung ist einleuchtend, dass der erste stationäre Punkt stabil, der zweite jedoch instabil ist.

Die zugehörigen Linearisierungen sind

$$A = J(G)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad A = J(G)(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im zweite Fall haben wir offenbar die Eigenwerte ± 1, also sagt uns hier der Stabilitätssatz 5.1.9, dass dieser Gleichgewichtspunkt in der Tat instabil ist.

Im ersten Fall macht der Stabilitätssatz jedoch keine Aussage, man kann jedoch strikt beweisen, dass dieser Gleichgewichtspunkt wie erwartet stabil (aber nicht asymptotisch stabil) ist.

Betrachten wir nun das modifizierte System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1^2 y_2 - \sin(y_1) \end{pmatrix} = H(y).$$

Wie man leicht nachrechnet, hat dieses System in $(0,0)^{tr}$ dieselbe Linearisierung wie das Pendelsystem, aber hier ist –wie man zeigen kann– der stationäre Punkt, anders als zuvor, asymptotisch stabil.

(*ii*) Für die Differentialgleichung

$$y' = \alpha y + \beta y^3$$

erhält man die Linearisierung $y' = \alpha y$ im stationären Punkt $y = 0$. Aus dem Stabilitätssatz 5.1.9 erhalten wir, dass dieser stationäre Punkt für $\alpha < 0$ asymptotisch stabil und für $\alpha > 0$ instabil ist. Für $\alpha = 0$ macht Satz 5.1.9 keine Aussage und es gilt, dass der stationäre Punkt für $\beta < 0$ asymptotisch stabil, für $\beta > 0$ aber instabil ist (Übung), obwohl die Linearisierung in beiden Fällen identisch ist.

5.1.4 Lyapunov-Funktionen

Es gibt robustere Kriterien zur Untersuchung der Stabilität stationärer Punkte. Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch ein robusteres Kriterium kennenlernen, das oft angewandt werden kann, wenn die Linearisierung nicht ausreicht. Dazu benötigen wir zunächst einen neuen Begriff.

Definition 5.1.13. Sei z_0 ein stationärer Punkt der Differentialgleichung $y' = G(y)$ für eine stetige Funktion $G : D \to \mathbb{R}^n$ $(D \subseteq \mathbb{R}^n)$, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genüge. und sei $U \subseteq D$ eine Umgebung von z_0. Eine differenzierbare Funktion $\mathscr{L} : U \to \mathbb{R}$ heißt eine **Lyapunov-Funktion** für G im stationären Punkt z_0, falls gilt:

1. $\mathscr{L}(z_0) = 0$
2. $\mathscr{L}(y) > 0$ für alle $y \in U \setminus \{z_0\}$
3. $\dot{\mathscr{L}}(y) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} [\mathscr{L}(y + hG(y)) - \mathscr{L}(y)] \leq 0$ für alle $y \in U$.

Bemerkung 5.1.14. (*i*) *Den Ausdruck* $\dot{\mathscr{L}}$ *in Definition 5.1.13 nennt man auch die Ableitung von* $\mathscr{L}$ *entlang des Vektorfeldes* G.

(*ii*) *Aus der üblichen mehrdimensionalen Kettenregel folgt, dass*

$$\dot{\mathscr{L}} = J(\mathscr{L})(y) \cdot G(y)$$

gilt.

Der folgende Satz zeigt, dass man Lyapunov-Funktionen verwenden kann, um die Stabilität von stationären Punkten zu untersuchen.

Satz 5.1.15. *Sei* z_0 *ein stationärer Punkt der Differentialgleichung* $y' = G(y)$, *wobei wieder* $G : D \to \mathbb{R}^n$ *auf* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *lokal Lipschitz-stetig sei. Weiter sei* $U \subseteq D$ *eine Umgebung von* z_0 *und* $\mathscr{L} : U \to \mathbb{R}$ *eine Lyapunov-Funktion für die Differentialgleichung* $y' = G(y)$. *Dann gilt Folgendes.*

(*i*) *Der stationäre Punkt* z_0 *ist stabil.*

(*ii*) *Gilt zusätzlich* $\dot{\mathscr{L}}(y) \lneqq 0$ *für alle* $y \in U \setminus \{z_0\}$, *so ist* z_0 *asymptotisch stabil.*

Beweis. Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen: Sei $z \in U$ und $\Phi(x, z)$ die Lösung des Anfangswertproblems $y' = G(y),\ y(0) = z$. Wir setzen $I = I_{max}(z) \cap [0, \infty) = [0, b)$ als das (nicht-negative) maximale Existenzintervall der Lösung. Für $x \in I$ mit $\Phi(x,z) \in U$ gilt dann nach Eigenschaft (iii) aus Definition 5.1.13

$$\begin{aligned}\partial_x \mathscr{L}(\Phi(x,z)) = J(\mathscr{L})(\Phi(x,z)) \cdot \Phi'(x,z) = J(\mathscr{L})(\Phi(x,z)) \cdot G(\Phi(x,z))\\ = \overset{\bullet}{\mathscr{L}}(\Phi(x,z)) \leq 0.\end{aligned}$$

Es folgt also für alle solchen x

$$\mathscr{L}(\Phi(x,z)) - \mathscr{L}(\underbrace{\Phi(0,z)}_{=z}) = \int_0^x \partial_t \mathscr{L}(\Phi(t,z)) \mathrm{d}t \leq 0. \tag{6}$$

Außerdem folgt nach Satz 1.4.5 und Satz 2.1.21, dass entweder $I = [0,\infty)$ gelten muss oder eine der beiden Bedingungen

$$\lim_{x \to b} \Phi(x,z) \in \partial D \quad \text{oder} \quad \|\Phi(x,z)\| \to \infty, \quad x \to b$$

erfüllt sein muss.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $\|z - z_0\| < \delta$ folgt, dass $\|\Phi(x,z) - z_0\| < \varepsilon$ für alle $x > 0$ gilt (vgl. Definition 5.1.3). Sei dazu $K \subset U$ kompakt mit $z_0 \in K^\circ$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass ε hinreichend klein ist, so dass die offene Kugel $B_\varepsilon(z_0)$ vom Radius ε um z_0 in K enthalten ist. Definieren wir nun

$$m = \inf\{\mathscr{L}(y) \;:\; y \in K \setminus B_\varepsilon(z_0)\}.$$

Da $K \setminus B_\varepsilon(z_0)$ kompakt ist und $\mathscr{L}(y) > 0$ für $U \setminus \{z_0\}$ gilt, folgt auch $m > 0$. Da $\mathscr{L}$ stetig ist und $\mathscr{L}(z_0) = 0$ gilt, gibt es nun ein $\delta > 0$, so dass $\mathscr{L}(y) < m$ für alle $y \in B_\delta(z_0)$. Wählen wir nun für ein solches δ $z \in B_\delta(z_0)$, so folgt mit (6)

$$0 \leq \mathscr{L}(\Phi(x,z)) \leq \mathscr{L}(\Phi(0,z)) < m.$$

Nach Wahl von m folgt damit aber $\Phi(x,z) \in B_\varepsilon(z_0)$ für $x \in I$, also nach Satz 1.4.5 insbesondere auch $I = [0,\infty)$.

(ii) Aus dem Beweis von Teil (i) wissen wir schon, dass z_0 ein stabiler stationärer Punkt ist und dass $x \mapsto \mathscr{L}(\Phi(x,z))$ monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist. Es existiert also, für $\|z - z_0\|$ hinreichend klein der Grenzwert

$$\lim_{x \to \infty} \mathscr{L}(\Phi(x,z)) =: \alpha \geq 0.$$

Wäre $\alpha > 0$, so folgt $\mathscr{L}(\Phi(x,z)) \geq \alpha$ für alle $x > 0$. Weil $\mathscr{L}$ stetig ist, existiert aber ein $\delta > 0$, so dass für $\|y - z_0\| < \delta$ $\mathscr{L}(y) < \alpha$ gilt. Daher muss in diesem Fall $\|\Phi(x,z) - z_0\| \geq \delta$ für alle $x \geq 0$ gelten.

Sei nun K wie in Teil (i) und ohne Einschränkung $\delta > 0$ hinreichend klein, so dass $B_\delta(z_0) \subset K$ gilt. Wegen der Stetigkeit von $\mathscr{L}$ und G ist auch $\overset{\bullet}{\mathscr{L}}$ stetig und es folgt wegen der Kompaktheit von $K \setminus B_\delta(z_0)$, dass

$$M = \sup \left\{ \overset{\bullet}{\mathscr{L}}(y) \; : \; y \in K \setminus B_\delta(z_0) \right\} < 0$$

gilt. Damit folgt aber auch

$$\mathscr{L}(\Phi(x,z)) - \mathscr{L}(\Phi(0,z)) = \int_0^x \partial_t \mathscr{L}(\Phi(t,z)) \mathrm{d}t \leq Mx \to -\infty, \quad x \to \infty.$$

Dies ist jedoch ein Widerspruch zur schon gezeigten Stabilität des stationären Punktes, also muss die Annahme, dass $\alpha > 0$ gilt, falsch gewesen sein. Es folgt also $\alpha = 0$ und somit die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 5.1.16. *Aus dem Beweis von Satz 5.1.15 erhalten wir (mit etwas zusätzlicher Arbeit, vgl. etwa den entsprechenden Abschnitt im Buch von Walter) noch folgende hilfreiche Aussage: In der Situation von Satz 5.1.15 (ii) sei für $c > 0$*

$$U_c := \{ y \in U \; : \; \mathscr{L}(y) < c \}.$$

Ist nun c so, dass $\overline{U_c} \subset U$ gilt und $\overline{U_c}$ kompakt ist, so folgt für alle $z \in U_c$, dass

$$\lim_{x \to \infty} \Phi(x,z) = z_0$$

gilt.

Mit Hilfe einer Lyapunov-Funktion lässt sich also auch ein Gebiet bestimmen, in dem die Lösungen zum stationären Punkt konvergieren. Der Stabilitätssatz 5.1.9 macht hierzu keine Aussage.

Beispiel 5.1.17. Wie man ohne Schwierigkeiten nachrechnet, ist der Punkt $(0,0)^{tr}$ der einzige stationäre Punkt der autonomen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1^3 + y_1 y_2^2 \\ -y_2^3 - y_1^2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Die Linearisierung in diesem Punkt liefert die Nullmatrix, d.h. der Stabilitätssatz 5.1.9 liefert keine Aussage über die Stabilität oder Instabilität dieses Punktes.

Wir betrachten die Funktion $\mathscr{L}$ definiert durch

$$\mathscr{L}(y_1, y_2) = \|(y_1, y_2)^{tr} - (0,0)^{tr}\|^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Offenbar gilt $\mathscr{L}(0,0)=0$ und $\mathscr{L}(y_1,y_2)>0$ für $(y_1,y_2)\neq(0,0)$. Es gilt nun

$$\overset{\bullet}{\mathscr{L}}(y_1,y_2)=(2y_1,2y_2)\cdot\begin{pmatrix}-y_1^3+y_1y_2^2\\-y_2^3-y_1^2y_2\end{pmatrix}=-2y_1^4+2y_1^2y_2^2-2y_2^4-2y_1^2y_2^2=-2y_1^4-2y_2^4,$$

also $\overset{\bullet}{\mathscr{L}}(y_1,y_2)<0$ für alle $(y_1,y_2)\neq(0,0)$.

Die Funktion $\mathscr{L}$ ist also eine Lyapunov-Funktion für die Differentialgleichung und der stationäre Punkt ist somit nach Satz 5.1.15 asymptotisch stabil.

Nach Bemerkung 5.1.16 folgt sogar, dass der Punkt **global** asymptotisch stabil ist, d.h. *jede* Lösung der Differentialgleichung konvergiert gegen $(0,0)^{tr}$.

Bemerkung 5.1.18. *Es gibt kein allgemeines Verfahren, eine Lyapunov-Funktion zu konstruieren. Ein möglicher Kandidat, der in Anwendungen häufig (aber nicht immer!) funktioniert, ist, wie in Beispiel 5.1.17,*

$$\mathscr{L}(y)=\|y-z_0\|^2,$$

weshalb diese Funktion auch gelegentlich als die ***Standard-Lyapunov-Funktion*** *bezeichnet wird.*

5.2 Anwendungen in der Populationsdynamik

Eine wichtige Anwendung von autonomen Differentialgleichungssystemen liegt in der Populationsdynamik. Gibt es zwei Populationen, die sich gegenseitig beeinflussen (z.B. eine Population von Raubtieren und eine von Beutetieren), so modelliert man dies häufig durch quadratische autonome Gleichungen.

5.2.1 Das Räuber-Beute-Modell nach Lotka-Volterra

In diesem Modell bezeichne $x(t)$ die Größe einer Population von Raubtieren zum Zeitpunkt t und $y(t)$ die Größe einer Population von Beutetieren. Für das Modell trifft man nun folgende (durchaus realistische) Annahmen: Gibt es keine Beutetiere, so sterben die Raubtiere mit einer konstanten Rate α aus. Gibt es Beutetiere, so wirkt sich dies durch eine Zuwachsrate von βy ($\beta>0$) aus, sprich je mehr Beutetiere es gibt, desto schneller wächst die Räuberpopulation. Dies führt auf die Differentialgleichung

$$\dot{x}=(-\alpha+\beta y)x.$$

Betrachten wir nun die Beutetiere. Diese mögen eine natürliche konstante Zuwachsrate $\gamma>0$ haben. Außerdem ist es sinnvoll anzunehmen, dass die Beutepopulation abnimmt mit einer Rate proportional zur Größe der Räuberpopulation, sagen wir δx mit $\delta>0$. Dies Liefert insgesamt das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}&=(-\alpha+\beta y)x\\\dot{y}&=(\gamma-\delta x)y.\end{aligned}\tag{1}$$

Dieses Differentialgleichungssystem nennt man das **Lotka-Volterra-Modell** (im Englischen **predator-prey model**).

Bemerkung 5.2.1. *Da die rechte Seite von* (1) *als Funktion von x und y differenzierbar ist, ist sie insbesondere lokal Lipschitz-stetig (siehe Lemma 2.1.12). Nach dem Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 existiert also zu jedem Anfangswert $z = (x(0), y(0))$ eine eindeutige Lösung, die wir wie üblich mit $\Phi(t, z)$ bezeichnen. Ihr maximales Existenzintervall nehmen wir als Teilmenge von $[0, \infty)$ an.*

Aus dieser Eindeutigkeit ergibt sich auch direkt die Beobachtung, dass aus $x(t) \neq 0$ für ein t bereits $x(t) \neq 0$ für alle t folgt. ähnliches gilt für y.

Wir untersuchen nun die stationären Punkte dieser Gleichung. Trivialerweise ist $(0, 0)$ ein solcher stationärer Punkt. Der einzige weitere stationäre Punkt liegt bei

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right),$$

wo wir die Linearisierung

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta\gamma/\delta \\ -\alpha\delta/\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese hat offenbar rein imaginäre Eigenwerte, so dass Satz 5.1.9 keine Aussage über die Stabilität zulässt. Wir können in diesem Fall allerdings trotzdem etwas aussagen.

Lemma 5.2.2. *Seien $\alpha, , \beta, \gamma, \delta > 0$ und $z \in \mathbb{R}^2_{>0}$ kein stationärer Punkt der Lotka-Volterra-Gleichung* (1).

(*i*) *Dann ist die Trajektorie*

$$\{\Phi(t, z) \; : \; t \in I_{max}(z)\} \subset \mathbb{R}^2$$

eine geschlossene, konvexe Kurve.

(*ii*) *Es gilt $I_{max}(z) = [0, \infty)$ und die Lösung $\Phi(t, z)$ ist periodisch.*

(*iii*) *Der stationäre Punkt $(x_0, y_0) = \left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$ ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.*

Beweis.

(*i*) Wir schreiben $\Phi(t, z) = (x(t), y(t))$. Nach Bemerkung 5.2.1 können wir $x(t), y(t) > 0$ für alle t annehmen. Aus (1) folgt dann

$$\frac{\dot{x}}{x} = -\alpha + \beta y \quad \text{und} \quad \frac{\dot{y}}{y} = \gamma - \delta x,$$

also erhalten wir, indem wir die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\dot{y}}{y}$ multiplizieren

$$\frac{\dot{x}\dot{y}}{xy} = \left(-\frac{\alpha}{y} + \beta\right)\dot{y}$$

und entsprechend aus der zweiten Gleichung durch Multiplikation mit $\frac{\dot{x}}{x}$

$$\frac{\dot{x}\dot{y}}{xy} = \left(\frac{\gamma}{x} - \delta\right)\dot{x}.$$

Durch Integration bezüglich t finden wir durch Substitution

$$\begin{aligned}\int \left(-\frac{\alpha}{y} + \beta\right)\dot{y}\mathrm{d}t &= \int -\frac{\alpha}{y} + \beta \mathrm{d}y = -\alpha\log(y) + \beta y \\ = \int \left(\frac{\gamma}{x} - \delta\right)\dot{x}\mathrm{d}t + c &= \int \frac{\gamma}{x} - \delta \mathrm{d}x + c = \gamma\log x - \delta x + c.\end{aligned}$$

Die Trajektorien sind also beschrieben durch die Gleichung

$$F(x,y) = -\alpha\log(y) + \beta y - \gamma\log x + \delta x = c.$$

Die Hesse-Matrix von F, also die Matrix der 2. Ableitungen, ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} \partial_x^2 F(x,y) & \partial_y\partial_x F(x,y) \\ \partial_x\partial_y F(x,y) & \partial_y^2 F(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma/x & 0 \\ 0 & \alpha/y\end{pmatrix}$$

und diese ist für $x, y > 0$ positiv definit, also ist die Funktion $F : \mathbb{R}^2_{>0} \to \mathbb{R}$ konvex und damit auch die Niveaumengen $\{(x,y) : F(x,y) \leq c\}$. Damit ist nach Definition auch die Randkurve, die genau unsere Lösungskurve ist, konvex.

Da gilt $F(x,y) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $x \to 0$, sowie für $y \to \infty$ und $y \to 0$ folgt, dass die Kurven $F(x,y) = c$ beschränkt sind, also müssen sie geschlossen sein.

(ii) Da die Trajektorien geschlossen sind, folgen die verbleibenden Aussagen über das Existenzintervall der Lösung und ihre Periodizität direkt aus Proposition 1.4.6.

(iii) Da die Trajektorien nach Proposition 1.4.6 disjunkt sind und die Lösungen nach *(ii)* periodisch sind, folgt die Stabilität des Gleichgewichtspunktes ebenfalls sofort aus der Tatsache, dass er das eindeutige globale Minimum der Funktion F ist.

q.e.d.

Typischerweise sehen die Trajektorien der Lösungen von (1) wie in Abbildung 5.4 dargestellt aus. Wir notieren noch folgende Beobachtung.

Lemma 5.2.3. *Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. Für die Durchschnittswerte der Lösungen von* (1) *in $\mathbb{R}^2_{>0}$ gilt dann*

$$\overline{x} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \textit{und} \quad \overline{y} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

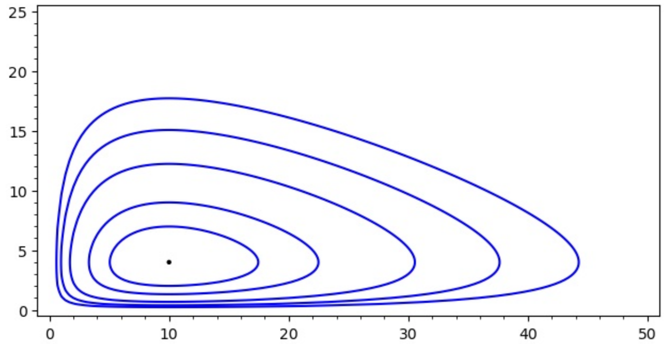

Abbildung 5.4: Trajektorien der Lösungen der Lotka-Volterra-Gleichung mit Parametern $\alpha = 1, \beta = 1/4, \gamma = 1, \delta = 1/10$.

Beweis. Die Behauptung ist für die konstante Lösung natürlich offensichtlich. Nach Lemma 5.2.2 wissen wir, dass die Lösungen periodisch sind. Die Periode sei $T > 0$. Dann gilt nach Definition

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \mathrm{d}t.$$

Aus der zweiten Differentialgleichung finden wir

$$x(t) = \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\dot{y}(t)}{\delta y(t)},$$

also folgt

$$\overline{x} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\gamma}{\delta} - \frac{\dot{y}(t)}{\delta y(t)} \mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{\delta T} (\log(y(T)) - \log(y(0))) = \frac{\gamma}{\delta},$$

da nach Wahl von T $y(T) = y(0)$ gilt.

Die Rechnung für $y(t)$ verläuft analog.

q.e.d.

Bemerkung 5.2.4. *Ist im Lotka-Volterra-Modell die Anzahl der Räuber* 0*, so ergibt sich ein unbeschränktes, exponentielles Wachstum der Beutepopulation, was natürlich nicht realistisch ist. Daher betrachtet man oft die folgende Variante des Problems*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (-\alpha - c_1 x + \beta y) x \\ \dot{y} &= (\gamma - c_2 y - \delta x) y \end{aligned} \tag{2}$$

für positive Konstanten $c_1, c_2 > 0$*. Hier findet man allerdings keine geschlossenen Trajektorien mehr, sondern der nicht-triviale Gleichgewichtspunkt wird asymptotisch stabil.*

5.2.2 Das Konkurrenz-Modell

Statt einer Räuber-Beute-Beziehung lassen sich mit einem ähnlichen Ansatz auch zwei Populationen modellieren, die in Konkurrenz zueinander um Ressourcen stehen. Eine wichtige Frage hierbei ist, ob beide Populationen nebeneinander existieren können oder ob eine die andere auf lange Sicht verdrängt.

Die beschriebene Situation wird meist durch die folgende Differentialgleichung modelliert,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (\alpha - c_1 x - \beta y)x \\ \dot{y} &= (\gamma - c_2 y - \delta x)y, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wie zuvor $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c_1, c_2 > 0$ positive Konstanten seien. Wie auch beim Lotka-Volterra-Modell erhalten wir Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für beliebige Anfangswerte und auch die Fortsetzbarkeit der Lösung auf $[0, \infty)$. Das genaue Verhalten der Lösungen hängt jedoch stark von den Parametern ab.

Wir wollen uns damit begnügen, an zwei Beispielen zu illustrieren, wie das Verhalten der Lösung ausfallen kann.

Beispiel 5.2.5. Betrachten wir (3) für $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = 2, \delta = 1, c_1 = 2, c_2 = 2$, also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2 - 2x - y)x \\ \dot{y} &= (2 - x - 2y)y. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Linearisierung in den stationären Punkten $(0, 0), (2/3, 2/3), (1, 0), (0, 1)$. Die zugehörige Jacobi-Matrix ist gegeben durch

$$J(G)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 4x - y & -x \\ -y & 2 - x - 4y \end{pmatrix}.$$

Aus Satz 5.1.9 erhalten wir folgende Stabilitätseigenschaften dieser Gleichgewichtspunkte.

- In $(0, 0)$: Hier gibt die Jacobi-Matrix

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

  wir haben also positive Eigenwerte und der Punkt ist instabil.

- In $(2/3, 2/3)$: Wir erhalten als Koeffizientenmatrix

  $$A = \begin{pmatrix} -4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -4/3 \end{pmatrix}.$$

  Die Eigenwerte dieser Matrix sind $-2/3$ und -2, dieser Gleichgewichtspunkt ist also asymptotisch stabil.

- In $(1,0)$: Hier erhalten wir für die Linearisierung
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
es gibt also einen positiven Eigenwert und dieser Gleichgewichtspunkt ist instabil.

- In $(0,1)$: Hier ergibt sich
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$
wir haben also wieder einen positiven Eigenwert und der Gleichgewichtspunkt ist instabil.

Man kann zeigen, dass der stationäre Punkt $(2/3, 2/3)$ sogar **global asymptotisch stabil** ist, d.h. alle Lösungen mit echt positiven Anfangswerten konvergieren zu diesem Punkt.

Da beide Komponenten dieses Grenzwertes positiv sind, bedeutet dies, dass beide Populationen nebeneinander existieren können.

Beispiel 5.2.6. Wir betrachten nun das leicht abgeänderte Modell
$$\begin{aligned} \dot{x} &= (2 - x - 2y)x \\ \dot{y} &= (2 - 2x - y)y. \end{aligned}$$

Hier erhalten wir die Gleichgewichtspunkte $(0,0), (2/3, 2/3), (2,0), (0,2)$. Über den Stabilitätssatz 5.1.9 findet man wie in Beispiel 5.2.5 beschrieben das folgende Stabilitätsverhalten der stationären Punkte: $(0,0)$ und $(2/3, 2/3)$ sind beide instabil, während die beiden Punkte $(2,0)$ und $(0,2)$ asymptotisch stabil sind.

Hier lässt sich nun zeigen, dass jede Lösung mit $0 < x(0) < y(0)$ zu $(0,2)$ konvergiert, während jede Lösung mit $0 < y(0) < x(0)$ zu $(2,0)$ konvergiert.

Hier verdrängt also stets die größere Population die kleinere und sie können nicht auf lange Sicht nebeneinander existieren.

Kapitel 6

Randwertprobleme

Bisher wurden in dieser Vorlesung fast ausschließlich Anfangswertprobleme behandelt. Hierfür konnten wir in Kapitel 2 allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze herleiten, wie den Satz von Picard-Lindelöf 2.1.13 oder den Satz von Peano 2.2.7. Hierbei wurde als Anfangsbedingung der Wert der gesuchten Funktion (und ggf. ihrer Ableitungen) vorgegeben.

Betrachten wir eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + ... + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

für stetige Funktionen $a_0, ..., a_{n-1}, b : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I. Dann hat diese Gleichung nach Satz 3.3.2 n unabhängige Lösungen, so dass n Bedingungen benötigt werden, um eine Lösung eindeutig festzulegen. Dies kann etwa auch dadurch erreicht werden, dass man Werte der gesuchten Funktion (und ihrer Ableitungen) in zwei verschiedenen Punkten, z.B. dem Anfangs- und Endpunkt des relevanten Intervalls, vorgibt, was in der Praxis durchaus eine Bedeutung hat.

Wie wir im Folgenden sehen werden, gibt es allerdings in dieser Situation kein allgemeines Resultat wie den Satz von Picard-Lindelöf mehr, der einzig aus den Eigenschaften der involvierten Funktionen eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage erlaubt. Für spezielle lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung, so genannte Sturm'sche Randwertprobleme, werden wir jedoch entsprechende Existenzaussagen erhalten.

6.1 Ein Beispiel

Wir wollen zunächst an einem Beispiel illustrieren, dass die Lösung von Randwertproblemen im Allgemeinen sehr viel schwieriger ist als die Lösung von Anfangswertproblemen.

Beispiel 6.1.1. (i) Betrachten wir für $T > 0$ das lineare Randwertproblem

$$y'' + y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y(T) = 0.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung können wir mit Hilfe von Satz 3.3.5 und Proposition 3.3.7 leicht bestimmen zu

$$f(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \frac{1}{2}e^x$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ergibt sich dann sofort $c_1 = -\frac{1}{2}$. Setzen wir die Endbedingung ein, so erhalten wir

$$c_2 = -\frac{\cos(T) + e^T}{2\sin(T)}$$

Wir sehen also, dass wir für $T = k\pi,\ k \in \mathbb{N}$, keine Lösung für c_2 und somit keine Lösung für das Randwertproblem erhalten, für alle anderen Werte von T jedoch eine eindeutige Lösung.

(ii) Wie in Teil *(i)* gesehen ist jede Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = e^x$$

mit $y(0) = 0$ von der Form

$$f(x) = \frac{1}{2}\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{1}{2}e^x$$

für ein $c_2 \in \mathbb{R}$. In jedem Falle gilt also $f(\pi) = \frac{1}{2}(1 + e^\pi)$. Für jedes $c_2 \in \mathbb{R}$ löst f also das Randwertproblem

$$y'' + y = e^x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = \frac{1}{2}(1 + e^\pi),$$

es gibt also unendlich viele Lösungen.

(iii) Betrachten wir allgemeiner für eine stetige Funktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$y'' + y = b(x), \quad y(0) = y(T) = 0,$$

so kann man zeigen (Übung), dass das Problem für $T = \pi$ genau dann eine Lösung besitzt, wenn $\int_0^\pi b(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$ gilt, während es etwa für $T = 1$ immer eine Lösung gibt.

6.2 Lineare Randwertprobleme zweiter Ordnung

6.2.1 Typen von Randwertproblemen

Wir wollen zunächst formal den Begriff des Randwertproblems für eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung definieren.

Definition 6.2.1. Sei $I = [x_0, x_1]$ ein kompaktes Intervall und $a_1, a_0, b : I \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Für gegebene Konstanten $\alpha_1, ..., \alpha_4, \beta_1, ..., \beta_4, \eta, \xi \in \mathbb{R}$ nennen wir

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad x \in (x_0, x_1),$$
$$\begin{aligned} \alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) + \alpha_3 y(x_1) + \alpha_4 y'(x_1) &= \eta \\ \beta_1 y(x_0) + \beta_2 y'(x_0) + \beta_3 y(x_1) + \beta_4 y'(x_1) &= \xi \end{aligned}$$

ein lineares **Randwertproblem** zweiter Ordnung. Für $\eta = \xi = 0$ nennt man das Randwertproblem **homogen**.

Man unterscheidet verschiedene Typen von Randbedingungen.

Definition 6.2.2. Die Voraussetzungen und Bezeichnungen seien wie in Definition 6.2.1.

(i) Gilt $\alpha_1 = \beta_3 = 1$ und $\alpha_i, \beta_j = 0$ sonst, so nennen wir das entsprechende Randwertproblem

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad y(x_0) = \eta, \quad y(x_1) = \xi$$

ein **Dirichlet'sches Randwertproblem**.

(ii) Gilt $\alpha_2 = \beta_4 = 1$ und $\alpha_i, \beta_j = 0$ sonst, so nennen wir das entsprechende Randwertproblem

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad y'(x_0) = \eta, \quad y'(x_1) = \xi$$

ein **von Neumann'sches Randwertproblem**.

(iii) Gilt $\alpha_1 = 1$, $\alpha_3 = -1$, sowie $\beta_2 = 1$ und $\beta_4 = -1$, und $\alpha_i, \beta_j = 0$ sonst, so nennen wir das entsprechende Randwertproblem

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x), \quad y(x_0) - y(x_1) = \eta, \quad y'(x_0) - y'(x_1) = \xi$$

periodisch.

Wir wollen zunächst zeigen, dass man sich bei der Untersuchung von Randwertproblemen auf homogene Randwertprobleme beschränken kann.

Bemerkung 6.2.3. *Sei $f(x)$ eine Lösung des Randwertproblems aus Definition 6.2.1. Ist u dann eine beliebige, zweimal stetig differenzierbare Funktion, die lediglich die Randbedingungen*

$$\begin{aligned} \alpha_1 u(x_0) + \alpha_2 u'(x_0) + \alpha_3 u(x_1) + \alpha_4 u'(x_1) &= \eta \\ \beta_1 u(x_0) + \beta_2 u'(x_0) + \beta_3 u(x_1) + \beta_4 u'(x_1) &= \xi \end{aligned}$$

erfüllt, dann ist $f(x) - u(x)$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) - u''(x) - a_1(x)u'(x) - a_0(x)u(x), \quad x \in (a,b) \\ \alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) + \alpha_3 y(x_1) + \alpha_4 y'(x_1) \quad = 0 \\ \beta_1 y(x_0) + \beta_2 y'(x_0) + \beta_3 y(x_1) + \beta_4 y'(x_1) \quad = 0. \end{aligned}$$

Wir führen noch einen weiteren speziellen Typ von Randwertproblemen ein.

Definition 6.2.4. Sei $p : I = [x_0, x_1] \to (0, \infty)$ eine positive, stetig differenzierbare Funktion und $q, b : [x_0, x_1] \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter seien $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ und $\beta_1 + \beta_2 \neq 0$. Dann nennen wir das Randwertproblem

$$\begin{aligned} (p(x)y')' + q(x)y = b(x), \quad x \in (x_0, x_1) \\ \alpha_1 y(x_0) + \alpha_2 y'(x_0) = \eta, \qquad \beta_1 y(x_1) + \beta_2 y'(x_1) = \xi \end{aligned}$$

ein **Sturm'sches Randwertproblem**.

Bemerkung 6.2.5. *Sowohl das Dirichlet'sche als auch das von Neumann'sche Randwertproblem sind Spezialfälle des Sturm'schen Randwertproblems (Übung).*

Wir führen noch folgende Notation ein: Für $p, q, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ wie in Definition 6.2.4 definieren wir den (offenbar linearen) Differentialoperator

$$\mathcal{L} : \mathscr{C}^2(I) \to \mathscr{C}(I), \quad f \mapsto (x \mapsto (p(x)f'(x))' + q(x)f(x), \tag{1}$$

sowie die (ebenfalls linearen) **Randoperatoren**

$$\mathcal{R}_\ell : \ \mathscr{C}^2(I) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \alpha_1 f(x_0) + \alpha_2 f'(x_0) \tag{2}$$

und

$$\mathcal{R}_r : \ \mathscr{C}^2(I) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \beta_1 f(x_1) + \beta_2 f'(x_1). \tag{3}$$

Wir können dann offenbar ein Sturm'sches Randwertproblem kompakter formulieren,

$$\mathcal{L}(y) = b(x) \quad x \in (x_0, x_1), \quad \mathcal{R}_\ell(y) = \eta, \quad \mathcal{R}_r(y) = \xi.$$

Bemerkung 6.2.6. *Wegen $p(x) > 0$ für alle $x \in [x_0, x_1]$ lässt sich die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}(y) = 0$ in der Form $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ mit auf I stetigen Funktionen $a_1, a_0 : I \to \mathbb{R}$ bringen. Nach Satz 3.3.5 ist die Lösungsmenge dieser Gleichung ein 2-dimensionaler Teilraum von $\mathscr{C}^2(I)$.*

Bemerkung 6.2.7. *Definiert man auf dem Raum $\mathscr{C}(I)$ ein Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle := \int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

so ist der Sturm'sche Operator $\mathcal{L}$ aus (1) ***selbstadjungiert*** *bezüglich dieses Skalarproduktes, d.h. es gilt für $f, g \in \mathscr{C}^2(I) \leq \mathscr{C}(I)$*

$$\langle \mathcal{L}(f), g\rangle = \langle f, \mathcal{L}(g)\rangle.$$

(Übung).

Wir bemerken noch folgende Identität für den Sturm'schen Differentialoperator, die Lagrange zugeschrieben wird

Lemma 6.2.8 (Lagrange-Identität). *Sei $I = [x_0, x_1]$ und $\mathcal{L}$ wie in (1) mit $p : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar und positiv und $q : I \to \mathbb{R}$ stetig. Für beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen $f, g \in \mathscr{C}^2(I)$ gilt die Identität*

$$g\mathcal{L}(f) - f\mathcal{L}(g) = \left(p \cdot (f'g - fg')\right)'.$$

Beweis. Nach der Produktregel gilt einerseits

$$\begin{aligned}(p \cdot (f'g - fg'))' = p' \cdot (f'g - fg') + p \cdot (f''g + f'g' - f'g' - fg'')&\\ = p' \cdot (f'g - fg') + p \cdot (f''g - fg'')\,,&\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} g\mathcal{L}(f) - f\mathcal{L}(g) &= g \cdot ((pf')' + qf) - f \cdot ((pg')' + qg) \\ &= g \cdot (pf'' + p'f' + qf) - f \cdot (pg'' + p'g' + qg) \\ &= pf''g + p'f'g + qfg - pfg'' - p'fg' - qfg \\ &= p \cdot (f''g - fg'') + p' \cdot (f'g - fg')\,. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

6.2.2 Lösbarkeit für Sturm'sche Randwertprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen ein Sturm'sches Randwertproblem (eindeutig) lösbar ist. Für die Eindeutigkeit haben wir das folgende Kriterium.

Satz 6.2.9 (Eindeutigkeit der Lösung). *Sei* $I = [x_0, x_1]$ *und* $\mathcal{L}, \mathcal{R}_\ell, \mathcal{R}_r$ *wie in* (1), (2), (3) *mit* $p : I \to (0, \infty)$ *stetig differenzierbar und positiv und* $q : I \to \mathbb{R}$ *stetig. Weiter sei* $\{f_1, f_2\}$ *ein Fundamentalsystem von Lösungen für die homogene Differentialgleichung* $\mathcal{L}(y) = 0$*, also eine Basis von* $\operatorname{Kern}(\mathcal{L})$*.*
Gilt dann

$$\det \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f_1) & \mathcal{R}_\ell(f_2) \\ \mathcal{R}_r(f_1) & \mathcal{R}_r(f_2) \end{pmatrix} \neq 0,$$

so besitzt das Sturm'sche Randwertproblem

$$\mathcal{L}(y) = b(x) \quad x \in (x_0, x_1), \quad \mathcal{R}_\ell(y) = \eta, \quad \mathcal{R}_r(y) = \xi$$

für jede stetige Funktion $b : I \to \mathbb{R}$ *und* $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ ***höchstens*** *eine Lösung.*

Beweis. Sei f eine Lösung des Randwertproblems. Insbesondere ist f also eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}(y) = b(x)$. Nach Satz 3.3.5 ist dann jede Lösung dieser inhomogenen Gleichung von der Form

$$f(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dies gilt insbesondere auch für jede Lösung $\tilde{f}$ des gegebenen Sturm'schen Randwertproblems. Es gilt dann

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(\tilde{f}) \\ \mathcal{R}_r(\tilde{f}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f) + c_1 \mathcal{R}_\ell(f_1) + c_2 \mathcal{R}_\ell(f_2) \\ \mathcal{R}_r(f) + c_1 \mathcal{R}_r(f_1) + c_2 \mathcal{R}_r(f_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f) \\ \mathcal{R}_r(f) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f_1) & \mathcal{R}_\ell(f_2) \\ \mathcal{R}_r(f_1) & \mathcal{R}_r(f_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f_1) & \mathcal{R}_\ell(f_2) \\ \mathcal{R}_r(f_1) & \mathcal{R}_r(f_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Matrix $\begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f_1) & \mathcal{R}_\ell(f_2) \\ \mathcal{R}_r(f_1) & \mathcal{R}_r(f_2) \end{pmatrix}$ invertierbar, also ergibt sich als einzige Lösung $c_1 = c_2 = 0$ und somit $f = \tilde{f}$, was wir behauptet hatten.

q.e.d.

Um die Existenz von Lösungen zu untersuchen, benötigen wir den folgenden Begriff.

Definition 6.2.10. Sei $\mathcal{L}$ ein beliebiger linearer Differentialoperator auf einem kompakten Intervall I. Eine integrierbare Funktion $\mathcal{G} : I \times I \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto \mathcal{G}(x,t)$, die für festes x in t bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist, heißt **Green'sche Funktion** zum Operator $\mathcal{L}$, falls für jede stetige Funktion $b : I \to \mathbb{R}$ die Funktion f definiert durch

$$f(x) := \int_I \mathcal{G}(x,t)b(t)\mathrm{d}t$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

ist.

Bemerkung 6.2.11. *Offenbar erlaubt die Kenntnis einer Green'schen Funktion, eine lineare Differentialgleichung durch direktes Integrieren zu lösen. Allgemeiner lässt man für $\mathcal{G}$ gelegentlich auch sogenannte* ***Distributionen*** *zu, die im strengen Sinne keine wohldefinierten Funktionen sind und die wir hier nicht formal einführen wollen.*

Hiermit können wir nun den folgenden Existenzsatz für die Lösung Sturm'scher Randwertprobleme beweisen.

Satz 6.2.12. *Sei $I = [x_0, x_1]$ ein kompaktes Intervall und $\mathcal{L}, \mathcal{R}_\ell, \mathcal{R}_r$ wie in (1), (2), (3) mit $p : I \to (0,\infty)$ stetig differenzierbar und positiv und $q : I \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter seien f_ℓ bzw. f_r nicht-triviale Lösungen von*

$$\mathcal{L}(y) = 0, \quad x \in (x_0, x_1), \quad \mathcal{R}_\ell(y) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}(y) = 0, \quad x \in (x_0, x_1), \quad \mathcal{R}_r(y) = 0$$

und nehmen wir an, die Funktionen f_ℓ, f_r sind linear unabhängig. Dann gilt Folgendes:

(*i*) *Die Funktion*

$$\mathcal{G} : I \times I \to \mathbb{R}, \quad (x,t) \mapsto \begin{cases} \frac{f_\ell(x)f_r(t)}{p(t)W(t)} & x_0 \le x \le t \le x_1 \\ \frac{f_r(x)f_\ell(t)}{p(t)W(t)} & x_0 \le t < x \le x_1, \end{cases}$$

wobei $W(x) = f_\ell(x)f_r'(x) - f_\ell'(x)f_r(x)$ die Wronski-Determinante (vgl. Definition 3.1.6) der Lösungen bezeichnet, auf $I \times I$ stetig und $x \mapsto \mathcal{G}(x,t)$ ist in $[x_0, x_1) \setminus \{t\}$ zweimal stetig differenzierbar.

(*ii*) *Die Funktion $\mathcal{G}$ ist eine Green'sche Funktion zum Operator $\mathcal{L}$ und für jede stetige Funktion $b : I \to \mathbb{R}$ löst die Funktion f definiert durch*

$$f(x) = \int_I \mathcal{G}(x,y)b(y)\mathrm{d}y$$

das homogene Sturm'sche Randwertproblem

$$\mathcal{L}(y) = b(x), \quad \mathcal{R}_\ell(y) = 0, \quad \mathcal{R}_r(y) = 0.$$

Beweis.

(*i*) Zunächst gibt es nicht-triviale Funktionen f_ℓ, f_r wie behauptet. So ist etwa f_ℓ die nach Satz 3.3.5 eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathcal{L}(y) = 0, \quad y(x_0) = \alpha_2, \quad y'(x_0) = -\alpha_1,$$

die wegen $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ nicht trivial ist. Entsprechendes gilt auch für f_r. Ob diese zusätzlich linear unabhängig gewählt werden können, ist allerdings nicht immer klar. Da f_ℓ, f_r beide die homogene Differentialgleichung $\mathcal{L}(y) = 0$ lösen, wissen wir nach Lemma 3.1.7, dass f_ℓ und f_r genau dann linear unabhängig sind, wenn ihre Wronski-Determinante W nirgends verschwindet. Da p nach Voraussetzung positiv ist, folgt also für $t \in I$ auch $p(t)W(t) \neq 0$, also ist die Funktion $\mathcal{G}$ wohldefiniert.

Wegen

$$\lim_{t \nearrow x} \mathcal{G}(x,t) = \lim_{t \searrow x} \mathcal{G}(x,t)$$

ist die Funktion wie behauptet auf $I \times I$ stetig. Da f_ℓ bzw. f_r zweimal stetig differenzierbar sind, folgt die zweimalige stetige Differenzierbarkeit von $x \mapsto \mathcal{G}(x,t)$ bei festem t somit direkt aus der Definition.

(*ii*) Wir rechnen direkt nach, dass f die geforderten Eigenschaften erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_I \mathcal{G}(x,t)b(t)\mathrm{d}t\right) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{x_0}^{x} \frac{f_r(x)f_\ell(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{x_1} \frac{f_\ell(x)f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t\right) \\
=&f_r'(x)\int_{x_0}^{x} \frac{f_\ell(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t + f_r(x)\frac{f_\ell(x)}{p(x)W(x)}b(x) \\
&\qquad + f_\ell'(x)\int_{x}^{x_1} \frac{f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t - f_\ell(x)\frac{f_r(x)}{p(x)W(x)}b(x) \\
=&\int_{x_0}^{x} \frac{f_r'(x)f_\ell(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{x_1} \frac{f_\ell'(x)f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(x) &= \mathcal{L}\left(\int_I \mathcal{G}(\cdot,t)b(t)\mathrm{d}t\right)(x) \\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\int_{x_0}^{x}\frac{f_r'(x)f_\ell(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p(x)\int_{x}^{x_1}\frac{f_\ell'(x)f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t\right) \\
&\qquad + q(x)\int_{x_0}^{x_1}\mathcal{G}(x,t)b(t)\mathrm{d}t \\
=&\left[(p(x)f_r'(x))' + q(x)f_r(x)\right]\int_{x_0}^{x}\frac{f_\ell(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \left[(p(x)f_\ell'(x))' + q(x)f_\ell(x)\right]\int_{x}^{x_1}\frac{f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t \\
&\qquad + p(x)f_r'(x)\frac{f_\ell(x)}{p(x)W(x)}b(x) - p(x)f_\ell'(x)\frac{f_r(x)}{p(x)W(x)}b(x) \\
=&(\mathcal{L}f_r)(x)\cdot\int_{x_0}^{x}\frac{f_\ell(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t + (\mathcal{L}f_\ell)(x)\cdot\int_{x}^{x_1}\frac{f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t \\
&\qquad + \frac{p(x)(f_r'(x)f_\ell(x) - f_\ell'(x)f_r(x))}{p(x)W(x)}b(x) \\
=&0+0+b(x).
\end{aligned}
$$

Die Funktion f erfüllt somit die Differentialgleichung.

Zudem gilt

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_\ell f &= \mathcal{R}_\ell\left(\int_{x_0}^{x_1}\mathcal{G}(\cdot,t)b(t)\mathrm{d}t\right) \\
=&\alpha_1\int_{x_0}^{x_1}\frac{f_\ell(x_0)f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t + \alpha_2\int_{x_0}^{x_1}\frac{f_\ell'(x_0)f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t \\
=&(\alpha_1 f_\ell(x_0) + \alpha_2 f_\ell'(x_0))\int_{x_0}^{x_1}\frac{f_r(t)}{p(t)W(t)}b(t)\mathrm{d}t \\
=&0,
\end{aligned}
$$

und mit analogen Rechnung ebenso $\mathcal{R}_r f = 0$, so dass die Funktion f wie behauptet auch die geforderten Randbedingungen erfüllt.

q.e.d.

Beispiel 6.2.13. Sei $b : (-1,1) \to \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten das Randwertproblem

$$
y'' = b(x), \quad y(-1) = 0, \quad y(1) = 0.
$$

Offenbar erfüllt jede Polynomfunktion vom Grad ≤ 1 die homogene Differentialgleichung. Nach Satz 6.2.12 suchen wir solche (nicht-trivialen) Lösungen, die jeweils eine der beiden Randbedingungen erfüllen. Wir können also etwa $f_\ell(x) = 1 + x$ und $f_r(x) = 1 - x$ wählen. Diese Funktionen sind offenbar linear unabhängig und die zugehörige Wronski-Determinante ist gegeben durch

$$W(x) = f_\ell(x)f_r'(x) - f_\ell'(x)f_r(x) = (1 + x) \cdot (-1) - 1 \cdot (1 - x) = -2 \neq 0.$$

Als Green'sche Funktion für das Anfangswertproblem ergibt sich somit

$$\mathcal{G}(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1+x)(1-t) & -1 \leq x \leq t \leq 1 \\ & -1 \leq t < x \leq 1 \end{cases}. \tag{4}$$

und die nach Satz 6.2.9 eindeutige Lösung des Randwertproblems finden wir mit Satz 6.2.12 als

$$f(x) = \int_{-1}^{1} \mathcal{G}(x,y)b(y)\mathrm{d}y.$$

In diesem Fall lässt sich die Lösung auch direkt bestimmen: Indem man die Differentialgleichung zweimal integriert ergibt sich für eine Lösung f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f'(x) = c_1 + \int_{-1}^{x} b(t)\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad f(x) = c_2 + c_1 x + \int_{-1}^{x} \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.$$

Aus den Randbedingungen ergibt sich also

$$c_2 - c_1 = 0 \quad \text{und} \quad c_1 + c_2 + \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s = 0,$$

woraus wir direkt

$$c_1 = c_2 = -\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s$$

erhalten. Es eribt sich daher für die Lösung

$$f(x) = -\frac{1}{2}(1+x) \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s + \int_{-1}^{x} \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s.$$

Mittels partieller Integration lässt sich dieser Ausdruck noch vereinfachen. Wir haben

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{x} \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s &= \int_{-1}^{x} 1 \cdot \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s \\ &= \left[s \cdot \left(\int_{-1}^{s} b(t)\mathrm{d}t \right) \right]_{-1}^{x} - \int_{-1}^{x} sb(s)\mathrm{d}s = x \int_{-1}^{x} b(t)\mathrm{d}t - \int_{-1}^{x} tb(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{x} (x-t)b(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

und somit

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -\frac{1}{2}(1+x)\int_{-1}^{1}(1-t)b(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x}(x-t)b(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{x}\left(-\frac{1}{2}(1+x)(1-t)+(x-t)\right)b(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{1}-\frac{1}{2}(1+x)(1-t)b(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{x}-\frac{1}{2}(1-x)(1-t)b(t)\mathrm{d}t + \int_{x}^{1}-\frac{1}{2}(1+x)(1-t)b(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{1}\mathcal{G}(x,t)b(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

mit $\mathcal{G}$ wie in (4).

6.3 Allgemeine lineare Randwertprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir allgemein Systeme von linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit gegebenen Randbedingungen betrachten.

Definition 6.3.1. Sei $I = [x_0, x_1]$ ein kompaktes Intervall und seien $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$, $b : I \to \mathbb{C}^n$ stetige Funktionen, sowie $B_0, B_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\eta \in \mathbb{C}^n$ konstante Matrizen bzw. Vektoren. Definieren wir für $f \in \mathscr{C}_n^1(I)$ den linearen Differentialoperator $\mathcal{L} : \mathscr{C}_n^1(I) \to \mathscr{C}_n(I)$ durch

$$\mathcal{L}(f)(x) := f'(x) - A(x)f(x), \tag{1}$$

sowie den Randoperator

$$\mathcal{R}(f) = B_0 \cdot f(x_0) + B_1 \cdot f(x_1). \tag{2}$$

Dann nennen wir die Aufgabe

$$\mathcal{L}(y) = b(x), \quad \mathcal{R}(y) = \eta \tag{3}$$

ein **lineares Randwertproblem** erster Ordnung und eine auf I differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{C}^n$ heißt eine **Lösung**, wenn Sie diese Bedingungen erfüllt.

Einige Spezialfälle dieses Problems haben wir bereits betrachtet.

Beispiel 6.3.2.

1. Für $B_0 = I_n$ und $B_1 = 0$ ist das Randwertproblem (3) offenbar äquivalent zu einem linearen Anfangswertproblem wie in Satz 3.1.4.

2. Mit den Bezeichnungen aus Definition 6.2.4 ist

$$\vec{y}' - \begin{pmatrix} 0 & 1/p \\ -q & 0 \end{pmatrix}(x)\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2}{p(x_0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{y}(x_0) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \frac{\beta_2}{p(x_1)} \end{pmatrix}\vec{y}(x_1) = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$$

ein lineares Randwertproblem, das zum Sturm'schen Randwertproblem aus Definition 6.2.4 äquivalent ist: Ist f eine Lösung des Sturm'schen Randwertproblems, so ist $(f, p \cdot f')^{tr}$ eine Lösung des hier gegebenen Problems und ist umgekehrt $\vec{f} = (f_1, f_2)$ eine Lösung des hier angegebenen Problems, so löst f_1 das Sturm'sche Randwertproblem.

Wir notieren zunächst folgende Eindeutigkeitsaussage.

Satz 6.3.3. *Mit der Notation und den Voraussetzungen von Definition 6.3.1 sei $F = (f_1, ..., f_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems*

$$\mathcal{L}(y) = 0.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(*i*) *Das homogene Randwertproblem*

$$\mathcal{L}(y) = 0, \quad \mathcal{R}(y) = 0$$

hat nur die triviale Lösung $y = 0$.

(*ii*) *Die Matrix $\mathcal{R}(F) := B_0F(x_0) + B_1F(x_1) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist invertierbar, es gilt also* $\det \mathcal{R}(F) \neq 0$.

(*iii*) *Für eine beliebige stetige Funktion $b : I \to \mathbb{C}^n$ und $\eta \in \mathbb{C}^n$ hat das Randwertproblem*

$$\mathcal{L}(y) = b(x), \quad \mathcal{R}(y) = \eta$$

eine eindeutige Lösung.

Beweis. Nach Satz 3.1.4 und Lemma 3.1.7 (*i*) ist jede Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}(y) = b(x)$$

von der Form

$$f_0(x) + F(x) \cdot c$$

für eine beliebige partikuläre Lösung $f_0(x)$ der inhomogenen Gleichung (welche insbesondere existiert) und $c \in \mathbb{C}^n$. Durch Anwendung des Randoperators $\mathcal{R}$ ergibt sich hieraus das lineare Gleichungssystem

$$\mathcal{R}(F) \cdot c = \eta - \mathcal{R}(f_0) \tag{4}$$

für den Vektor $c \in \mathbb{C}^n$. Dieses lineare Gleichungssystem ist, wie aus der Linearen Algebra bekannt, genau dann für jede rechte Seite eindeutig lösbar, wenn $\mathcal{R}(F) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ invertierbar ist, also wenn die Determinante dieser Matrix nicht verschwindet. Dies zeigt die Äquivalenz von (*ii*) und (*iii*). Ebenfalls aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die einzige Lösung des Systems $\mathcal{R}(F)c = 0$ durch $c = 0$

gegeben ist, so dass auch (i) und (ii) äquivalent sind.

q.e.d.

In Satz 6.2.12 hatten wir gezeigt, dass es für ein Sturm'sches Randwertproblem (unter den dort gegebenen Voraussetzungen) stets eine Green'sche Funktion gibt, also eine stetige Funktion $\mathcal{G}$, so dass die Lösung des Randwertproblems durch ein Integral $\int_I \mathcal{G}(x,t)b(t)\mathrm{d}t$ ausgedrückt werden kann. Für die allgemeine Definition einer Green'schen Funktion, vgl. Definition 6.2.10. Wir verzichten daruaf, die Definition mit den offensichtlichen Anpassungen noch einmal zu wiederholen. Es gilt nun der folgende Satz (vgl. Satz 6.2.12).

Satz 6.3.4. *Sei $I = [x_0, x_1]$ ein kompaktes Intervall und $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ stetig. Die Operatoren $\mathcal{L}$ und $\mathcal{R}$ seien definiert wie in* (1) *bzw.* (2). *Sei zudem $F = (f_1, ..., f_n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des homogenen, linearen Differentialgleichungssystems $\mathcal{L}(y) = 0$, so dass $\det \mathcal{R}(F) \neq 0$ gilt.*

(i) *Dann existiert eine Green'sche Funktion $\mathcal{G} : I \times I \to \mathbb{C}^{n\times n}$, so dass für jede stetige Funktion $b : I \to \mathbb{C}^n$ die Lösung f des Randwertproblems*

$$\mathcal{L}(y) = b(x), \quad \mathcal{R}(y) = 0$$

gegeben ist durch

$$f(x) = \int_I \mathcal{G}(x,t)b(t)\mathrm{d}t.$$

Sei

$$\chi(x,t) = \begin{cases} 1 & x_0 \le t \le x \le x_1 \\ 0 & x_0 \le x < t \le x_1. \end{cases}$$

Dann ist die Funktion $\mathcal{G}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,t) &= \chi(x,t) \cdot F(x) \cdot F(t)^{-1} - F(x) \cdot \mathcal{R}(F)^{-1} \cdot B_1 \cdot F(x_1) \cdot F(t)^{-1} \\ &= F(x) \cdot \big(\chi(x,t) I_n - \mathcal{R}(F)^{-1} \cdot B_1 \cdot F(x_1)\big) \cdot F(t)^{-1} \end{aligned}$$

eine solche Green'sche Funktion.

(ii) *Die Green'sche Funktion $\mathcal{G}$ aus (i) erfüllt folgende Eigenschaften:*

(a) *Die Funktion $\mathcal{G}(x,t)$ ist stetig für $x_0 \le t \le x \le x_1$ und für $x_0 \le x \le t \le x_1$. Für jedes $t \in (x_0, x_1)$ gilt zudem*

$$\lim_{x \searrow t} \mathcal{G}(x,t) - \lim_{x \nearrow t} \mathcal{G}(x,t) = I_n.$$

(b) *Für festes $t \in I$ gilt $\mathcal{L}(\mathcal{G})(x,t) = 0$ für alle $x \in I \setminus \{t\}$.*

(c) *Für festes $t \in I^\circ$ gilt $\mathcal{R}(\mathcal{G})(\cdot,t) = B_0 \cdot \mathcal{G}(x_0,t) + B_1 \cdot \mathcal{G}(x_1,t) = 0$.*

Die Funktion $\mathcal{G}$ ist durch die Eigenschaften (a)-(c) eindeutig bestimmt.

(iii) *Jede Green'sche Funktion, die Eigenschaft (a) in (ii) erfüllt, ist mit der Funktion $\mathcal{G}$ aus (i) identisch.*

Beweis.

(i) Nach Satz 3.1.8 über die Variation der Konstanten für lineare Systeme von Differentialgleichungen ist

$$f_0(x) = \int_{x_0}^{x} F(x) \cdot F(t)^{-1} \cdot b(t)\mathrm{d}t$$

eine partikuläre Lösung des inhomogenen Differentialgleichungssystems $\mathcal{L}(y) = b(x)$.Es gilt dann

$$\mathcal{R}(f_0) = B_0 \cdot f_0(x_0) + B_1 \cdot f_0(x_1) = B_1 \cdot \int_{x_0}^{x_1} F(x_1) \cdot F(t)^{-1} \cdot b(t)\mathrm{d}t.$$

Die Voraussetzungen von Satz 6.3.3 sind hier erfüllt und wir erhalten aus dem Beweis dieses Satzes (präzise aus (4)), dass eine eindeutige Lösung existiert, die wir schreiben können als $f(x) = f_0(x) + F(x) \cdot c$ mit

$$c = \mathcal{R}(F)^{-1} \cdot (-\mathcal{R}(f_0)) = -\mathcal{R}(F)^{-1} \cdot B_1 \cdot \int_{x_0}^{x_1} F(x_1) \cdot F(t)^{-1} \cdot b(t)\mathrm{d}t,$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{x_0}^{x} F(x) \cdot F(t)^{-1} \cdot b(t)\mathrm{d}t - \mathcal{R}(F)^{-1} \cdot B_1 \cdot \int_{x_0}^{x_1} F(x_1) \cdot F(t)^{-1} \cdot b(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_I \left(\chi(x,t) \cdot F(x) \cdot F(t)^{-1} - \mathcal{R}(F)^{-1} \cdot B_1 \cdot F(x_1) \cdot F(t)^{-1}\right) \cdot b(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

also ist die Funktion $\mathcal{G}$ wie dargestellt eine Green'sche Funktion für das Anfangswertproblem.

(ii) Wir zeigen zunächst, dass die Funktion $\mathcal{G}$ aus (i) die Eigenschaften (a)-(c) erfüllt.

(a) Die Funktion $F(x) \cdot \mathcal{R}(F)^{-1} \cdot B_1 \cdot F(x_1) \cdot F(t)^{-1}$ ist offensichtlich stetig auf $I \times I$, während $\chi(x,t) \cdot F(x) \cdot F(t)^{-1}$ jeweils auf den abgeschlossenen Dreiecken $x_0 \le t \le x \le x_1$ und $x_0 \le x \le t \le x_1$ stetig ist und auf der Diagonale $x = t$ eine Sprungstelle hat: Für festes t gilt einerseits

$$\lim_{x \searrow t} \chi(x,t) \cdot F(x) \cdot F(t)^{-1} = F(t)F(t)^{-1} = I_n,$$

andererseits

$$\lim_{x \nearrow t} \chi(x,t) \cdot F(x) \cdot F(t)^{-1} = 0,$$

also erfüllt $\mathcal{G}$ die Eigenschaft (a).

(b) Für festes t und $x \neq t$ die Funktion $\mathcal{G}$ von der Form

$$F(x) \cdot M$$

für eine von x unabhängige Matrix $M = M(t) \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Nach Lemma 3.1.7 ist somit jede Spalte von $\mathcal{G}$ eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\mathcal{L}(y) = 0$, womit die Eigenschaft (b) folgt.

(c) Beachtet man, dass der Randoperator $\mathcal{R}$ linear ist, so rechnet man sofort für festes $t \in I^\circ$ nach, dass

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathcal{G}) &= \mathcal{R}(\chi(\cdot,t)\cdot F(\cdot)\cdot F(t)^{-1}) - \mathcal{R}(F(\cdot)\cdot \mathcal{R}(F)^{-1}\cdot B_1\cdot F(x_1)\cdot F(t)^{-1}) \\ &= B_1\cdot F(x_1)\cdot F(t)^{-1} - \mathcal{R}(F)\cdot \mathcal{R}(F)\cdot B_1\cdot F(x_1)\cdot F(t)^{-1} = 0\end{aligned}$$

gilt, also haben wir auch Eigenschaft (c).

Sei nun $\mathcal{H}$ eine weitere Funktion, die die Eigenschaften (a)-(c). Für festes $t \in I^\circ$ ist dann die Funktion $\mathcal{F}(x) = \mathcal{G}(x,t) - \mathcal{H}(x,t)$ in ganz I, also auch in $x = t$, stetig. Durch Grenzübergang $x \to t$ sieht man, dass die aus (b) resultierende Gleichung $\mathcal{L}(F) = 0$ auch für $x = t$ gilt. Damit ist also jede Spalte von $\mathcal{F}$ eine Lösung des Randwertproblems

$$\mathcal{L}(y) = 0, \quad \mathcal{R}(y) = 0,$$

also folgt mit Satz 6.3.3 direkt $\mathcal{F}(x) = 0$ für alle x und damit die Behauptung.

(iii) Wir verwenden die Tatsache, dass für eine stückweise stetige Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ (d.h. h ist stetig bis auf endlich viele Sprungstellen) aus

$$\int_I h(t)b(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{für alle } b : I \to \mathbb{R} \text{ stetig}$$

folgt, dass $h(t) = 0$ für alle $t \in I$ außer den Sprungstellen von h gilt (vgl. Bemerkung 6.2.7). Den Beweis dieser Behauptung lassen wir als Übung. Die analoge Behauptung gilt dann offenbar genauso auch für komplexwertige Funktionen und auch für stückweise stetige matrixwertige Funktionen $H : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ folgt dann durch Betrachtung der einzelnen Komponenten aus

$$\int_I H(t)b(t)\mathrm{d}t = 0 \quad \text{für alle } b : I \to \mathbb{C}^n \text{ stetig},$$

dass $H(t) = 0$ für alle $t \in I$ außer den Sprungstellen gilt.

Sei nun $\tilde{\mathcal{G}}$ eine weitere Green'sche Funktion, die Eigenschaft (a) erfüllt und setzen wir für festes $x \in I$ $H(t) = \mathcal{G}(x,t) - \tilde{\mathcal{G}}(x,t)$. Da die Lösung des hier untersuchten Randwertproblems eindeutig bestimmt ist, folgt somit

$$\int_I H(t)b(t)\mathrm{d}t = 0,$$

also $H(t) = 0$ außer in den Unstetigkeitsstellen von H. Weil $\mathcal{G}$ und $\tilde{\mathcal{G}}$ aber beide Eigenschaft (a) erfüllen, ist H überall stetig, also folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 6.3.5. *Wir erhalten natürlich die Theorie der Sturm'schen Randwertprobleme aus Satz 6.2.12 als Spezialfall von Satz 6.3.4: Für ein Sturm'sches Randwertproblem definieren wir wie in Beispiel 6.3.2*

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1/p(x) \\ -q(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \frac{\alpha_2}{p(x_0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 & \frac{\beta_2}{p(x_1)} \end{pmatrix}.$$

Für den linearen Operator

$$\mathcal{L}(y) = y' - A(x)y$$

erhalten wir nach Satz 6.3.4 die Green'sche Funktion $\mathcal{G}(x,t) = (\mathcal{G}(x,t)_{ij})_{ij}$. Wir erhalten also für eine stetige Funktion $b : I \to \mathbb{R}$ eine Lösung

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = \int_I \mathcal{G}_{ij}(x,t) \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_I \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{12}(x,t)b(t) \\ \mathcal{G}_{22}(x,t)b(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t.$$

Wie in Beispiel 6.3.2 ist dann $f(x) = f_1(x)$ eine Lösung der Sturm'schen Randwertaufgabe und die zugehörige Green'sche Funktion ist gegeben durch $\mathcal{G}_{12}(x,t)$. Diese ist, wie auch in Satz 6.2.12 gezeigt, nach Satz 6.3.4 auf $I \times I$ stetig. Aus der Identifikation $f_2(x) = p(x)f'(x)$ folgern wir, dass $\mathcal{G}_{22}(x,t) = p(x)\partial_x\mathcal{G}_{1,2}(x,t)$ gilt. Diese Funktion hat macht nach Satz 6.3.4 (ii) (a) einen Spring der Größe 1 auf der Diagonalen $x = t$, was auch mit der Definition der Green'schen Funktion in Satz 6.2.12 konsistent ist.

Wir betrachten zum Abschluss noch ein Beispiel.

Beispiel 6.3.6. Die Auslenkung eines Sprungbettes (dessen Länge wir als 1 annehmen), dass an einer Seite fixiert ist und auf das eine Kraftdichte $f(x)$ einwirkt, wird näherungsweise beschrieben durch das Randwertproblem

$$y'''' = f(x), \quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0.$$

Ein Fundamentalsystem F von Lösungen der homogenen Gleichung ist offenbar gegeben durch $1, x, x^2, x^3$ (und die zugehörigen Ableitungen), also

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6x \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich daher direkt

$$F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & t^2/2 & -t^3/6 \\ 0 & 1 & -t & t^2/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -t/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

. Für die Matrix des Randoperators ergibt sich mit $B_0 = \operatorname{diag}(1,1,0,0)$ und $B_1 = \operatorname{diag}(0,0,1,1)$

$$\mathcal{R}(F) = B_0 \cdot F(0) + B_1 \cdot F(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

welche offenbar invertierbar ist. Also besitzt das Randwertproblem nach Satz 6.3.3 eine eindeutige Lösung.

Setzen wir dies in die Green'sche Funktion in Satz 6.3.4 (i) ein und beachten wir, dass wir uns auf Funktionen $b = (0,0,0,f)$ beschränken können, erhalten wir die Funktion

$$\mathcal{G}(x,t) = \chi(x,t) \cdot \left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}t^3 \right),$$

so dass die Lösung unseres Randwertproblemes gegeben ist durch

$$\int_0^1 \mathcal{G}(x,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

6.4 Nichtlineare Randwertprobleme

In diesem Abschnitt wollen wir noch einige Resultate über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nichtlinearer Randwertprobleme betrachten.

6.4.1 Ein spezieller Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Wir betrachten hier wieder die Situation des Sturm'schen Randwertproblems (vgl. Definition 6.2.4), allerdings in der allgemeineren (homogenen) Form

$$\mathcal{L}(y) = F(x,y), \quad \mathcal{R}_\ell(y) = 0, \mathcal{R}_r(y) = 0. \tag{1}$$

für eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Hierzu haben wir zunächst das folgende Lemma, das noch einmal die Bedeutung der Green'schen Funktion unterstreicht.

Lemma 6.4.1. *Sei $D = I \times \mathbb{R}$ und $F : D \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter seien $f_1, f_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung*

$$\mathcal{L}(y) = 0,$$

so dass $\det \begin{pmatrix} \mathcal{R}_\ell(f_1) & \mathcal{R}_\ell(f_2) \\ \mathcal{R}_r(f_1) & \mathcal{R}_r(f_2) \end{pmatrix} \neq 0$ gilt. Weiter bezeichne $\mathcal{G} : I \times I \to \mathbb{R}$ die zugehörige Green'sche Funktion (siehe Satz 6.2.12).

Dann ist eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann eine zweimal stetig differenzierbare Lösung des Randwertworblemse (1)*, wenn f der Integralgleichung*

$$f(x) = \int_I \mathcal{G}(x,t)F(t,f(t))\mathrm{d}t$$

genügt.

Beweis. Existiert eine Lösung $f : I \to \mathbb{R}$ von (1), so ist diese eine Lösung des linearen Randwertproblems

$$\mathcal{L}(y) = b(x), \quad \mathcal{R}_\ell(y) = \mathcal{R}_r(y) = 0$$

mit $b(x) = F(x, f(x))$. Da F und f beide stetig sind, ist auch b auf I stetig, also folgt direkt aus Satz 6.2.12, dass f der behaupteten Integralgleichung genügt.

Ist umgekehrt $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und eine Lösung der Integralgleichung, so folgt aus den Eigenschaften der Green'schen Funktion in Satz 6.2.12, dass f zweimal stetig differenzierbar ist. Dass f zudem das Randwertproblem (1) löst, rechnet man analog wie im Beweis von Satz 6.2.12 nach (Übung).

q.e.d.

Das obige Lemma 6.4.1 ist natürlich ein direktes Gegenstück zu Lemma 2.1.8, welches wir in Kapitel 2 verwendet haben, um mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes 2.1.7 den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf 2.1.13 für Anfangswertprobleme zu beweisen. Ähnliches werden wir nun für spezielle Randwertprobleme ebenfalls tun.

Satz 6.4.2. *Sei $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die einer globalen Lipschitzbedingung*

$$|F(x,y) - F(x,\tilde{y})| \leq L|y - \tilde{y}|$$

mit einer Lipschitz-Konstante $L < \pi^2 \approx 9.869604...$ genüge. Dann besitzt das Randwertproblem

$$y'' = F(x,y), \quad y(0) = y(1) = 0$$

genau eine Lösung.

Beweis. In Beispiel 6.2.13, genauer in (4) haben wir bereits die Green'sche Funktion für ein sehr ähnliches Randwertproblem bestimmt. In diesem Fall liefert Satz 6.2.12 die Green'sche Funktion

$$\mathcal{G}(x,t) = \begin{cases} t(x-1) & 0 \leq t \leq x \leq 1 \\ x(t-1) & 0 \leq x < t \leq 1. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir, dass

$$\int_0^1 |\mathcal{G}(x,t)\mathrm{d}t = (1-x)\int_0^x t\mathrm{d}t + x\int_x^1 1 - t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x - x^2) \leq \frac{1}{8}.$$

Auf dem Banach-Raum $\mathscr{C}([0,1])$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ (vgl. Definition 2.1.2) finden wir somit, dass der Operator

$$T : \mathscr{C}([0,1]) \to \mathscr{C}([0,1]), \quad f \mapsto \int_0^1 \mathcal{G}(\cdot,t)F(t,f(t))\mathrm{d}t$$

für stetige Funktionen $f,g : [0,1] \to \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\|T(f) - T(g)\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|F(t,f(t)) - F(t,g(t))\|_\infty \leq \frac{L}{8}\|f-g\|$$

erfüllt.

Der Operator T ist also für $L < 8$ eine Kontraktion, also folgt nach dem Banach'schen Fixpunktsatz, 2.1.7 dass er genau einen Fixpunkt besitzt. Nach Lemma 6.4.1 ist dieser Fixpunkt somit die eindeutige Lösung des Randwertproblems. Somit folgt die Behauptung für $L < 8$.

Um die Behauptung für $L < \pi^2$ zu erhalten, betrachten wir den Raum

$$\mathscr{B} := \left\{ f \in \mathscr{C}([0,1]) \ : \ \|f\|_* := \sup_{0<x<1} \frac{|f(x)|}{\sin(\pi x)} < \infty \right\}.$$

Wir bemerken nun, dass der Raum $\mathscr{B}$ mit der modifizierten Norm $\|\cdot\|_*$ ein Banach-Raum ist (Übung). Für $f,g \in \mathscr{B}$ gilt nun die Abschätzung

$$|F(t,f(t)) - F(t,g(t))| \leq L|f(t) - g(t)| \leq L\|f-g\|_* \sin(\pi t),$$

also folgt

$$|(T(f) - T(g))(x)| \leq L\|f-g\|_* \int_0^1 |\mathcal{G}(x,t)| \sin(\pi t)\mathrm{d}t.$$

Setzen wir $w(x) = \int_0^1 |\mathcal{G}(x,t)| \sin(\pi t)\mathrm{d}t$, so folgt wegen $\mathcal{G}(x,t) \leq 0$ für alle $x,t \in [0,1|$ aus Satz 6.2.12, dass w die eindeutige Lösung des Randwertproblems

$$w'' = -\sin(\pi x), \quad w(0) = w(1) = 0$$

ist, also gilt, wie man sofort nachrechnet, $w(x) = \sin(\pi x)/\pi^2$. Wir erhalten also die Abschätzung

$$|(T(f) - T(g))(x)| \leq \frac{L}{\pi^2}\|f-g\|_* \sin(\pi x),$$

also folgt durch Division durch $\sin(\pi x)$

$$\|T(f) - T(g)\|_* \leq \frac{L}{\pi^2}\|f-g\|_*.$$

Auf dem Banach-Raum $\mathscr{B}$ ist der Operator T somit eine Kontraktion, sofern $L < \pi^2$ gilt, also folgt die Behauptung des Satzes genau wie zuvor aus dem Banach'schen Fixpunktsatz 2.1.7 und Lemma 6.4.1.

q.e.d.

Das folgende Beispiel illustriert, dass die Schranke π^2 in Satz 6.4.2 im Allgemeinen nicht verbessert werden kann.

Beispiel 6.4.3. (*i*) Wir betrachten das Randwertproblem

$$y'' = -\pi^2 y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Die rechte Seite ist offenbar stetig und erfüllt eine Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante π^2.

Die Differentialgleichung ist offenbar eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Satz 3.3.5 ist jede Lösung der Differentialgleichung von der Form

$$f(x) = c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x)$$

für $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Aus der Bedingung $y(0) = 0$ ergibt sich sofort $c_1 = 0$, jedoch erfüllt $f(x) = c_2 \sin(\pi x)$ offenbar für alle $c_2 \in \mathbb{R}$ beide Randbedingungen, Das Randwertproblem hat also unendlich viele Lösungen.

(*ii*) Auf ähnliche Weise können wir auch das Randwertproblem

$$y'' = -\pi^2 (y + 1), \quad y(0) = y(1) = 0$$

betrachten. Hier haben wir es mit einem inhomogenen, linearen Differentialgleichung 2. Ordnung zu tun. Die konstante Funktion $f_0(x) = -1$ löst offenbar die Differentialgleichung, also ist nach (*i*) jede Lösung von der Form

$$f(x) = -1 + c_1 \cos(\pi x) + c_2 \sin(\pi x).$$

Aus der Bedingung $y(0) = 0$ ergibt sich somit $c_1 = 1$. In $x = 1$ ergibt sich dann aber

$$f(1) = -1 + \cos(\pi) = -2 \neq 0$$

für jeden beliebigen Wert von c_2. Die zweite Randbedingung kann also nicht erfüllt sein, so dass dieses Randwertproblem keine Lösung besitzt.

6.4.2 Der Fixpunktsatz von Schauder und Anwendungen auf Randwertprobleme

Wir führen zunächst einige Begriffe aus der Funktionalanalysis ein, die wir benötigen, um Fixpunktsatz von Schauder zu formulieren. Zunächst verallgemeinern wir den Begriff der gleichgradigen Stetigkeit (vgl. Definition 2.2.1) von Funktionenfolgen auf beliebige Mengen stetiger Funktionen.

Definition 6.4.4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $D \subseteq \mathscr{C}_n(I)$ eine beliebige Menge stetiger Funktionen $I \to \mathbb{R}^n$ und sei $x_0 \in I$. Weiter bezeichne $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$. Dann heißt D **gleichgradig stetig** in x_0, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I$ mit $|x - x_0| < \delta$ und $f \in D$ folgt, dass $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ gilt. Ist D in jedem Punkt gleichgradig stetig, so nennen wir D **gleichgradig stetig** auf I.

Bemerkung 6.4.5. *Wie man sich ohne Schwierigkeiten überlegt, kann man in der Definition von $\mathscr{C}_n^m(I)$ statt Funktionen $I \to \mathbb{R}^n$ ebenso gut Funktionen $I \to \mathbb{C}^n$ zulassen, ohne dass sich an irgendwelchen der bekannten Aussagen etwas ändert. Im Folgenden werden wir beide Möglichkeiten nicht streng auseinanderhalten.*

Wir wollen zudem die folgenden Begriffen einführen bzw. wiederholen.

Definition 6.4.6. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $D \subseteq X$ eine Teilmenge.

(*i*) D heißt **(folgen-)kompakt**, falls jede Folge $(x_n)_n$ aus Elementen in D eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in D besitzt.

(*ii*) D heißt **relativ kompakt**, falls der Abschluss $\overline{D}$ von D in X kompakt ist.

(*iii*) Eine Abbildung $T : D \to X$ heißt **kompakt** in D, falls ihr Bild $T(D)$ relativ kompakt ist.

(*iv*) D heißt **konvex**, falls für $x, y \in D$ und $\lambda \in [0, 1]$ auch $\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$ gilt.

Im Folgenden benötigen wir das folgende Resultat, welches ein nützliches Kriterium für relative Kompaktheit liefert. Es handelt sich hierbei im Wesentlichen um eine Verallgemeinerung des Satzes von Arzelà-Ascoli 2.2.3.

Satz 6.4.7. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine Menge $D \subseteq \mathscr{C}_n(I)$, wobei wir $\mathscr{C}_n(I)$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ als Banach-Raum verstehen (vgl. Proposition 2.1.6), ist genau dann relativ kompakt, wenn sie beschränkt und gleichgradig stetig ist.*

Beweis.(Skizze) Sei zunächst D relativ kompakt. Man sieht leicht ein, dass D dann auch beschränkt ist. Ansonsten gäbe es nämlich eine unbeschränkte Folge $(f_n)_n$ in D, welche dann keine konvergente Teilfolge enthalten kann, was ein Widerspruch zur Kompaktheit von $\overline{D}$ ist.

Weiter gibt es eine abzählbare, dichte Teilmenge von D, also eine Folge $(f_n)_n$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $D \subseteq \bigcup_n B_\varepsilon(f_n)$. Da D aber relativ kompakt ist, besitzt die Folge $(f_n)_n$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $f^* \in \overline{D}$. Diese ist aber eine Cauchy-Folge, d.h. alle bis auf endlich viele der Folgenglieder f_n in der Teilfolge liegen in $B_\varepsilon(f^*)$. Über ein Diagonalfolgenargument (vgl. Schritt 2 im Beweis zum Satz von Arzelà-Ascoli 2.2.3) erhält man dann, dass man für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge D mit endlich vielen ε-Kugeln überdecken kann.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann gibt es endlich viele $f_1, ..., f_n \in D$, so dass $D \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon/3}(f_i)$ gilt. Da jedes $f \in D$ auf I gleichmäßig stetig ist, existiert für jedes f_i ein $\delta_i > 0$, so dass

$\|f_i(x) - f_i(y)\| < \varepsilon/3$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta_i$ gilt. Sei nun $\delta = \min_i\{\delta_i\}$ und $f \in D$ beliebig und i so, dass $\|f - f_i\|_\infty < \varepsilon/3$ gilt. Für $|x - y| < \delta$ folgt dann

$$|f(x) - f(y)| < |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

Somit ist D wie behauptet gleichgradig stetig.

Die Rückrichtung, dass aus Beschränktheit und gleichgradiger Stetigkeit relative Kompaktheit folgt, ist nichts als eine direkte Umformulierung des Satzes von Arzelà-Ascoli 2.2.3.

q.e.d.

Wir formulieren nun, erneut ohne Beweis, den Fixpunktsatz von Schauder, welchen wir im Anschluss für den Beweis eines Existenzsatzes zur Lösung von Randwertproblemen verwenden wollen.

Satz 6.4.8 (Fixpunktsatz von Schauder). *Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $D \subseteq X$ konvex und abgeschlossen. Ist dann die Abbildung $T : D \to X$ stetig und kompakt, so existiert mindestens ein Fixpunkt von T, also ein $x \in D$ mit $T(x) = x$.*

Bemerkung 6.4.9. *Aus dem Fixpunktsatz von Schauder erhält man einen recht kurzen Beweis des Existenzsatzes von Peano 2.2.7, den wir zuvor mit elementareren Methoden bewiesen haben. Allerdings ist der Beweis für den Schauder'schen Fixpunktsatz selbst recht aufwendig.*

Wir kommen nun zum angekündigten Existenzsatz. Wir verwenden die gleichen Bezeichnungen wie in Abschnitt 6.3, vgl. insbesondere Definition 6.3.1.

Satz 6.4.10 (Existenzsatz). *Sei $I = [x_0, x_1]$ und $A : I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ stetig. Weiter seien $B_0, B_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sowie $\eta \in \mathbb{C}^n$ gegeben und wir setzen für eine Funktion $y : I \to \mathbb{C}^n$ $\mathcal{R}(y) = B_0 y(x_0) + B_1 y(x_1)$.*
Ist $F : I \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ stetig und beschränkt und gibt es ein Fundamentalsystem von Lösungen $f_1, ..., f_n$ der homogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = A(x)y$$

mit $\det \mathcal{R}(f_1, ..., f_n) \neq 0$, *so besitzt das Randwertproblem*

$$y' = A(x)y + F(x, y), \quad \mathcal{R}(y) = \eta \tag{2}$$

mindestens eine Lösung.

Beweis. Es folgt sofort aus Lemma 6.4.1 ist eine Funktion $f \in \mathscr{C}_n^2(I)$ genau dann eine Lösung von (2) ist, wenn f ein stetiger Fixpunkt des Operators

$$T : \mathscr{C}_n(I) \to \mathscr{C}_n(I), \quad g \mapsto \int_I \mathcal{G}(\cdot, t) F(t, g(t)) \mathrm{d}t$$

ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{G} : I \times I \to \mathbb{C}^{n\times n}$ die Green'sche Funktion aus Satz 6.3.4.

Wir zeigen zunächst, dass T eine kompakte Abbildung ist. Nach Voraussetzung ist die Funktion F beschränkt, gleiches gilt für A und $\mathcal{G}$ (da letztere (stückweise) stetige Abbildungen aus den kompakten Mengen I bzw. $I \times I$ sind), sagen wir $\|f\|, \|A\|, \|\mathcal{G}\| \leq c$ für ein $c > 0$.

Sei nun $g \in \mathscr{C}_n(I)$ beliebig und $h = T(g)$. Dann folgt nach Definition von T

$$\|h(x)\| = \|T(g)(x)\| \leq c^2(x_1 - x_0) =: c_1. \tag{3}$$

Weiterhin folgt wegen Satz 6.3.4 (ii) (b), dass h differenzierbar ist und es gilt

$$h' = A(x)h + F(x, g(x)),$$

also folgt

$$\|h'(x)\| \leq cc_1 + c =: c_2. \tag{4}$$

Wir haben also mit (3) gezeigt, dass $\|T(g)\|_\infty \leq c_1$ gilt, die Menge $T(\mathscr{C}_n(I))$ ist also beschränkt, und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung folgt aus (4), dass die Menge $T(\mathscr{C}_n(I))$ gleichgradig stetig ist. Nach Satz 6.4.7 ist $T(\mathscr{C}(I))$ daher relativ kompakt, also T wie behauptet eine kompakte Abbildung.

Wir zeigen nun noch, dass T stetig ist. Auf jedem Kompaktum $I \times K_d$ mit $K_d = \{y \in \mathbb{C}^n \;:\; \|y\| \leq d\}$ und $d > 0$ ist die Funktion F gleichmäßig stetig, also gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für alle $y, \tilde{y} \in K_d$ mit $\|y - \tilde{y}\| < \delta$ und $x \in I$ folgt,dass $\|F(x, y) - F(x, \tilde{y})\| < \varepsilon$ gilt.

Es folgt also für beliebige $g, h \in \mathscr{C}_n(I)$ mit $\|g\|_\infty, \|h\|_\infty \leq d$ und $\|g - h\|_\infty < \delta$ folgt somit

$$\|T(g) - T(h)\|_\infty < \varepsilon c(x_1 - x_0).$$

Da $d > 0$ beliebig war folgt also, in der Tat, dass der Operator T stetig ist.

Der Operator $T : \mathscr{C}_n(I) \to \mathscr{C}_n(I)$ ist also kompakt und stetig und $\mathscr{C}_n(I)$ ist offensichtlich abgeschlossen und konvex, also folgt nach dem Schauder'schen Fixpunktsatz 6.4.8, dass T wenigstens einen Fixpunkt hat. Daher hat auch das Randwertproblem (2) wenigstens eine Lösung.

q.e.d.

Bemerkung 6.4.11. *Im Gegensatz zum Banach'schen Fixpunktsatz 2.1.7, den wir zum Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf verwendet haben, garantiert der Schauder'sche Fixpunktsatz nur die Existenz, aber nicht die Eindeutigkeit eines Fixpunktes, so dass wir in Satz 6.4.10 keine Eindeutigkeit der Lösung erhalten.*

Anhang A

Grundlagen aus der Analysis

In diesem Kapitel geben wir einige grundlegende Sätze und Definitionen an, die aus den Vorlesungen Analysis I und II bekannt sein dürften. Diese Auflistung erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, sie soll lediglich als Unterstützung dienen. Insbesondere geben wir viele Resultate der besseren Lesbarkeit wegen in der einfachsten Form wieder, wenn sie sich auf offenkundliche Weise Verallgemeinern lassen: den Begriff der stetigen Funktion definieren wir etwa nur für reelle Funktionen, da die Verallgemeinerung auf Funktionen in mehrerer Variablen fast genauso lautet. In Appendix A.5 werden die Fälle von einer und von mehreren Variablen getrennt behandelt und auch einige andere Aussagen lassen sich nicht ohne Weiteres verallgemeinern. Beweise und Beispiele für die jeweiligen Begriffe und Resultate findet man in jedem Lehrbuch zur Analysis.

A.1 Folgen

A.1.1 Zahlenfolgen

Definition A.1.1. *(i)* Eine Funktion $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$ nennen wir eine **Folge** reeller bzw. komplexer Zahlen. Wir schreiben diese meist als Tupel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder auch kurz $(a_n)_n$.

(ii) Eine reellwertige Folge $(a_n)_n$ heißt **monoton wachsend** (bzw. fallend), falls für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $a_n \leq a_{n+1}$ (bzw. $a_n \geq a_{n+1}$) erfüllt ist. Gilt sogar jeweils die strikte Ungleichung $a_n < a_{n+1}$ (bzw. $a_n > a_{n+1}$, so nennen wir die Folge **streng** monoton wachsend bzw. fallend.

(iii) Sei $(n_k)_k$ eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und $(a_n)_n$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_k$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_n$.

Definition A.1.2. (*i*) Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq M$ (bzw. $a_n \geq M$), so heißt die Folge $(a_n)_n$ **nach oben** bzw. **nach unten beschränkt**. Ist $(a_n)_n$ sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so nennen wir die Folge **beschränkt**.

(*ii*) Ist $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen, so heißt die Folge **beschränkt**, falls die reelle Folge $(|a_n|)_n$ beschränkt ist.

Definition A.1.3. (*i*) Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **konvergent** gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ (bzw. $a \in \mathbb{C}$), falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(*ii*) Eine Folge $(a_n)_n$ heißt **Cauchy-Folge**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Satz A.1.4. *Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller oder komplexer Zahlen.*

(*i*) *Ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge, so ist sie konvergent.*

(*ii*) *Ist $(a_n)_n$ monoton wachsend und nach oben beschränkt (bzw. monoton fallend und nach unten beschränkt), so ist $(a_n)_n$ konvergent.*

(*iii*) *Ist $(a_n)_n$ konvergent mit Grenzwert a, so konvergiert auch jede Teilfolge $(a_{n_k})_k$ gegen denselben Grenzwert a.*

Satz A.1.5. *Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge reeller oder komplexer Zahlen. Dann existiert eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$.* ***(Satz von Bolzano-Weierstrass)***

A.1.2 Funktionenfolgen

Definition A.1.6. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann nennen wir das Tupel $(f_n)_n$ eine **Funktionenfolge**.

Definition A.1.7. Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$.

(i) Wir sagen, dass die Folge $(f_n)_n$ **punktweise** gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ konvergiert, falls für jedes $x \in I$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_n$ konvergent ist mit Grenzwert $f(x)$, falls also für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $x \in I$ ein $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f.$$

(ii) Wir sagen die Folge $(f_n)_n$ konvergiert **gleichmäßig** gegen eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N,\ x \in I.$$

A.2 Reelle Funktionen

Definition A.2.1. Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f **monoton wachsend** (bzw. **monoton fallend**), falls für $x < y \in I$ stets $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) \geq f(y)$) gilt. Gilt sogar die strikte Ungleichung $f(x) < f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$, so nennen wir f **streng monoton wachsend** bzw. **streng monoton fallend**).

Definition A.2.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei $x_0 \in \overline{D}$ gelte und wir $x_0 = \pm\infty$ zulassen.

(i) Falls für jede Folge $(x_n)_n$ aus $D \setminus \{x_0\}$, die gegen x_0 konvergiert, die Folge $(f(x_n))_n$ gegen denselben Grenzwert $y \in \mathbb{R}$ konvergiert, so sagen wir der **Grenzwert** von $f(x)$ für $x \to x_0$ ist y, in Zeichen

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = y.$$

(*ii*) Gilt für jede Folge $(x_n)_n$ aus $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$) für alle n, die gegen x_0 konvergiert, dass die Folge $(f(x_n))_n$ gegen denselben Grenzwert $y \in \mathbb{R}$ konvergiert, so nennen wir y den **linksseitigen** (bzw. **rechtsseitigen**) Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$, in Zeichen

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x) = y.$$

A.3 Topologische Grundbegriffe

Definition A.3.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Menge.

(*i*) Die Menge D heißt **offen**, falls zu jedem $x_0 \in D$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass die **ε-Umgebung**

$$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - x_0| < \varepsilon\}$$

ganz in D enthalten ist, $B_\varepsilon(x_0) \subseteq D$.

(*ii*) Die Menge D heißt **abgeschlossen**, falls $\mathbb{R} \setminus D$ offen ist, falls also zu jedem $x_0 \notin D$ ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $B_\varepsilon(x_0) \cap D = \emptyset$ gilt.

(*iii*) Existiert ein $M > 0$, so dass $|x| \leq M$ für alle $x \in D$ gilt, so nennen wir die Menge D **beschränkt**.

(*iv*) Die Menge D heißt **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist.

Definition A.3.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

(*i*) Sei $x \in D$. Existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $B_\varepsilon(x) \subseteq D$ gilt, so nennen wir x einen **inneren Punkt** von D. Die Menge aller inneren Punkte von D bezeichnen wir mit D°.

(*ii*) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wir nennen x einen **Randpunkt** von D, falls für alle $\varepsilon > 0$ sowohl $B_\varepsilon(x) \cap D \neq \emptyset$ als auch $B_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \setminus D) \neq \emptyset$ gilt. Man beachte, dass ein Randpunkt von D nicht selbst in D zu liegen braucht. Die Menge ∂D aller Randpunkte von D nennen wir den **Rand** von D und die Vereinigung $D \cup \partial D =: \overline{D}$ nennen wir den **Abschluss** von D.

(*iii*) Sei $x \in D$. Existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass der Schnitt $B_\varepsilon(x) \cap D$ nur endlich viele Elemente hat, so nennen wir x einen **isolierten Punkt** von D.

Definition A.3.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $T \subseteq D$. Wir nennen T **dicht** in D, falls $\overline{T} = D$ gilt oder äquivalent, falls es zu jedem $x \in D$ eine Folge $(x_n)_n$ aus T gibt, die gegen x konvergiert.

Satz A.3.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.*

(i) Die Menge D ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} x_n \in D$, sofern der Grenzwert existiert.

(ii) Die Menge D ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_n$ aus D eine konvergente Teilfolge besitzt. ***(Folgenkompaktheit)***

(iii) Die Menge D ist genau dann kompakt, wenn für jede Familie von offenen Mengen A_α, $\alpha \in I$ eine beliebige Indexmenge, die D überdecken, also

$$D \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha,$$

endlich viele Mengen $A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_k}$, $\alpha_j \in I$, existieren, so dass schon

$$D \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} A_{\alpha_j}$$

gilt. Kurz gesagt enthält jede offene Überdeckung von D eine endliche Teilüberdeckung. ***(Satz von Heine-Borel)***

Definition A.3.5. (*i*) Eine Menge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt **zusammenhängend**, falls folgende Eigenschaft erfüllt ist: Sind A, B abgeschlossene Mengen mit $D \subseteq A \cup B$, so folgt stets $A \cap B \neq \emptyset$.

(*ii*) Eine offene, zusammenhängende Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gebiet**.

A.4 Stetigkeit

Definition A.4.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **stetig** im Punkt $x_0 \in D$, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Ist f in jedem Punkt von D stetig, so sagen wir f ist stetig auf D.

Definition A.4.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f **gleichmäßig stetig** auf D, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so dass gilt

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in D \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Satz A.4.3. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, sowie $x_0 \in D$. Die Funktion f ist genau dann stetig in x_0, wenn für jede konvergente Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ die Folge $(f(x_n))_n$ gegen den Grenzwert $f(x_0)$ konvergiert.* ***(Folgenstetigkeit)***

Satz A.4.4. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine kompakte Menge und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D. Dann gilt:*

(i) Die Funktion f ist auf D gleichmäßig stetig.

(ii) Die Funktion f nimmt in D ihr Minimum und ihr Maximum an, d.h. es existieren $x_{min}, x_{max} \in D$, so dass für alle $x \in D$ die Ungleichung

$$f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

erfüllt ist.

Satz A.4.5. *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.*

(i) Sei $f(a) \leq f(b)$ (bzw. $f(a) \geq f(b)$). Dann existiert für jedes $y \in [f(a), f(b)]$ (bzw. $y \in [f(b), f(a)]$) ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$, also nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an. ***(Zwischenwertsatz)***

(ii) Gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$, haben $f(a)$ und $f(b)$ also verschiedene Vorzeichen, so hat f im Intervall (a, b) eine Nullstelle, es existiert also ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$. ***(Nullstellensatz von Bolzano)***

Satz A.4.6. *Sei $(f_n)_n$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f konvergiert. Dann ist auch die Funktion f stetig.*

A.5 Differential- und Integralrechnung

A.5.1 Funktionen in einer Variablen

Definition A.5.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(i) Sei $x_0 \in D$. Wir nennen f **differenzierbar** in x_0, falls der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Diesen nennen wir auch den **Differentialquotienten** in x_0 und bezeichnen den Grenzwert mit $f'(x_0)$. Ist f in jedem Punkt von D differenzierbar, so sagen wir, dass f auf D differenzierbar ist. Die Funktion $f' : D \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ nennen wir dann die **Ableitung** von f. Ist f' als Funktion auf D stetig, so heißt f **stetig differenzierbar**.

(ii) Sei $x_0 \in \overline{D}$. Existiert der einseitige Grenzwert

$$\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

bzw.

$$\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

so nennen wir f in x_0 **einseitig differenzierbar**.

Lemma A.5.2. *Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(i) *$f + \alpha g$ ist differenzierbar und es gilt $(f + \alpha g)' = f' + \alpha g'$.*

(ii) *fg ist differenzierbar und es gilt $(fg)' = f'g + fg'$* ***(Leibniz-Regel)****.*

(iii) *Ist $g(I) \subseteq I$, so ist $f \circ g$ differenzierbar und es gilt $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$* ***(Kettenregel)****.*

Satz A.5.3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $x_0 \in (a, b)$, so dass gilt*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Satz A.5.4 (Monotoniekriterium). *Seien $a < b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar.*

(i) Die Funktion f ist auf $[a, b]$ genau dann monoton wachsend (bzw. monoton fallend), wenn für alle $x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x_0) \leq 0$) gilt.

(ii) Gilt $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$), so folgt, dass f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend ist). Die umgekehrte Folgerung ist im Allgemeinen allerdings falsch.

Lemma A.5.5. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $x_0 \in I$. Weiter sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und auf $I \setminus \{x_0\}$ differenzierbar. Existieren die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ und stimmen diese überein, so ist f auch in x_0 differenzierbar.*

Definition A.5.6. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $a =: x_0 < x_1 < ... < x_N := b$ beliebige Stützstellen im Intervall $[a, b]$. Dann nennen wir

$$s(f, x_0, x_1, ..., x_N) := \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

die zu den Stützstellen $x_0, x_1, ..., x_N$ gehörige **Untersumme** von f und

$$S(f, x_0, x_1, ..., x_N) := \sum_{i=1}^{N} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

die entsprechende **Obersumme**. Existieren sowohl das Infimum der Untersummen über alle Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$ und entsprechend auch das Supremum der Obersummen und stimmen diese überein, so nennen wir die Funktion f auf $[a, b]$ **(Riemann/Darboux)-integrierbar** und bezeichnen den Wert des Infimums bzw. Supremums mit

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

Satz A.5.7. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*

(i) Dann existiert für jedes $x \in [a, b]$ das Integral $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$. Weiterhin ist die Funktion

$$F : [a, b] \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

auf (a, b) stetig differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = f(x).$$

(ii) Für jede Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x)$ gilt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Lemma A.5.8. *Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:*

(i) $\int_a^b f(x) + \alpha g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \alpha \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(ii) $\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$ ***(partielle Integraltion)***.

(iii) Ist $g([a, b]) \subseteq [a, b]$, so gilt $\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\mathrm{d}y$ ***(Substitutionsregel)***.

Satz A.5.9. *Sei $(f_n)_n$ eine Folge Riemann-integrierbarer Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$, die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist auch f Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

A.5.2 Funktionen in mehreren Veränderlichen

Definition A.5.10. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a = (a_1, ..., a_n)^{tr} \in U$.

(i) Existiert für ein $i \in \{1, ..., n\}$ der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{h},$$

so nennen wir f in x_i **partiell differenzierbar** und bezeichnen den obigen Grenzwert mit

$$\partial_{x_i} f(a).$$

(ii) Existiert eine lineare Funktion $\Delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - \Delta(h)|}{h} = 0$$

gilt, so heißt f in a **total differenzierbar.**

Satz A.5.11 (Satz von Schwarz). *Sei für eine offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : U \to \mathbb{R}$ in allen Variablen zweimal partiell diffenzierbar und für alle $1 \leq i, j \leq n$ sei $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f : U \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auf U total differenzierbar und es gilt*

$$\partial_{x_i} \partial_{x_j} f = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f.$$

A.6 Potenzreihen und Taylor-Entwicklungen

Satz A.6.1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$.*

(i) *Dann gilt für alle $x \in [a, b]$*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(f, x_0; x),$$

mit $R_n(f, x_0; x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$.

(ii) ***(Lagrnage-Restglied)*** *Für jedes $x \in [a, b]$ existiert ein ξ zwischen x_0 und x mit*

$$R_n(f, x_0; x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Definition A.6.2.

Für eine Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq 0}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt der Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

eine **Potenzreihe** mit **Entwicklungspunkt** x_0.

Satz A.6.3 (Formel von Cauchy-Hadamard). *Sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *eine Potenzreihe und definiere*

$$\rho := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

mit der Vereinbarung, dass wir hier $1/0 := \infty$ *und* $1/\infty := 0$ *auffassen.*

(*i*) *Dann konvergiert die Potenzreihe für alle* $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ *absolut gleichmäßig und definiert dort eine unendlich oft differenzierbare Funktion* f. *Es gilt dann*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n,$$

wobei diese Potenzreihe auf dem gleichen Intervall absolut gleichmäßig konvergiert.

(*ii*) *Für* $|x - x_0| > \rho$ *ist die Reihe divergent, und für* $|x - x_0| = \rho$ *kann keine allgemeine Aussage getroffen werden.*

Satz A.6.4 (Cauchy-Produkt). *Seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *zwei Potenzreihen mit demselben Entwicklungspunkt* x_0 *und Konvergenzradien* ρ_1 *und* ρ_2. *Dann ist auch das Produkt der so definierten Funktionen als Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *darstellbar, wobei*

$$c_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m}$$

gilt, mit Konvergenzradius mindestens $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ *darstellbar.*

Satz A.6.5 (Identitätssatz). *Seien* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *und* $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ *zwei Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius und innerhalb des Konvergenzradius gelte* $f(x) = g(x)$ *auf einer nicht-diskreten Teilmenge des Konvergenzintervalls. Dann gilt* $a_n = b_n$ *für alle* n *und* $f(x) = g(x)$ *für alle* x *im Konvergenzintervall. Insbesondere ist die Potenzreihen-Entwicklung einer Funktion, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt.*

Anhang B

Grundlagen aus der linearen Algebra

Neben Vorkenntnissen aus der Analysis erfordert das Studium der Differentialgleichungen auch einige Kenntnisse im Bereich Lineare Algebra. Einige grundlegende Definitionen und Sätze werden daher in diesem Kapitel zum Nachschlagen angegeben, wobei v.a. im Abschnitt Appendix B.2 ein eher pragmatischer Ansatz gewählt wird. Weitere Details, Beispiele, Beweise, etc. finden sich in jedem Lehrbuch zur Linearen Algebra bzw. den entsprechenden Vorlesungsskripten.

B.1 Vektorräume, lineare Abbildungen und Matrizen

Definition B.1.1. Sei K ein Körper (etwa $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$). Eine nicht-leere Menge V mit Abbildungen

$$+ : V \times V \to V,\ (v, w) \mapsto v + w \quad \textbf{(Summe)}$$

und

$$\cdot : K \times V \to V,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v \quad \textbf{(skalare Multiplikation)}$$

heißt ein **Vektorraum** über K oder **K-Vektorraum**, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(*i*) Für alle $u, v, w \in V$ gilt $u + (v + w) = (u + v) + w$.

(*ii*) Für alle $v, w \in V$ gilt $v + w = w + v$.

(*iii*) Es existiert ein Element $0 \in V$ mit $0 + v = v$ für alle $v \in V$.

(*iv*) Zu jedem $v \in V$ existiert ein Element $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$.

(*v*) Für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$ gilt $\alpha v + \alpha w = \alpha(v + w)$.

(*vi*) Für alle $v \in V$ und $\alpha, \beta \in K$ gilt $\alpha v + \beta v = (\alpha + \beta)v$ und $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$.

(*vii*) Es gilt $1v = v$ für alle $v \in V$.

Eine Teilmenge $U \subset V$ eines Vektorraum heißt ein **Untervektorraum** von V, falls $0 \in U$ gilt und für alle $u, v \in U$ und $\alpha \in K$ auch $u + v \in U$ und $\alpha u \in U$ gilt.

Definition B.1.2. Seien V, W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine Abbildung. Wir nennen φ **linear** oder einen **Homomorphismus** von Vektorräumen, falls für alle $v, w \in V$ und $\alpha \in K$ gilt, dass

$$\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w) \quad \text{und} \quad \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v).$$

Ist $V = W$, so nennen wir φ auch einen **Endomorphismus** von V. Ist $\varphi : V \to W$ bijektiv, so nennen wir φ einen **Isomorphismus** von Vektorräumen.

Lemma B.1.3. *Seien V, W K-Vektorräume.*

(i) Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ ist genau dann linear, wenn für alle $u, v \in V$ und $\alpha \in K$ gilt

$$\varphi(u + \alpha v) = \varphi(u) + \alpha\varphi(v).$$

(ii) Für eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ gilt $\varphi(0) = 0$.

(iii) Sei $\varphi : V \to W$ linear. Dann ist

$$\mathrm{Kern}(\varphi) := \{v \in V \ : \ \varphi(v) = 0\}$$

ein Unterraum von V und

$$\mathrm{Bild}(\varphi) := \{w \in W \ : \ \exists v \in V \text{ mit } \varphi(v) = w\}$$

ein Unterraum von W.

Definition B.1.4. Sei V ein K-Vektorraum.

(i) Eine endliche Teilmenge $\{v_1, ..., v_n\} \subset V$ heißt **linear abhängig**, falls es $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$, nicht alle 0, gibt, so dass

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0$$

gilt. Ansonsten heißt die Menge **linear unabhängig**.

(ii) Eine unendliche Menge $T \subseteq V$ heißt **linear unabhängig**, wenn jede ihrer endlichen Teilmengen linear unabhängig ist. Ansonsten heißt sie **linear abhängig**.

(iii) Eine Menge $B \subseteq V$ heißt ein **Erzeugendensystem von** V, falls für jedes $v \in V$ endlich viele Elemente $b_1, ..., b_n \in B$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ existieren, so dass

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$$

gilt.

(iv) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt eine **Basis** von V.

Satz B.1.5. *Jeder K-Vektorraum V besitzt eine Basis B.*[a] *Für jedes $v \in V$ gibt es dann eindeutig bestimmte $b_1, ..., b_n \in B$ und $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ mit*

$$v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n.$$

Gibt es eine endliche Basis $B = \{b_1, ..., b_n\}$, so hat jede Basis von V genau n Elemente und wir nennen n die ***Dimension*** *von V. Ansonsten ist jede Basis unendlich und wir nennen wir V* ***unendlichdimensional****.*

[a] Gibt es ein endliches Erzeugendensystem von V, so ist dies ein Resultat der linearen Algebra, ansonsten benötigt man hier das Auswahlaxiom bzw. das Lemma von Zorn.

Satz B.1.6. *Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume mit Basen $B = \{b_1, ..., b_n\}$ bzw. $C = \{c_1, ..., c_m\}$ und $\varphi : V \to W$ linear. Dann definiert die Abbildung definiert durch*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

einen Isomorphismus $V \cong K^n$ (bzw. analog $W \cong K^m$). Die Abbildung φ wird bei dieser Identifikation durch die Abbildung

$$K^n \to K^m,\ v \mapsto Av.$$

Hierbei ist $A \in K^{m \times n}$ die Matrix mit Einträgen a_{ij} wobei a_{ij} definiert ist durch

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i, \quad j = 1, ..., n.$$

Die Matrix A heißt dann die ***Abbildungsmatrix*** *von φ bezüglich der Basen B und C.*

Definition B.1.7. Sei $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix.

(*i*) A heißt **invertierbar**, falls eine Matrix $A^{-1} \in K^{n\times n}$ existiert mit

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Hierbei bezeichnet

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

die $n \times n$-**Einheitsmatrix**.

(*ii*) Die Menge aller invertierbaren Matrizen in $K^{n\times n}$ heißt die **generelle lineare Gruppe** vom Grad n über K,

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in K^{n\times n} \ : \ A \text{ invertierbar}\}.$$

Lemma B.1.8. (*i*) *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spalten linear unabhängig sind.*

(*ii*) *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung*

$$\alpha : K^n \to K^n,\ v \mapsto Av$$

ein Automorphismus ist.

B.2 Determinanten

Definition B.2.1. Die **Determinante** einer quadratischen Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit Einträgen a_{ij} ist induktiv definitert über den **Laplace'schen Entwicklungssatz**: Für $n = 1$ gilt

$$\det A = a_{1,1}$$

und für $n > 1$ gilt für jedes fest gewählte $i \in \{1, ..., n\}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij},$$

wobei $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix ist, welche durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A entsteht.

Satz B.2.2 (Leibniz-Formel). *Sei $A \in K^{n\times n}$ mit Einträgen a_{ij}. Weiter bezeichne S_n die **symmetrische Gruppe** vom Grad n, also die Gruppe aller bijektiven Abbildungen oder Permutationen σ der Menge $\{1, ..., n\}$ und $\operatorname{sign}(\sigma)$ bezeichne das **Signum** der Permutation: Jede Permutation σ lässt sich als Produkt von **Transpositionen**, also Vertauschungen von genau zwei Elementen, schreiben. Ist die Anzahl der dazu benötigten Transpositionen gerade, so setzen wir $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$, sonst -1. Dann gilt*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}.$$

Proposition B.2.3. *Es gelten die folgenden Rechenregeln für Determinanten.*

(i) *Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in K^{2\times 2}$ gilt*

$$\det A = ad - bc.$$

(ii) *Für $A \in K^{n\times n}$ gilt*

$$\det A = \det A^{tr},$$

*wobei A^{tr} die **Transponierte** von A bezeichnet, d.h. der (i, j)-te Eintrag von A^{tr} ist der (j, i)-te Eintrag von A.*

(iii) *Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt*

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

(iv) *Ist $A \in K^{n\times n}$ eine obere (bzw. untere) Dreiecksmatrix, gilt also für die Einträge von A $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$), so gilt*

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(v) *Für $A \in K^{n\times n}, B \in K^{n\times m}$ und $D \in K^{m\times m}$ gilt*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D.$$

Satz B.2.4 (Cramer'sche Regel). *Sei $A \in K^{n\times n}$ und $b \in K^n$ beliebig.*

(i) *A ist genau dann invertierbar, wenn* $\det A \neq 0$ *gilt.*

(ii) *Ist A invertierbar, so ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystmes $Ax = b$ gegeben durch $x = (x_1, ..., x_n)^{tr}$ mit*

$$x_i = \frac{\det \widehat{A}_{i,b}}{\det A},$$

wobei $\widehat{A}_{i,b} \in K^{n\times n}$ die Matrix ist, die aus A entsteht, indem man die i-te Spalte von A durch b ersetzt.

(iii) *Ist A invertierbar, so gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A,$$

wobei $\operatorname{adj} A$ *die (klassische)* ***Adjungierte*** *von A ist, d.h. der (i, j)-te Eintrag in* $\operatorname{adj} A$ *ist gegeben durch* $(-1)^{i+j} \det A_{ji}$ *mit A_{ij} wie in Definition B.2.1.*

B.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition B.3.1. Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann heißt $v \in K^n \setminus \{0\}$ ein **Eigenvektor** von A zum **Eigenwert** $\lambda \in K$, falls

$$Av = \lambda v$$

gilt.

Definition B.3.2. Sei $A \in K^{n\times n}$.

(i) Das Polynom $\chi_A(X) := \det(XI_n - A) \in K[X]$ nennen wir das **charakteristische Polynom** von A.

(ii) Das **Minimalpolynom** von A ist das normierte Polynom $\mu_A \in K[X] \setminus \{0\}$ vom kleinstmöglichen Grad, so dass $\mu_A(A) = 0$ gilt.

Satz B.3.3. *Sei $A \in K^{n\times n}$.*

1. *$\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\chi_A(\lambda) = 0$ gilt.*

2. *$\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von A, wenn $\mu_A(\lambda) = 0$ gilt.*

3. *$v \in K^n \setminus \{0\}$ ist genau dann ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda \in K$, wenn $v \in \mathrm{Kern}(A - \lambda I_n) \setminus \{0\}$ gilt. In diesem Fall nennen wir $\mathrm{Kern}(A - \lambda I_n)$ den* ***Eigenraum*** *von A zum Eigenwert λ.*

Definition B.3.4. 1. Zwei Matrizen $A, B \in K^{n \times n}$ heißen **ähnlich** bzw. **konjugiert**, wenn eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert, so dass

$$TAT^{-1} = B$$

gilt.

2. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn A konjugiert zu einer Diagonalmatrix ist.

Proposition B.3.5. *Seien $A, B \in K^{n \times n}$ konjugiert zueinander. Dann gilt:*

(i) $\mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(B)$,

(ii) $\det A = \det B$,

(iii) $\chi_A(X) = \chi_B(X)$,

(iv) $\mu_A(X) = \mu_B(X)$.

Insbesondere haben A und B dieselben Eigenwerte.

Proposition B.3.6. *Sei $A \in K^{n \times n}$.*

(i) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis von K^n gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Die Einträge der Diagonalmatrix sind dann die zugehörigen Eigenwerte von A.

(ii) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mu_A(X)$ in verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

(iii) Ist $K = \mathbb{R}$ und A symmetrisch (also $A = A^{tr}$), so ist A diagonalisierbar. In diesem Fall kann man die Transformationsmatrix T so wählen, dass

*$T^{-1} = T^{tr}$ gilt, d.h. T ist eine **orthogonale** Matrix. **(Hauptachsentransformation)**.*

Definition B.3.7. Für $\lambda \in K$ und $m \in \mathbb{N}$ definieren wir den $m \times m$-**Jordan-Block** $J_m(\lambda) \in K^{m\times m}$ zu λ als

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Satz B.3.8 (Jordan-Normalform). *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Wir schreiben*

$$\chi_A(X) = (X - \lambda_1)^{a_1} \cdots (X - \lambda_k)^{a_k},$$

*wobei $\lambda_1, ..., \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte mit **algebraischen Vielfachheiten** $a_1, ..., a_k$ von A seien. Weiter sei $g_i := \dim \mathrm{Kern}(A - \lambda_i I_n)$ die Dimension des Eigenraums von A zum Eigenwert λ_i, genannt seine **geometrische Vielfachheit**. Dann gilt:*

(i) Zu jedem Eigenwert λ_i von A existieren Jordan-Blöcke $J_{m_{i,1}}(\lambda_i), ..., J_{m_{i,g_i}}(\lambda_i)$ mit $m_1 \leq ... \leq m_{i,g_i}$ und $m_{i,1} + ... + m_{i,g_i} = a_i$, so dass A ähnlich ist zur Blockdiagonalmatrix

$$\mathrm{diag}\left(J_{m_{1,1}}(\lambda_1), ..., J_{m_{1,g_1}}(\lambda_1), J_{m_{2,1}}(\lambda_2), ..., J_{m_{k,g_k}}(\lambda_k)\right).$$

*Diese Blockdiagonalmatrix nennt man die **Jordan-Normalform** von A.*

(ii) Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sind genau dann zueinander ähnlich, wenn Sie zur selben Jordan-Normalform ähnlich sind.

Proposition B.3.9. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und die weiteren Bezeichnungen wie in Satz B.3.8.*

(i) *Für* $\ell \geq 0$ *sei* $d_\ell(\lambda_i) := \dim \mathrm{Kern}(A - \lambda_i I_n)^\ell$ *die Dimension des* ***Hauptraumes*** *der Stufe* ℓ *zum Eigenwert* λ_i. *Für* $m \geq 1$ *ist die Anzahl der Jordanblöcke* $J_m(\lambda_i)$ *der Größe* $m \times m$ *in der Jordan-Normalform von* A *genau*

$$2d_m(\lambda_i) - d_{m+1}(\lambda) - d_{m-1}(\lambda).$$

(ii) *Ist* $m \geq 1$ *maximal mit* $(X - \lambda_i)^m \mid \mu_A(X)$, *so hat der größte Jordan-Block zum Eigenwert* λ_i *in der Jordan-Normalform von* A *die Größe* $m \times m$.