

Mathematik für Lehramtsstudierende I

Skript zur Vorlesung

PD Dr. Michael H. Mertens

Wintersemester 2022/23

Inhaltsverzeichnis

I	Grundlagen	9
1	Aussagenlogik und Mengenlehre	11
1.1	Aussagen und Wahrheitstafeln	11
1.2	(Naive) Mengenlehre	16
1.3	Relationen	22
1.4	Abbildungen	25
2	Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion	35
2.1	Konstruktion der natürlichen Zahlen	35
2.2	Das Prinzip der vollständigen Induktion	37
3	Die ganzen und rationalen Zahlen	47
3.1	Die ganzen Zahlen	47
3.2	Die rationalen Zahlen	49
4	Die reellen Zahlen	53
4.1	Irrationale Zahlen	53
4.2	Angeordnete Körper	55
4.3	Konstruktion und Eigenschaften der reellen Zahlen	61
4.4	Abzählbarkeit	70
5	Die komplexen Zahlen	75
5.1	Die komplexe Zahlenebene	75
5.2	Polarkoordinaten	81
5.3	Polynomgleichungen	85
II	Analysis	89
6	Folgen und Reihen	91
6.1	Konvergenz von Folgen	91
6.1.1	Allgemeines zu komplexen Folgen	91
6.1.2	Spezielles für reelle Folgen	102
6.2	Reihen	108

6.2.1	Konvergenzkriterien	108
6.2.2	Absolute Konvergenz	114
6.2.3	Die Exponentialreihe	119
7	Stetige Funktionen	123
7.1	Definitionen und Beispiele	123
7.2	Eigenschaften stetiger Funktionen	129
8	Differentialrechnung	135
8.1	Ableitungsregeln	135
8.2	Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung	145
8.3	Die Exponentialfunktion	153
9	Das RIEMANN-Integral	161
9.1	Ober- und Untersummen	161
9.2	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	168
9.3	Integrationstechniken	174
III	Lineare Algebra	181
10	Lineare Gleichungssysteme	183
10.1	Lineare Gleichungssysteme und Matrizen	183
10.2	Der GAUSS-Algorithmus	187
11	Vektorräume	199
11.1	Vektorräume und Teilräume	199
11.2	Dimension und Basis	205
11.3	Summen von Vektorräumen	215
12	Lineare Abbildungen	219
12.1	Definition und Eigenschaften	219
12.2	Abbildungsmatrizen	225
12.3	Matrixmultiplikation	229
A	Das Griechische Alphabet	239
B	Ableitungen einiger wichtiger Funktionen	241
	Stichwortverzeichnis	243
	Symbolverzeichnis	247
	Namensverzeichnis	251

Vorwort

Das Ziel des Vorlesungszyklus Mathematik für Lehramtsstudierende ist es, angehenden Lehrer*innen für das Fach Mathematik die Grundlagen dieses Faches zu vermitteln. Der Vorlesungsstoff orientiert sich in etwa an den Vorlesungen Analysis I und II sowie Lineare Algebra I und II, die von den Fachmathematiker*innen in den ersten zwei Semestern ihres Studiums gehört werden, ist allerdings im Vergleich etwas reduziert.

Das vielleicht wichtigste Ziel dieser Vorlesung ist es, Sie an den im Vergleich zur Schule doch etwas strengeren Aufbau der Mathematik zu gewöhnen: Während in der Schule oft das „Wie?“ im Vordergrund bei der Lösung mathematischer Aufgaben steht und auf ausführliche Herleitungen und v.a. formale Beweise eher verzichtet wird, sollen insbesondere in dieser Vorlesung möglichst alle Aussagen formal bewiesen werden. Dies ist das Ziel der gesamten Mathematik: Aussagen über gewisse Objekte aus bekannten Aussagen herzuleiten und über jeden Zweifel erhaben unwiderlegbar logisch zu beweisen. Dieser Paradigmenwechsel führt gerade in den Anfangssemestern eines Mathematikstudiums, in welcher Form auch immer, leider oft zu Problemen, bei deren Bewältigung diese Vorlesung helfen soll.

Ein zweites, ebenfalls sehr wichtiges Ziel dieser Vorlesung ist es, Sie fachlich auch auf weiterführende Vorlesungen in der Mathematik vorzubereiten, die Sie im Laufe Ihres Studiums belegen müssen bzw. können, wie etwa Algebra, Differentialgeometrie, Differentialgleichungen oder Funktionentheorie, um nur einige zu nennen. Während zumindest in der Mathematik für Lehramtsstudierende I einige Themen behandelt werden, die Sie zumindest in Grundzügen aus der Schule kennen (etwa Differential- und Integralrechnung oder Vektorrechnung), geht es dort um Themen, die im Mathematikunterricht an der Schule üblicherweise nicht mehr behandelt werden. Dennoch ist es wichtig, sich als angehende Lehrperson auch tiefer in die Materie einzuarbeiten, getreu dem Satz

„Es ist sehr traurig, wenn ein Lehrer nur das weiß, was er seinen Schülern beibringen soll.“¹

So wird es z.B. im Laufe Ihrer Karriere möglicherweise vorkommen, dass Sie einige sehr mathematikbegeisterte und begabte Schüler*innen unterrichten, die sich, z.B. im Rahmen einer Facharbeit oder einer AG oder dergleichen, für Stoff interessieren, der über den üblichen Schulstoff hinausgeht. Um solche Schüler*innen vernünftig fördern zu können, ist es nötig und wichtig, dass zukünftige Lehrer*innen möglichst umfassend ausgebildet sind. Das gilt übrigens in jedem Fach, nicht nur in der Mathematik.

¹Dasselbe gilt selbstverständlich auch für Lehrerinnen bzw. Schülerinnen.

In der Vorlesung wird zunächst an sich überhaupt kein konkreter Stoff aus der Schule vorausgesetzt (höchstens in einigen Beispielen wird davon ausgegangen werden, dass Sie eine ungefähre Vorstellung davon haben, was etwa reelle Zahlen sind und wie man mit ihnen umgeht).

Im ersten Teil der Vorlesung werden wir zunächst einige Grundlagen erarbeiten, wie die Sprache der Aussagenlogik und die (naive) Mengenlehre, sowie einige fundamentale Grundbegriffe, die Ihnen im gesamten Studium immer wieder in irgendeiner Form begegnen werden. Davon ausgehend werden dann die natürlichen Zahlen zusammen mit dem wichtigen Konzept der vollständigen Induktion eingeführt und daraus die Ihnen bekannten Zahlbereiche (ganze, rationale, und reelle Zahlen) eingeführt. Vielleicht neu für Sie wird dann eine weitere Zahlbereichserweiterung, die der komplexen Zahlen, sein, die Ihnen ebenfalls im gesamten Studium immer wieder begegnen wird.

Im zweiten Teil behandeln wir das Themenfeld der Analysis, einem großen Teilbereich der Mathematik, der sich etwa mit Funktionen und ihren Eigenschaften befasst. Gewissermaßen als Vorstufe befassen wir uns hierbei zunächst mit Zahlenfolgen. Anschaulich ist vermutlich den meisten klar, dass die Zahlen

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

immer kleiner werden und der 0 immer näher kommen, wenn man n „unendlich groß“ macht. Man sagt, dass die Folge gegen 0 **konvergiert**. Für dieses Beispiel mag diese Sichtweise einleuchten, um allerdings formal korrekt und v.a. sinnvoll mit Folgen arbeiten zu können, müssen wir eine gute Definition für Konvergenz von Folgen finden. Diese werden wir danach verwenden, um uns mit reellen Funktionen zu beschäftigen, insbesondere führen wir den Begriff der Stetigkeit ein. Manchmal wird dies in der Schule beschrieben als „man kann den Funktionsgraphen durchzeichnen, ohne den Bleistift abzusetzen“. Es dürfte klar sein, dass dies keine vernünftige, mathematische Definition ist, sondern höchstens eine Anschauung, die, wie wir sehen werden, dem Begriff auch nicht völlig gerecht wird. Zum Abschluss des analytischen Teils der Vorlesung befassen wir uns mit der Differential- und Integralrechnung und führen insbesondere den Begriff der Ableitung und des Integrals formal ein und leiten die Ihnen vielfach bekannten Sätze wie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie die bekannten Ableitungs- und Integrationsregeln formal her.

Im dritten Teil der Vorlesung beschäftigen wir uns dann mit einigen Grundlagen aus der linearen Algebra, einem der absoluten Grundlagengebiete der Mathematik. Es gibt so gut wie keine weiterführende Mathematikvorlesung, die ohne lineare Algebra auskommt. Ausgehend von linearen Gleichungssystemen, die Ihnen ebenfalls aus der Schule bekannt sein dürften, führen wir den abstrakten Begriff des Vektorraumes ein und kommen zu einigen wichtigen Strukturaussagen. Zum Abschluss beschäftigen wir uns noch mit sogenannten linearen Abbildungen, also Abbildungen zwischen Vektorräumen, die die Vektorraumstruktur respektieren, einem Prototyp für diverse Konzepte, die Ihnen in der Vorlesung Algebra und den darauf aufbauenden Vorlesungen immer wieder unterkommen werden.

Diese Vorlesungsnotizen werden parallel zur Vorlesung angefertigt und wöchentlich aktualisiert. Es sollte als Ressource zum Nachschlagen und Nachbereiten der Vorlesungsinhalte ausreichen, allerdings kann es auch nicht schaden, gelegentlich das eine oder andere Lehrbuch zu Rate zu ziehen. Ohne irgendeinen Anspruch auf Vollständigkeit wären etwa folgende Titel empfehlenswert (manche davon sind im Netzwerk der Universität zu Köln frei als E-Book verfügbar):

Zu Teil I: Grundlagen

- Helmut Koch, *Einführung in die Mathematik*, Springer-Verlag, 2004.
- Ingmar Lehmann und Wolfgang Schulz, *Mengen – Relationen – Funktionen: Eine anschauliche Einführung*, Springer-Verlag, 2016.

Zu Teil II: Analysis

- Otto Forster, *Analysis 1: Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*, Springer-Verlag, 2015.
- Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, Vieweg + Teubner, 2009.
- Konrad Königsberger, *Analysis 1*, Springer-Verlag, 2013.

Zu Teil III: Lineare Algebra

- Siegfried Bosch, *Lineare Algebra: Ein Grundkurs mit Aufgabentrainer*, Springer-Verlag, 2021.
- Gerd Fischer, *Lineare Algebra: eine Einführung für Studienanfänger*, Springer-Verlag, 2013.

Bitte beachten Sie, dass es nicht notwendig ist, eines oder gar alle dieser Bücher käuflich zu erwerben, sie sind in der Universitätsbibliothek und in der Bibliothek des Mathematischen Instituts verfügbar.

Es ist, trotz eifriger Bemühungen meinerseits, leider nicht auszuschließen, dass dieses Skriptum Fehler sowohl typographischer als auch mathematischer Natur enthält. Entsprechende Hinweise bzw. Nachfragen zu eventuellen Unklarheiten sind jederzeit per E-Mail (mmertens@math.uni-koeln.de) herzlich willkommen.

Köln, Oktober 2022,

Michael H. Mertens

Teil I

Grundlagen

Kapitel 1

Aussagenlogik und Mengenlehre

1.1 Aussagen und Wahrheitstafeln

Die Sprache der Mathematik ist gewissermaßen die Logik, daher wollen wir uns zunächst mit einigen ihrer Aspekte auseinandersetzen.

Vor Allem beschäftigen wir uns mit Aussagen. Wir bezeichnen einen Satz als eine **Aussage**, wenn wir ihm einen **Wahrheitswert** zuordnen können, wenn der Satz also entweder **wahr** (W) oder **falsch** (F) ist.

Beispiel 1.1. 1. Der Satz

Die Zahl 4 ist eine gerade Zahl.

ist eine wahre Aussage, der Satz

Die Zahl 4 ist eine Primzahl.

hingegen ist eine falsche Aussage.

2. Bei dem Satz

Köln ist die tollste Stadt der Welt.

handelt es sich **NICHT** um eine Aussage, da ihm kein (objektiver) Wahrheitswert zugeordnet werden kann, denn es handelt sich um eine Meinung. Ebenso ist der Satz

Die Zahl 2 ist grün.

keine Aussage, da man ihm keinen sinnvollen Wahrheitswert zuordnen kann.

Wir bezeichnen Aussagen meist mit großen lateinischen Buchstaben A, B, \dots . Hängt der Wahrheitswert eines Satzes von einer Variable x ab, so sprechen wir von einer **Aussageform** und schreiben dafür meist $A(x)$. Ein Beispiel wäre etwa der Satz

Die Zahl x ist durch 3 teilbar.

Für $x = 6$ erhalten wir eine wahre, für $x = 7$ eine falsche Aussage.

Seien nun A und B irgendwelche Aussagen.

- Die **Verneinung** oder **Negation** von A bezeichnen wir mit

$$\neg A \quad (\text{lies „nicht } A\text{“}).$$

Die Aussage $\neg A$ hat genau den entgegengesetzten Wahrheitswert von A , d.h. wenn A wahr ist, so ist $\neg A$ falsch und umgekehrt.

- Die logische **und-Verknüpfung** der Aussagen A und B wird mit

$$A \wedge B \quad (\text{lies „} A \text{ und } B\text{“})$$

bezeichnet. Diese neue Aussage ist wahr, falls A und B beide wahr sind und sonst falsch.

- Die logische **oder-Verknüpfung** der Aussagen A und B wird mit

$$A \vee B \quad (\text{lies „} A \text{ oder } B\text{“})$$

bezeichnet. Diese Aussage ist wahr, falls wenigstens eine (oder beide) der Aussagen A und B wahr ist, und falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

Man kann das oben Beschriebene sehr kompakt und übersichtlich in einer **Wahrheitstafel** zusammenfassen.

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$
W	F	W	W	W	W	W	W
W	F	W	F	F	W	F	W
F	W	F	W	F	F	W	W
F	F	F	F	F	F	F	F

Beispiel 1.2. Mithilfe von Wahrheitstafeln lassen sich die Wahrheitswerte von zusammengesetzten Aussagen gewissermaßen berechnen. Wie etwa für Aussagen A und B die zusammengesetzten Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$, wobei wir hier vereinbaren, dass die Negation Priorität vor den Verknüpfungen \wedge bzw. \vee hat, d.h. $\neg A \vee \neg B$ ist zu verstehen als $(\neg A) \vee (\neg B)$. Wir stellen die zugehörigen Wahrheitstafeln auf:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
W	W	W	F	W	W	F	F	F
W	F	F	W	W	F	F	W	W
F	W	F	W	F	W	W	F	W
F	F	F	W	F	F	W	W	W

Wie wir sehen haben die zunächst verschiedenen Aussagen $\neg(A \wedge B)$ und $\neg A \vee \neg B$ immer dieselben Wahrheitswerte in Abhängigkeit der Wahrheitswerte der Aussagen A und B . Die beiden Aussagen sind damit logisch gleichwertig.

Wie gerade gesehen gibt es üblicherweise mehrere Möglichkeiten Aussagen zu konstruieren, die logisch gleichwertig sind. Hierzu wollen wir zunächst den in der Mathematik üblichen Begriff einführen.

Definition 1.3. (i) Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent**, falls sie genau dieselben Wahrheitswerte haben. Ist A wahr, so ist auch B wahr, ist A falsch, so ist auch B falsch. Wir schreiben $A \Leftrightarrow B$ und lesen „ A ist äquivalent zu B “ oder „ A genau dann, wenn B “.

(ii) Wenn gilt dass B wahr ist, sofern A wahr ist (und falls A falsch ist, kann B entweder wahr oder falsch sein), so sagen wir, dass A die Aussage B **impliziert**. Wir schreiben $A \Rightarrow B$ und sagen „ A impliziert B “, „ B folgt aus A “ oder „wenn A , dann B “.

Auch dies können wir mit Wahrheitstafeln veranschaulichen:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

A	B	$A \Rightarrow B$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Bemerkung 1.4. (i) Man formuliert $A \Rightarrow B$ auch als „ A ist eine hinreichende Bedingung für B “ oder „ B ist eine notwendige Bedingung für A “. So ist etwa für eine gegebene natürliche Zahl $n \geq 3$ die Aussage „ n ist eine Primzahl“ hinreichend dafür, dass n ungerade ist, sie ist aber nicht notwendig, da z.B. $n = 9$ eine ungerade Zahl ist, die keine Primzahl ist.

(ii) Man schreibt das Implikationssymbol auch gelegentlich andersherum als $A \Leftarrow B$, was genau dasselbe bedeutet wie $B \Rightarrow A$. Man beachte hierbei aber unbedingt, dass die Aussagen $A \Rightarrow B$ und $A \Leftarrow B$ grundsätzlich verschieden sind.

(iii) Man beachte, dass man aus einer falschen Aussage A eine beliebige Aussage B folgern kann und die Gesamtaussage $A \Rightarrow B$ trotzdem wahr ist. So ist etwa die Aussage

Wenn 4 eine Primzahl ist, so ist die Erde eine Scheibe.

als Aussage insgesamt wahr, denn die Aussage „4 ist eine Primzahl“ ist natürlich falsch, so dass man aus ihr eine Aussage mit beliebigem Wahrheitsgehalt folgern kann.

Satz 1.5. *Man verifiziert mithilfe von Wahrheitstafeln die folgenden Rechenregeln für die verschiedenen Verknüpfungen von Aussagen. Seien dazu A, B, C Aussagen.*

(i) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$ und $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$.

- (ii) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (vgl. Beispiel 1.2) und $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$. Diese beiden Äquivalenzen nennt man auch die **DE MORGANSchen Regeln**.
- (iii) $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ und $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$.
- (iv) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ und $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.
- (v) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$. Diese Äquivalenz nennt man auch das Prinzip der **Kontraposition**.
- (vi) $A \Leftrightarrow B$ ist äquivalent zu der Aussage $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$.

Beweis. Wir beweisen exemplarisch nur einige dieser Rechenregeln, den Rest lassen wir als Übung:

- (iv) Wir stellen eine Wahrheitstafel auf und vergleichen die Wahrheitswerte der Aussagen:

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
W	W	W	W	W	W	W	W
W	W	F	W	W	W	F	W
W	F	W	W	W	F	W	W
W	F	F	F	F	F	F	F
F	W	W	W	F	F	F	F
F	W	F	W	F	F	F	F
F	F	W	W	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Die blau markierten Spalten der Tabelle sind identisch, also sind die Aussagen wie behauptet äquivalent.

- (vi) Wir legen hier wieder eine Wahrheitstafel an.

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F
F	W	F	W	F	F
F	F	W	W	W	W

Wieder sind die blau markierten Spalten identisch, also folgt die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 1.6. Insbesondere (*vi*) in Satz 1.5 werden wir häufig verwenden, wenn wir beweisen wollen, dass zwei Aussagen äquivalent sind. Oft ist es nämlich einfacher, nur eine Folgerung zu beweisen als gleich eine Äquivalenz. Gelegentlich verwendet man hierbei auch zusätzlich das Prinzip der Kontraposition aus Satz 1.5.

Als Beispiel wollen wir die folgende Aussage beweisen:

Das Quadrat n^2 einer ganzen Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist genau dann gerade, wenn n^2 durch 4 teilbar ist.

Wir wollen also folgende Implikationen beweisen:

1. Wenn n^2 gerade ist, so ist n^2 durch 4 teilbar bzw. in Zeichen

$$2 \mid n^2 \Rightarrow 4 \mid n^2.$$

2. Wenn n^2 durch 4 teilbar, so ist n^2 gerade, bzw. in Zeichen

$$4 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n^2.$$

Die zweite der Implikationen ist sehr einfach zu zeigen: Ist n^2 durch 4 teilbar, so ist n^2 offenbar auch durch 2 teilbar, also gerade.

Die erste Implikation ist nicht ganz so einfach zu sehen, da wir dazu eine kleine Vorüberlegung benötigen: Die Zahl n ist entweder gerade oder ungerade. Ist n gerade, so können wir $n = 2m$ für eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ schreiben. Dann ist $n^2 = 4m^2$ gerade und in der Tat durch 4 teilbar. Ist n ungerade, so können wir $n = 2m + 1$ für eine ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ schreiben. Dann ist $n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$ ungerade. Eine Quadratzahl ist also entweder durch 4 teilbar oder ungerade. Ist also n^2 nicht durch 4 teilbar, so ist n^2 nicht gerade. Das ist aber genau die Kontraposition der ersten Folgerung, die nach Satz 1.5 äquivalent zur ersten der Folgerungen ist.

Mathematische Aussagen sind sehr häufig von der Form „Für alle x gilt [...]“ oder „Es existiert ein x , so dass gilt [...]“ oder Kombinationen daraus. Für diese Satzfragmente verwendet man gelegentlich als Abkürzung so genannte **Quantoren**:

- Der **All-Quantor** \forall steht stellvertretend für den Ausdruck „Für alle“.
- Der **Existenz-Quantor** \exists steht stellvertretend für den Ausdruck „Es gibt (mindestens) ein“ oder „Es existiert (mindestens) ein“. Manchmal findet man den Existenz-Quantor auch mit einem Ausrufezeichen $\exists!$, was dann zusätzlich zur Existenz- auch eine Eindeutigkeitsaussage darstellt: „Es existiert genau ein..“

Beide Quantoren lassen sich auch kombinieren, allerdings ist hierbei die Reihenfolge wichtig:

Beispiel 1.7. Bekanntlich gibt es für jede natürliche Zahl n eine natürliche Zahl m , die größer ist als n , etwa $m = n + 1$. In Quantoren können wir diese Aussage wie folgt formulieren:

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n.$$

Die Schreibweise $\in \mathbb{N}$, die wir im nächsten Abschnitt genauer einführen, bedeutet hierbei lediglich dass n bzw. m natürliche Zahlen sein sollen.

Ändern wir die Reihenfolge der Quantoren, so ergibt sich die Aussage

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : m > n,$$

welche man so ausformulieren würde: „Es existiert eine natürliche Zahl m , die größer als alle natürlichen Zahlen n ist“, was offensichtlich nicht stimmen kann (m ist zum Beispiel sicherlich nicht größer als m selbst.).

Quantoren erweisen sich auch als praktisch, wenn man eine Aussage verneinen will: Man ersetzt jeden All-Quantor durch einen Existenz-Quantor und umgekehrt und verneint die übriggebliebene Aussageform.

Beispiel 1.8. Betrachten wir die quantorisierte Aussage

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Diese Aussage enthält einige Notation, die wir zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht eingeführt haben, die aber jetzt keine Rolle spielt. Diese Aussage wird uns später in der Vorlesung wieder begegnen.

Selbst ohne die Aussage inhaltlich zu verstehen, können wir dennoch die Verneinung quantorisiert formulieren:

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Hierbei haben wir verwendet, dass die Verneinung der Aussage $a < b$ $a \geq b$ lautet.

1.2 (Naive) Mengenlehre

Einer der vielleicht zentralsten Begriffe der modernen Mathematik ist der der Menge. Der erste, der sich systematisch damit auseinandergesetzt hat, war im 19. Jahrhundert GEORG CANTOR. Er „definierte“ eine **Menge** als eine Zusammenfassung wohlunterscheidbarer Objekte. Dies ist keine mathematisch wirklich saubere Definition, sie soll aber für unsere Zwecke ausreichen. Ist M eine Menge und x eines der „wohlunterscheidbaren Objekte“, die in M zusammengefasst werden, so nennen wir x ein **Element** von M und schreiben $x \in M$ (lies „ x in M “ oder „ x Element von M “). Für die Verneinung der Aussage $x \in M$ schreiben wir statt $\neg(x \in M)$ kürzer $x \notin M$.

Die einfachste Art, eine Menge zu beschreiben ist es, alle ihre Elemente aufzuzählen. Hierbei spielt allerdings die Reihenfolge der Elemente keine Rolle und auch eine eventuelle mehrfache Aufzählung eines Elementes wird ignoriert. So beschreiben

$$\{1, 2, 3\}, \{3, 2, 1\}, \{1, 2, 2, 2, 3, 1, 3, 2\}$$

alle dieselbe Menge. Die Elemente einer Menge müssen jedoch keineswegs Zahlen sein, es können zum Beispiel auch Punkte in der Ebene oder im Raum, geometrische Figuren, Großstädte in Schweden, niederrheinische Apfelsorten (die beiden letztgenannten werden in der Mathematik zugegeben eher seltener betrachtet) oder auch selbst wieder Mengen sein. Wichtige Mengen, mit denen wir sehr häufig arbeiten werden (und die wir z.T. später noch genauer einführen werden) sind u.a.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$: die Menge der **natürlichen Zahlen**,
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$: die Menge der **natürlichen Zahlen mit 0** (**N.B.:** Wir sehen 0 NICHT als natürliche Zahl an),
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$: die Menge der **ganzen Zahlen**,
- $\mathbb{Q} = \{0, \frac{1}{2}, \frac{5}{7}, -\frac{37}{42}, \dots\}$: die Menge der **rationalen Zahlen** oder der **Brüche**,
- $\mathbb{R} = \{0, -2, \frac{4}{3}, \sqrt{2}, \pi, e, \dots\}$: die Menge der **reellen Zahlen**.

Wir führen nun einige Begrifflichkeiten über Mengen ein.

Definition 1.9. (i) Zwei Mengen M, N sind genau dann **gleich**, in Zeichen $M = N$, wenn die Aussagen $x \in M$ und $x \in N$ äquivalent sind. Insbesondere gibt es genau eine Menge, die keine Elemente enthält, die **leere Menge** \emptyset . In formaler Aussagenlogik:

$$x \in M \Leftrightarrow x \in N$$

(ii) Für zwei Mengen M, N nennen wir N eine **Teilmenge** von M , in Zeichen $N \subseteq M$, falls für alle $x \in N$ auch $x \in M$ gilt, in Aussagenlogik:

$$x \in N \Rightarrow x \in M,$$

Ist für $x \in M$ $A(x)$ eine Aussageform, so können wir eine Teilmenge N von M in **deskriptiver** Form charakterisieren als

$$N = \{x \in M : A(x)\}.$$

Die Teilmenge N besteht genau aus den Elementen $x \in M$, für die die Aussage $A(x)$ wahr ist:

$$x \in N \Leftrightarrow x \in M \wedge A(x).$$

(iii) Für zwei Mengen M, N definieren wir ihre **Vereinigung**, in Zeichen $M \cup N$ als die Menge aller Elemente, die in M oder N (oder beiden Mengen) enthalten sind:

$$x \in M \cup N \Leftrightarrow x \in M \vee x \in N.$$

- (iv) Für zwei Mengen M, N definieren wir ihren **Durchschnitt** $M \cap N$ als die Menge aller Elemente, die in beiden Mengen gleichzeitig enthalten sind:

$$x \in M \cap N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \in N.$$

Gilt $M \cap N = \emptyset$, so nennen wir die Mengen M und N **disjunkt**.

- (v) Für zwei Mengen M, N definieren wir ihre **Differenz** $M \setminus N$ als die Menge aller Elemente, die in M , aber nicht in N enthalten sind:

$$x \in M \setminus N \Leftrightarrow x \in M \wedge x \notin N.$$

Gilt $N \subseteq M$, so schreibt man statt $M \setminus N$ auch gelegentlich $\complement_M N$ und nennt $\complement_M N$ das **Komplement** von N in M . Ist aus dem Kontext klar, bezüglich welcher Menge M das Komplement gebildet wird, schreibt man auch einfach $\complement N$.

Beispiel 1.10. 1. Die vor Definition 1.9 eingeführten Mengen sind in der gelisteten Reihenfolge Teilmengen voneinander:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

2. Die deskriptive Form von Teilmengen kann mitunter sehr unterschiedlich ausfallen. So beschreiben die Mengen

$$\{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist eine gerade Primzahl}\} \quad \text{und} \quad \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0\}$$

genau dieselbe Menge, nämlich $\{2\}$.

3. Da die Aussage $x \in \emptyset$ nach Definition immer falsch ist, ist die Folgerung $x \in \emptyset \Rightarrow x \in M$ für jede Menge M eine wahre Aussage, das heißt es gilt stets $\emptyset \subseteq M$ für jede Menge M .
4. Seien $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $N = \{2, 3, 5, 7\}$. Dann gilt weder $M \subseteq N$ (z.B. gilt $1 \in M$, aber $1 \notin N$) noch $N \subseteq M$ (z.B. ist $7 \in N$, aber $7 \notin M$). Die Vereinigung von M und N ist dann gegeben durch

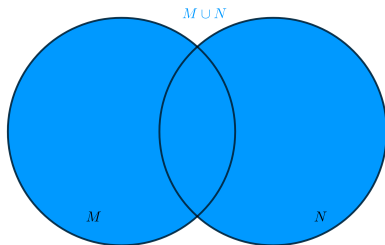
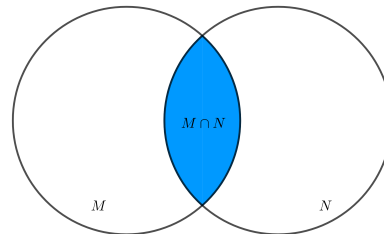
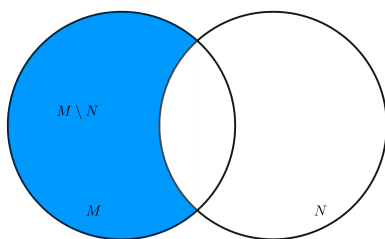
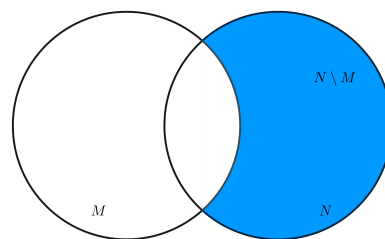
$$M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

und ihr Durchschnitt als

$$M \cap N = \{2, 3, 5\}.$$

Weiter gilt

$$M \setminus N = \{1, 4, 6\} \quad \text{und} \quad N \setminus M = \{7\}.$$

Abbildung 1.1: Vereinigung von Mengen, $M \cup N$ Abbildung 1.2: Durchschnitt von Mengen, $M \cap N$ Abbildung 1.3: Differenz von Mengen, $M \setminus N$ Abbildung 1.4: Differenz von Mengen, $N \setminus M$

Bemerkung 1.11. Die Konzepte aus Definition 1.9 lassen sich sehr gut durch so genannte **Venn-Diagramme** veranschaulichen:

Es kommt nicht von Ungefähr, dass etwa die Symbole \cap und \cup in der Mengenlehre an die Symbole \wedge und \vee in der Aussagenlogik angelehnt sind. Schließlich werden die letzteren in der Definition der ersteren verwendet. Ebenso korrespondieren in offensichtlicher Weise das Komplement in der Mengenlehre und die Negation in der Aussagenlogik. So

übertragen sich (fast) direkt die Rechenregeln für die Aussagenlogik aus Satz 1.5 auf die Mengenlehre.

Satz 1.12. *Seien L, M, N Mengen, die alle in einer Menge U als Teilmengen enthalten sind. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (i) $M \cup N = N \cup M$ und $M \cap N = N \cap M$.
- (ii) $\mathfrak{C}_U(M \cap N) = (\mathfrak{C}_U M) \cup (\mathfrak{C}_U N)$ und $\mathfrak{C}_U(M \cup N) = (\mathfrak{C}_U M) \cap (\mathfrak{C}_U N)$.
- (iii) $L \cap (M \cap N) = (L \cap M) \cap N$ und $L \cup (M \cup N) = (L \cup M) \cup N$.
- (iv) $L \cap (M \cup N) = (L \cap M) \cup (L \cap N)$ und $L \cup (M \cap N) = (L \cup M) \cap (L \cup N)$.
- (v) Gilt $N \subseteq M$, so folgt $\mathfrak{C}_U M \subseteq \mathfrak{C}_U N$.
- (vi) Es gilt $M = N$ genau dann, wenn $N \subseteq M$ und $M \subseteq N$ gilt.

Beweis. Wir zeigen wieder nur exemplarisch einige der Aussagen und lassen den Rest als Übung.

(ii) Sei $x \in U$. Dann gilt genau dann $x \in \mathfrak{C}_U(M \cap N)$, wenn $x \notin (M \cap N) \Leftrightarrow \neg(x \in M \cap N)$ gilt. Nach Definition des Durchschnitts ist dies äquivalent zu $\neg(x \in M \wedge x \in N)$. Nach Satz 1.5 (ii) ist dies nun äquivalent zu $x \notin M \vee x \notin N$, was nach Definition äquivalent ist zu $x \in \mathfrak{C}_U M \vee x \in \mathfrak{C}_U N \Leftrightarrow x \in (\mathfrak{C}_U M) \cup (\mathfrak{C}_U N)$. Es gilt also insgesamt $x \in \mathfrak{C}_U(M \cap N)$ genau dann, wenn $x \in (\mathfrak{C}_U M) \cup (\mathfrak{C}_U N)$ gilt, also wie behauptet $\mathfrak{C}_U(M \cap N) = (\mathfrak{C}_U M) \cup (\mathfrak{C}_U N)$.

(v) Angenommen, es gilt $N \subseteq M$. Für $y \in N$ folgt also $y \in M$, was nach Satz 1.5 (v) äquivalent dazu ist, dass $y \notin M$ die Aussage $y \notin N$ impliziert.

Sei nun $x \in \mathfrak{C}_U M$. Wir haben dann folgende Folgerungskette:

$$\begin{aligned} x &\in \mathfrak{C}_U M \\ \Rightarrow \neg(x \in M) &\quad \text{nach Definition} \\ \Rightarrow \neg(x \in N) &\quad \text{nach der Vorüberlegung} \\ \Rightarrow x &\in \mathfrak{C}_U N. \quad \text{nach Definition.} \end{aligned}$$

Wir haben also die Implikation $x \in \mathfrak{C}_U M \Rightarrow x \in \mathfrak{C}_U N$ gezeigt, also folgt wie behauptet $\mathfrak{C}_U M \subseteq \mathfrak{C}_U N$.

q.e.d.

Man kann natürlich auch die Vereinigung oder den Durchschnitt von mehr als zwei Mengen betrachten, sogar von unendlich vielen. Es ist dann natürlich irgendwann mühselig

oder sogar unmöglich, alle entsprechenden Mengen aufzulisten. Man bedient sich dann einer Schreibweise, die wir nun einführen wollen.

Definition 1.13. Sei I eine beliebige Indexmenge (z.B. $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ für eine natürliche Zahl n oder $I = \mathbb{N}$) und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge.

(i) Wir definieren die **Vereinigung** der Mengen $M_i, i \in I$, als

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x : \exists i \in I : x \in M_i\}.$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ bzw. $I = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigcup_{i=1}^n M_i$ bzw. $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.

(ii) Wir definieren den **Durchschnitt** der Mengen $M_i, i \in I$, als

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x : \forall i \in I : x \in M_i\}.$$

Für $I = \{1, \dots, n\}$ bzw. $I = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigcap_{i=1}^n M_i$ bzw. $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i$.

Wir haben zu Anfang dieses Abschnitts erwähnt, dass Mengen selbst wieder Mengen als Elemente enthalten können. Eine wichtige Menge, bei der dies so ist, wollen wir nun noch einführen:

Definition 1.14. Für eine Menge M nennen wir die Menge aller Ihrer Teilmengen die **Potenzmenge** $\mathfrak{Pot}(M)$ von M .

Beispiel 1.15. 1. Die einzige Teilmenge der leeren Menge ist die leere Menge selbst, also haben wir $\mathfrak{Pot}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. Beachten Sie, dass $\{\emptyset\}$ nicht dasselbe wie \emptyset ist, denn $\{\emptyset\}$ enthält genau ein Element, nämlich \emptyset , die leere Menge \emptyset selbst aber keines.

2. Es gilt zum Beispiel

$$\mathfrak{Pot}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$$

und

$$\mathfrak{Pot}(\{b, \natural, \#\}) = \{\emptyset, \{b\}, \{\natural\}, \{\#\}, \{b, \natural\}, \{b, \#\}, \{\natural, \#\}, \{b, \natural, \#\}\}.$$

Bemerkung 1.16. Der Grund, warum im Titel dieses Abschnitts das Wort „naiv“ auftaucht liegt darin, dass man recht schnell mit der Mengenlehre wie sie hier eingeführt wurde zu Widersprüchen kommt, sogenannten **Antinomien**. So etwa das **RUSSELSche Paradoxon**:

Mengen selbst sind wohlunterscheidbare Objekte, also sollte es eine Menge \mathcal{M} aller Mengen geben. Dann können wir eine Teilmenge von \mathcal{M} betrachten, nämlich

$$\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M} : M \notin M\},$$

also die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element (nicht als Teilmenge!!!) enthalten. Die meisten Mengen, mit denen wir es üblicherweise zu tun haben, erfüllen diese Eigenschaft. Die Frage ist nun: Enthält \mathcal{N} sich selbst als Element?

Wenn ja, müsste nach Definition $\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$ gelten, was ein Widerspruch ist. Falls nein, ist \mathcal{N} eine Menge, die sich nicht selbst als Element enthält, also gilt wieder nach Definition $\mathcal{N} \in \mathcal{N}$, also haben wir erneut einen Widerspruch. Das heißt, unsere Konstruktion muss irgendwo einen Fehler enthalten. Das ist auch der Fall, nämlich ganz am Anfang: Es kann keine Menge aller Mengen geben!

Eine vielleicht anschaulichere Analogie zu diesem Paradoxon ist die folgende Geschichte: In einem Dorf lebt ein Barbier, der genau diejenigen Männer des Dorfes rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Frage: Rasiert der Barbier sich selbst?

Falls ja, dürfte er sich nach der Beschreibung eben nicht selbst rasieren, falls nein, müsste er genau das tun.

Es ist möglich, diese Antinomien wie in Bemerkung 1.16 auszuräumen, allerdings würde uns dies hier zu weit führen. Hierzu führt man den Begriff der **Klasse** ein. Wer tiefer in die Materie einsteigen möchte kann sich mit dem Begriff der ZERMELO-FRAENKEL-Mengenlehre vertraut machen, in der die Mengenlehre vollständig axiomatisiert wird. Was diese Vorlesung (und auch die allermeisten weiteren Vorlesungen Ihres Studiums) anbelangt, kommen wir mit den hier eingeführten Begrifflichkeiten gut aus.

1.3 Relationen

Definition 1.17. Seien M, N beliebige Mengen.

- (i) Für Elemente $x, y \in M$ definieren wir (x, y) als das **geordnete Paar** aus x und y . Wir nennen zwei geordnete Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) **gleich**, falls $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gilt.
- (ii) Wir nennen die Menge

$$M \times N := \{(x, y) : x \in M, y \in N\}$$

das **kartesische Produkt** (nach RENÉ DESCARTES) von M und N .

Beispiel 1.18. 1. Seien $M = \{A, B, C\}$ und $N = \{1, 2\}$. Dann ist

$$M \times N = \{(A, 1), (A, 2), (B, 1), (B, 2), (C, 1), (C, 2)\}.$$

- 2. Geometrisch lässt sich die Menge der reellen Zahlen als Zahlengerade veranschaulichen. Jeder Punkt auf der Gerade entspricht einer reellen Zahl und umgekehrt. Das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ lässt sich dann als Ebene veranschaulichen, in der jedem Punkt eine x - und eine y -Koordinate zugeordnet werden.

Bemerkung 1.19. Man kann geordnete Paare auch als Mengen definieren. Das Paar (x, y) identifizieren wir dann mit der Menge $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. In der Übung sehen Sie, warum diese Identifikation, die auf den polnischen Mathematiker KURATOWSKI zurückgeht, genau dieselben Eigenschaften hat wie in der Definition gefordert.

Wir kommen nun zum namensgebenden Begriff dieses Abschnittes, dem der Relation.

Definition 1.20. Sei M eine Menge. Eine **Relation** R auf M ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times M$, $R \subseteq M \times M$. Für $x, y \in M$ schreiben wir $x \sim_R y$ oder, falls R aus dem Zusammenhang klar ist, auch nur $x \sim y$, falls $(x, y) \in R$ gilt. Für $x \in M$ heißt $T(x) = \{y \in M : x \sim_R y\}$ die **Transversale** oder **Restklasse** von x .

Zur Interpretation bzw. Anwendung dieser Definition sei angeführt, dass der Begriff der Relation eine formale Abschwächung des Gleichheitsbegriffs bilden soll: Oftmals ist es bei der Betrachtung (mathematischer) Objekte zu viel verlangt oder auch einfach nicht sinnvoll, sie „in gewisser Weise“ als gleich zu betrachten, obwohl sie es de facto nicht sind. Ein unmathematisches Beispiel: Wenn Sie die Bäume in einem Wald betrachten und sie wirklich nur gleiche Bäume als gleich ansehen, müssten Sie jeden Baum einzeln mit all seinen Charakteristika auflisten und sie erhalten (sagen wir) 1000 einzelne Bäume. Viel sinnvoller ist es normalerweise, Bäume derselben Art als im Wesentlichen gleich zu betrachten. So können Sie dann denselben Wald viel informativer (und knapper) beschreiben, indem Sie sagen, er bestehe aus 250 Eichen, 150 Buchen, 350 Fichten, 50 Birken und 200 Kiefern.

Ein etwas mathematischeres Beispiel:

Beispiel 1.21. Sei etwa $M = \mathbb{R}$. Dann ist $R := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \leq y\}$ eine Relation auf \mathbb{R} . Statt $x \sim_R y$ schreibt man hier natürlich einfacher $x \leq y$. Die Transversalen sind dann die Mengen $T(x) = \{y \in \mathbb{R} : x \leq y\}$, also die unbeschränkten nach rechts **Intervalle** (wir führen diesen Begriff später genauer ein).

Bemerkung 1.22. Es sei angemerkt, dass gerade bei so prominenten Relationen wie im Beispiel oben man auch gelegentlich (formal eigentlich nicht ganz korrekt), das Symbol \sim_R (im Beispiel \leq) mit der Relation R identifiziert und etwa sagt, dass \leq eine Relation auf \mathbb{R} ist.

Um eine vernünftige Abschwächung des Gleichheitsbegriffs zu erhalten, beschränkt man sich meistens (aber nicht immer!) auf Relationen, die gewisse gute Eigenschaften erfüllen.

Definition 1.23. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M .

- (i) Die Relation R heißt **reflexiv**, falls für alle $x \in M$ $(x, x) \in R$ (bzw. $x \sim_R x$) gilt.

(ii) Die Relation R heißt **symmetrisch**, falls für $(x, y) \in R$ (bzw. $x \sim_R y$) auch $(y, x) \in R$ (bzw. $y \sim_R x$) gilt.

(iii) Die Relation R heißt **transitiv**, falls aus $(x, y) \in R$ (bzw. $x \sim_R y$) und $(y, z) \in R$ (bzw. $y \sim_R z$) stets auch $(x, z) \in R$ (bzw. $x \sim_R z$) folgt.

Eine Relation heißt eine **Äquivalenzrelation**, falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Die Transversalen nennen wir dann auch **Äquivalenzklassen**.

Wir nennen dann eine Menge $V \subseteq M$ ein **Vertreterssystem** der Relation R , falls für jedes $x \in M$ ein $x_0 \in V$ existiert, $x \in T(x_0)$ gilt.

Beispiel 1.24. Sei $M = \mathbb{Z}$ und wir betrachten die Relation

$$R := \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : m - n \text{ ist durch } 7 \text{ teilbar}\}.$$

Statt $m \sim_R n$ schreiben wir dafür auch $m \equiv n \pmod{7}$.

Seien im Folgenden $k, \ell, m, n \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen.

Für jedes $m \in \mathbb{Z}$ ist natürlich $m - m = 0$ und damit durch 7 teilbar, also gilt $m \equiv m \pmod{7}$, also ist die Relation reflexiv.

Ist $m \equiv n \pmod{7}$, gilt also $m - n = 7k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$, so ist $n - m = 7 \cdot (-k)$ ebenfalls durch 7 teilbar, also gilt $n \equiv m \pmod{7}$ und die Relation ist symmetrisch.

Gilt $\ell \equiv m \pmod{7}$ und $m \equiv n \pmod{7}$, so sind $\ell - m$ und $m - n$ beide durch 7 teilbar. Dann ist aber auch $\ell - n = (\ell - m) + (m - n)$ eine Summe von durch 7 teilbaren Zahlen und damit selbst durch 7 teilbar. Damit gilt also auch $\ell \equiv n \pmod{7}$ und die Relation ist auch transitiv.

Insgesamt haben wir es also mit einer Äquivalenzrelation zu tun.

Ein Vertreterssystem dieser Relation ist offenbar die Menge $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, denn für jedes $m \in \mathbb{Z}$ existiert offenbar genau ein $r \in V$ (der Rest bei der Division durch 7), so dass $m - r$ durch 7 teilbar ist.

Wir erwähnen am Rande, dass man, mit den offensichtlichen Modifikationen 7 in diesem Beispiel durch eine beliebige andere natürliche Zahl ersetzen kann und so eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{Z} erhält.

Wir erwähnen noch eine wichtige Eigenschaft von Äquivalenzrelationen:

Satz 1.25. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Äquivalenzrelation auf M . Dann sind zwei Äquivalenzklassen von R entweder gleich oder disjunkt: Für $x, y \in M$

$$T(x) \cap T(y) \neq \emptyset \Rightarrow T(x) = T(y).$$

Beweis. Sei $x \in M$ beliebig. Da die Äquivalenzrelation R insbesondere reflexiv ist, gilt $x \sim_R x$, so dass die Äquivalenzklasse $T = T(x)$ sicher x enthält und somit nicht leer ist.

Ist nun $y \in M$ und $z \in T(y)$ beliebig. Angenommen, es existiert ein $a \in T(x) \cap T(y)$. Dann gilt einerseits $x \sim_R a$ und andererseits $y \sim_R a$ und auch $y \sim_R z$, also wegen der Transitivität und Reflexivität der Relation auch $a \sim_R z$. Wieder wegen der Transitivität haben wir als auch $x \sim_R z$, also folgt $z \in T(x)$ und somit $T(y) \subseteq T(x)$.

Ist umgekehrt $z \in T(x)$ beliebig, so folgt genau wie zuvor, dass $x \sim_R a$ und $x \sim_R z$, sowie $y \sim_R a$, also insgesamt $y \sim_R z$. Damit folgt also $z \in T(y)$, also $T(x) \subseteq T(y)$.

Insgesamt folgt somit wie behauptet $T(x) = T(y)$.

q.e.d.

Eine kürzere Formulierung von Satz 1.25 wäre, dass jedes $x \in M$ in genau einer Äquivalenzklasse enthalten ist.

Wir führen für spätere Zwecke noch einen weiteren Typ von Relationen ein.

Definition 1.26. Sei M eine Menge und $R \subseteq M \times M$ eine Relation auf M . Die Relation R heißt **antisymmetrisch**, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \sim_R y$ und $y \sim_R x$ stets $x = y$ folgt. Wir nennen dann R eine **Ordnung**, wenn R reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Statt \sim_R schreiben wir dann auch $x \prec_R y$ bzw. $x \prec y$. Gilt für alle $x, y \in M$ entweder $x \prec y$, $x = y$ oder $y \prec x$, so nennen wir R eine **Totalordnung**.

Beispiel 1.27. 1. Sei $M = \mathfrak{Pot}(\{1, \dots, 10\})$ (statt $\{1, \dots, 10\}$ können wir natürlich eine beliebigen Menge betrachten). Dann definiert die übliche Teilmengenbeziehung \subseteq eine Ordnung auf M : Jede Menge ist Teilmenge von sich selbst, also ist \subseteq reflexiv. Weiterhin folgt klarerweise für beliebige Mengen aus $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ auch $A \subseteq C$, also ist die Relation transitiv. In Satz 1.12 (vi) hatten wir genau gezeigt, dass die Teilmengenbeziehung antisymmetrisch ist, also haben wir es in der Tat mit einer Ordnung zu tun. Allerdings handelt es sich hierbei **NICHT** um eine Totalordnung, denn für die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{4, 5, 6, 7\}$ gilt weder $A \subseteq B$ noch $A = B$ noch $B \subseteq A$.

2. Man überlegt sich fast wie oben, dass die übliche Anordnung \leq auf den reellen Zahlen eine Totalordnung definiert. Dies werden wir in späteren Abschnitten noch genau beweisen.

1.4 Abbildungen

Überall in der Mathematik beschäftigt man sich mit Abbildungen oder auch Funktionen in irgendeiner Form. Diesen Begriff kennen Sie vermutlich speziell für Zuordnungen auf den reellen Zahlen. Man kann (und muss gelegentlich) Abbildungen jedoch auf beliebigen Mengen betrachten.

Definition 1.28. Seien M, N Mengen. Eine **Abbildung** f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem $x \in M$ ein eindeutiges $y \in N$ zuordnet. Wir nennen dieses y den **Wert** der Abbildung an der **Stelle** x und schreiben

$$f : M \rightarrow N, x \mapsto y = f(x).$$

Die Menge M nennen wir dabei den **Definitionsbereich** der Abbildung f , die Menge N nennen wir ihren **Wertebereich**.

Die Menge aller Abbildungen von M nach N bezeichnet man gelegentlich mit

$$N^M := \{f : M \rightarrow N \text{ Abbildung}\}.$$

Beispiel 1.29. Durch die Vorschrift

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

wird eine Ihnen aus der Schule wohlbekannte Abbildung definiert. Jeder reellen Zahl wird genau ein Wert zugeordnet, nämlich ihr Quadrat, welches wieder eine reelle Zahl ist.

Umgekehrt handelt es sich bei der Vorschrift

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

NICHT um eine Abbildung, denn die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ist nicht definiert (zumindest nicht als reelle Zahl), also kann man etwa der Zahl $x = -1$ mit der Vorschrift g keinen Wert zuordnen.

Auch die Vorschrift

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ 1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

definiert **KEINE** Abbildung, denn laut Vorschrift soll $x = 0$ sowohl auf 0 als auch auf 1 abgebildet werden, es gibt also keine eindeutige Zuordnung von Werten.

Man kann sich die obigen Beispiele auch schematisch durch Diagramme wie folgt veranschaulichen:

In Abbildung 1.5 sehen wir die schematische Darstellung einer Abbildung: jedem Element des Definitionsbereichs M wird genau ein Wert im Wertebereich N zugeordnet (dass zwei Elemente des Definitionsbereichs auf denselben Wert abgebildet werden, ist zulässig). Abbildung 1.6 stellt hingegen **KEINE** Abbildung dar, weil einem Element des Definitionsbereichs M zwei verschiedene Werte im Wertebereich zugeordnet werden. Bei Abbildung 1.7 handelt es sich ebenfalls **NICHT** um eine Abbildung, weil dem markierten Element des Definitionsbereichs kein Wert zugeordnet wird.

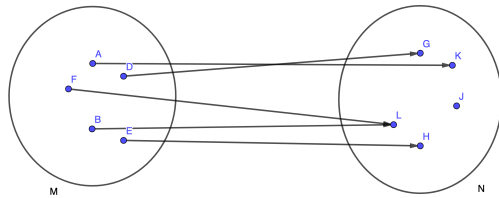


Abbildung 1.5:

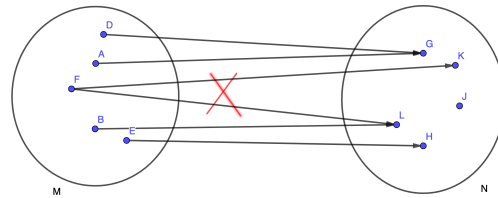


Abbildung 1.6:

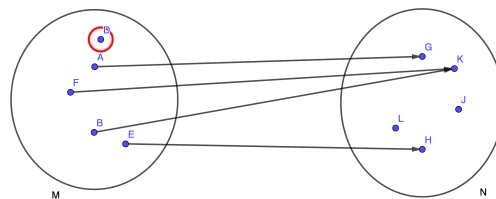


Abbildung 1.7:

Definition 1.30. Seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Außerdem sei $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$.

(i) Wir nennen die Menge

$$f(A) := \{f(x) : x \in A\} = \{y \in N : \exists x \in A : f(x) = y\} \subseteq N$$

das **Bild** der Menge A unter f . Für $A = M$ sprechen wir auch einfach nur vom Bild von f .

(ii) Die Menge

$$f^{-1}(B) := \{x \in M : f(x) \in B\} \subseteq M$$

das **Urbild** der Menge B unter f .

(iii) Wir definieren die **Einschränkung** von f auf A als die Abbildung

$$f|_A : A \rightarrow N, x \mapsto f(x).$$

Oft will man Abbildungen vergleichen. Dazu müssen wir zunächst formal definieren, was wir damit meinen.

Definition 1.31. Seien M, N Mengen und $f, g : M \rightarrow N$ Abbildungen. Die beiden Abbildungen f und g sind **gleich**, wenn für alle $x \in M$ stets $f(x) = g(x)$ gilt,

$$\forall x \in M : f(x) = g(x).$$

Bemerkung 1.32. Man beachte, dass implizit in der Definition verlangt ist, dass zwei gleiche Abbildungen insbesondere denselben Definitions- und Wertebereich haben. So sind die Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, \quad g = f|_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}, x \mapsto x^2$$

alle als Abbildungen verschieden, obwohl sie dieselbe Abbildungsvorschrift $x \mapsto x^2$ haben.

Oft ist es nötig, mehrere Abbildungen zu kombinieren oder besser hintereinanderschalten, um eine neue Abbildung zu erhalten

Definition 1.33. Seien L, M, N Mengen und $f : L \rightarrow M$ und $g : M \rightarrow N$ Abbildungen. Dann nennen wir die Abbildung

$$g \circ f : L \rightarrow N, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (\text{lies „}g \text{ verkettet mit } f\text{“ oder „}g \text{ nach } f\text{“})$$

die **Verkettung** oder **Komposition** der Abbildungen f und g .

Bemerkung 1.34. Die Verkettung von g und f ist genau deshalb sinnvoll, weil wir für $x \in L$ den Wert $f(x)$ in g einsetzen, der ja in M und damit im Definitionsbereich von g liegt.

Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass die Verkettung nicht ohne Weiteres vertauscht werden kann: Die Verkettung $f \circ g$ können wir nur dann sinnvoll bilden, wenn der Wertebereich (oder zumindest das Bild) von g im Definitionsbereich von f enthalten ist, falls also $g(M) \subseteq L$ gilt.

Beispiel 1.35. Betrachten wir die Abbildungen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 3$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - 2$. Dann können wir die Verkettungen $g \circ f$ und $f \circ g$ beide berechnen und erhalten für $x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) - 2 = 2x + 3 - 2 = 2x + 1$$

bzw.,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x - 2) + 3 = 2x - 1.$$

Offenbar sind die Abbildungen nicht gleich, denn z.B. ist $(g \circ f)(0) = 1$ und $(f \circ g)(0) = -1$, man kann also Verkettungen von Abbildungen im Allgemeinen **NICHT** vertauschen.

Definition 1.36. Seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- (i) Wir nennen die Abbildung f **injektiv**, falls für beliebige $x_1, x_2 \in M$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ stets $x_1 = x_2$ folgt:

$$\forall x_1, x_2 \in M : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- (ii) Die Abbildung f heißt **surjektiv**, falls für alle $y \in N$ ein $x \in M$ existiert mit $f(x) = y$,

$$\forall y \in N \exists x \in M : f(x) = y.$$

- (iii) Die Abbildung f heißt **bijektiv**, falls sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Eine Klassifikation von injektiven/surjektiven/bijektiven Abbildungen anhand von Urbildern liefert das folgende Lemma. Den Beweis lassen wir als Übung.

Lemma 1.37. Seien M, N Mengen. Dann ist Folgendes richtig:

- (i) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann injektiv, wenn für jedes $y \in N$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ entweder leer ist oder höchstens ein Element enthält.
- (ii) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes $y \in N$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ mindestens ein Element enthält, also nicht leer ist.
- (iii) Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ist genau dann bijektiv, wenn für jedes $y \in N$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element enthält.

Beispiel 1.38. 1. Betrachten wir erneut die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, \quad g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, \quad h : \mathbb{R} \rightarrow \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}, x \mapsto x^2$$

aus Beispiel 1.35. Dann ist f sicher nicht injektiv, denn z.B. 1 und -1 werden auf den selben Wert $1^2 = (-1)^2 = 1$ abgebildet. Das Urbild von $\{y = 1\}$ enthält also (mindestens) zwei Elemente, 1 und -1 , so dass nach Lemma 1.37 f nicht injektiv sein kann. Ebenfalls ist f nicht surjektiv, denn es existiert zum Beispiel kein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 = -1$, also ist das Urbild von $y = -1$ leer.

Die Funktion g hingegen ist in der Tat injektiv, denn das Urbild von $y \in \mathbb{R}$ ist leer, sofern nicht $y = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, und da alle natürlichen Zahlen positiv sind (und sie aus der Schule wissen, dass die Gleichung $x^2 = a$ für jedes $a > 0$ genau zwei Lösungen hat, nämlich $\pm\sqrt{a}$, von denen eine positiv und eine negativ ist), gibt es

also höchstens ein Urbild, das positiv ist. Für $y = n^2$ ist $n \in \mathbb{N}$ ein solches Urbild. Also enthält das Urbild $g^{-1}(\{y\})$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ höchstens ein Element, also ist g in der Tat injektiv. Allerdings ist g natürlich nicht surjektiv, denn etwa $y = 2$ hat kein Urbild in \mathbb{N} .

Die Funktion h wiederum ist aus dem selben Grunde nicht injektiv wie f , allerdings ist h surjektiv, denn jedes $y \geq 0$ besitzt (ebenfalls aus der Schule bekannt) ein Urbild unter h , nämlich $x = \sqrt{y}$. Dann gilt nämlich $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$, also ist f surjektiv.

2. Abbildungen bzw. Funktionen von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen lassen sich gut durch Funktionsgraphen darstellen. An diesen kann man oft ablesen, ob eine Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Ein formaler Beweis ist das natürlich nicht, aber man kann sich zumindest eine Idee verschaffen, welche Eigenschaften die Funktion möglicherweise hat.

Es folgt direkt aus Lemma 1.37, dass eine Funktion genau dann injektiv ist, wenn jede Parallele zur x -Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneidet, surjektiv, wenn sie den Funktionsgraphen immer mindestens einmal schneidet, und bijektiv, wenn sie ihn genau einmal schneidet.

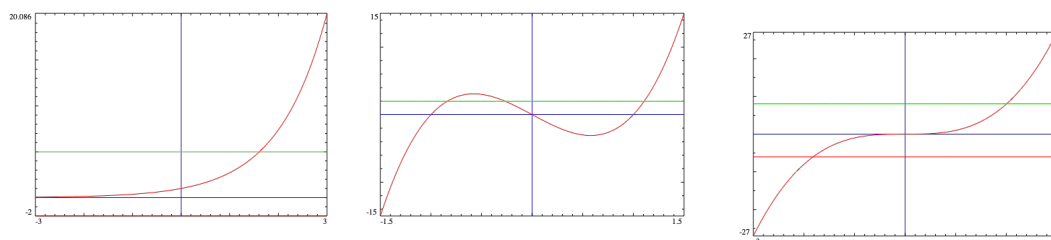


Abbildung 1.8: Injektiv, nicht surjektiv Abbildung 1.9: Surjektiv, nicht injektiv Abbildung 1.10: Bijektiv

Wir haben die folgende wichtige Klassifizierung von injektiven bzw. surjektiven bzw. bijektiven Abbildungen über die Komposition mit anderen Abbildungen.

Satz 1.39. Seien M, N Mengen und $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung.

- (i) Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ existiert, so dass für alle $x \in M$

$$(g \circ f)(x) = x$$

gilt. Eine solche Abbildung g nennen wir eine **Linksinverse** von f . Diese ist in jedem Fall surjektiv.

- (ii) Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn eine Abbildung $h : N \rightarrow M$ existiert, so dass für alle $y \in N$

$$(f \circ h)(y) = y$$

*gilt. Eine solche Abbildung h nennen wir eine **Rechtsinverse** von f . Diese ist in jedem Fall injektiv.*

- (iii) *Die Abbildung f ist genau dann bijektiv, wenn eine Abbildung $g : N \rightarrow M$ existiert, die sowohl Rechts- als auch Linksinverse von f ist, d.h. es gilt*

$$(\forall x \in M : g(f(x)) = x) \wedge (\forall y \in N : f(g(y)) = y).$$

*Die Abbildung g ist dann selbst bijektiv und eindeutig bestimmt. Man nennt g dann die **Inverse** oder **Umkehrabbildung** von f und schreibt dafür $g = f^{-1}$.*

Beweis.

- (i) Wir haben eine „genau dann, wenn“-Aussage zu beweisen. Diese teilen wir in zwei Folgerungen auf:

Sei zunächst f injektiv und $x^* \in M$ fest gewählt. Für $y \in N$ wissen wir nach Lemma 1.37, dass das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ dann höchstens ein Element enthält, welches wir mit x bezeichnen. Wir definieren dann die Vorschrift

$$g : N \rightarrow M, y \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) = \{x\} \neq \emptyset \\ x^* & \text{falls } f^{-1}(\{y\}) = \emptyset. \end{cases}$$

Jedem $y \in N$ wird dann genau ein $x \in M$ zugeordnet, also ist g eine Abbildung.

Für $x \in M$ ist offenbar das Urbild von $y = f(x)$ unter f nicht leer, da es ja nach Definition x enthält, also gilt $f^{-1}(y) = \{x\}$. Nach Definition von g haben wir damit also, dass $g(f(x)) = x$ gilt, so dass g eine Linksinverse zu f ist. Damit sehen wir auch direkt, dass g surjektiv ist, denn für jedes $x \in M$ existiert ein $y \in N$, nämlich $f(x)$, mit $g(y) = x$.

Sei nun $g : N \rightarrow M$ eine Linksinverse zu f . Seien dann $x_1, x_2 \in M$, so dass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt. Wenden wir die Abbildung g auf beiden Seiten der Gleichung an, erhalten wir, da g linksinvers zu f ist,

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Nach Definition folgt also, dass f injektiv ist.

- (ii) Sei zunächst f surjektiv. Dann existiert für jedes $y \in N$ (mindestens) ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Wir wählen also nun zu jedem $y \in N$ ein festes x mit $f(x) = y$. Wir haben somit die Abbildung

$$h : N \rightarrow M, y \mapsto x$$

konstruiert. Nach Konstruktion gilt dann für alle $y \in N$

$$f(h(y)) = f(x) = y,$$

also ist h eine Rechtsinverse zu f . Gäbe es nun $y_1, y_2 \in N$ mit $h(y_1) = h(y_2) = x$, so folgt $y_1 = f(x) = y_2$, also ist h injektiv.

Sei nun umgekehrt $h : N \rightarrow M$ eine Rechtsinverse zu f . Für $y \in N$ gibt es dann ein $x = h(y)$ mit $f(x) = f(h(y)) = y$, also ist f surjektiv.

(iii) Sei zunächst f bijektiv. Nach Lemma 1.37 wissen wir dann, dass es zu jedem $y \in N$ das Urbild $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element enthält, das wir mit x bezeichnen. Damit ist

$$g : N \rightarrow M, \quad y \mapsto x, \quad f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$$

eine wohldefinierte Abbildung. Diese erfüllt nach Konstruktion

$$g(f(x)) = x \text{ für alle } x \in M \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y \text{ für alle } y \in N.$$

Damit ist die Abbildung g sowohl Rechts- als auch Linksinverse von f .

Besitzt umgekehrt f eine Inverse, dann ist diese insbesondere eine Linksinverse, also ist nach (i) f injektiv. Die Inverse ist aber ebenso insbesondere Rechtsinverse, also ist f nach (ii) surjektiv, insgesamt also bijektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung eindeutig bestimmt und selbst wieder bijektiv ist. Gäbe es zwei Inverse Abbildungen $g, \tilde{g} : N \rightarrow M$, so sei $y \in N$. Da f bijektiv ist, gibt es dann genau ein $x \in M$ mit $f(x) = y$. Es gilt also

$$g(y) = g(f(x)) = x = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(y).$$

Also sind die Abbildungen g und \tilde{g} gleich.

Da nach Definition f sowohl Links- als auch Rechtsinverse von $g = f^{-1}$ ist, folgt nach dem schon Bewiesenen, dass in der Tat f^{-1} bijektiv ist mit $(f^{-1})^{-1} = f$.

q.e.d.

Beispiel 1.40. 1. Vorgreifend auf späteren Stoff der Vorlesung bzw. rückgreifend auf Stoff, der aus der Schule bekannt sein sollte, betrachten wir zunächst die Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto e^x.$$

Diese besitzt bekanntlich eine linksinverse Funktion, die Logarithmusfunktion

$$g : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log x.$$

Hierbei ist $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$, eine Bezeichnung, die wir auch in Zukunft gelegentlich verwenden werden. Es gilt dann

$$\log(e^x) = x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Also ist die Exponentialfunktion nach Satz 1.39 injektiv. Allerdings gilt nicht für alle $x \in \mathbb{R}$ auch $e^{\log x} = x$, denn für $x \leq 0$ ist der Logarithmus gar nicht definiert. In der Tat ist die Exponentialfunktion wie oben definiert **nicht** surjektiv, sie besitzt also keine Rechtsinverse.

2. Betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x + 2 & x < -1 \\ -x & -1 \leq x < 1 \\ 2x - 3 & x \geq 1. \end{cases}$$

Betrachten wir dazu die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x - 2 & x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x \geq 1. \end{cases}$$

Ist dann $x < 1$, so ist $g(x) = x - 2 < -1$, also gilt

$$f(g(x)) = (x - 2) + 2 = x.$$

Für $x \geq 1$ gilt entsprechend $g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \geq 2 > 1$, also haben wir

$$f(g(x)) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) - 3 = x.$$

Die Funktion g ist also eine Rechtsinverse zu f , f ist somit nach Satz 1.39 surjektiv. Wie man leicht nachrechnet, ist g aber nicht linksinvers zu f , f ist also **nicht** injektiv, was man auch an den Funktionsgraphen direkt erkennen kann.

3. Wir betrachten die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x - 4$$

und

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}.$$

Dann gilt einerseits für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

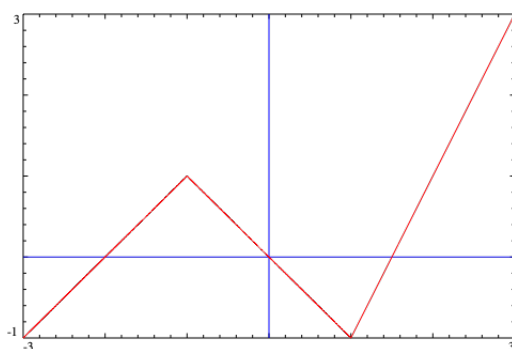
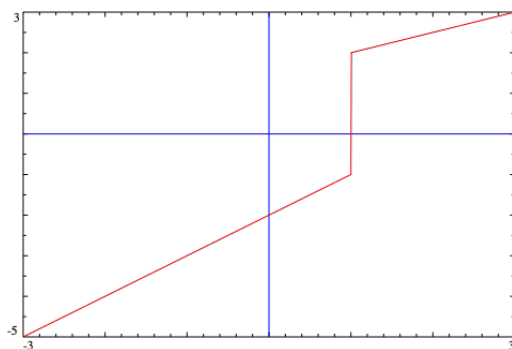
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \right) - 4 = x,$$

also ist g eine Rechtsinverse zu f . Andererseits haben wir auch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{3}(3x - 4) + \frac{4}{3} = x,$$

so dass g auch eine Linksinverse zu f ist.

Damit ist g eine Inverse zu f , es gilt also $g = f^{-1}$ und f und g sind nach Satz 1.39 beide bijektiv.

Abbildung 1.11: Graph der Funktion f Abbildung 1.12: Graph der Funktion g

Kapitel 2

Die natürlichen Zahlen und vollständige Induktion

In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst etwas genauer mit den wohlvertrauten natürlichen Zahlen \mathbb{N} beschäftigen und diese insbesondere, jedenfalls andeutungsweise, aus dem „Nichts“, d.h. der leeren Menge, konstruieren. Mit ihnen lernen wir danach ein extrem wichtiges Beweisprinzip kennen, das man immer wieder anwenden wird, die vollständige Induktion.

2.1 Konstruktion der natürlichen Zahlen

Natürlich kennen alle Leser*innen dieses Skriptes die natürlichen Zahlen. Aber es kann von Vorteil sein, sie rein aus den Grundlagen der Mengenlehre aus dem letzten Kapitel zu konstruieren. Die wesentliche Eigenschaft der natürlichen Zahlen ist im Wesentlichen das Zählen. Man beginnt bei 1 (oder bei 0) und bildet dann zu jeder Zahl immer die nächstgrößere, ihren **Nachfolger**.

Wir wollen dies nun formal definieren bzw. axiomatisieren, basierend auf den so genannten PEANO-Axiomen, die PEANO zuerst 1889 aufgestellt hat.

Definition 2.1 (PEANO-Axiome). Die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen ist durch folgende Eigenschaften beschrieben.

- (i) Es existiert ein Element $1 \in \mathbb{N}$.
- (ii) Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist ihr **Nachfolger** $S(n)$ wieder eine natürliche Zahl.^a
- (iii) 1 ist nicht der Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl:

$$\forall n \in \mathbb{N} : S(n) \neq 1.$$

(iv) Die Nachfolger-Abbildung S ist injektiv, d.h. für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$S(m) = S(n) \Rightarrow m = n.$$

(v) Für jede Menge X mit $1 \in X$, so dass für $x \in X$ auch $S(x) \in X$ gilt, folgt $\mathbb{N} \subseteq X$.

^aMan ist versucht, hier $n + 1$ zu schreiben, aber zu diesem Zeitpunkt ist die Operation $+$ noch nicht definiert.

Bemerkung 2.2. (i) Mit den gleichen Axiomen, bei denen man lediglich 1 durch 0 ersetzt, lassen sich auch die natürlichen Zahlen mit 0, \mathbb{N}_0 , definieren.

(ii) Bei der Formulierung des PEANO-Axioms (v) haben wir formal etwas unsauber angenommen, dass die Nachfolger-Abbildung S auf X definiert werden kann. Dieses Axiom nennt man auch das **Induktionsprinzip**, auf das wir in Abschnitt 2.2 genauer eingehen wollen.

Der ungarische Mathematiker JOHN VON NEUMANN schlug folgendes mengentheoretisches Modell für die natürlichen Zahlen vor. Zur Verdeutlichung, dass es sich hierbei um ein Modell handelt, schreiben wir hier die Zahlen fettgedruckt und in blau, um sie von den „üblichen“ Zahlen zu unterscheiden. Laut VON NEUMANN setzt man sukzessive

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &:= \emptyset, \\ \mathbf{1} &:= S(\mathbf{0}) = \{\emptyset\}, \\ \mathbf{2} &:= S(\mathbf{1}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ \mathbf{3} &:= S(\mathbf{2}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \\ &\vdots \\ \mathbf{n+1} &:= S(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}. \end{aligned}$$

Die natürlichen Zahlen im üblichen Sinne erhält man aus dem VON NEUMANN-Modell, indem man die Elemente in den Mengen zählt,

$$n = \#\mathbf{n}.$$

Proposition 2.3. Die Menge $\mathbb{N}_0 := \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots\}$ aus dem VON NEUMANN-Modell erfüllt die PEANO-Axiome für \mathbb{N}_0 .

Beweisskizze Nach Konstruktion haben wir eine 0 in \mathbb{N}_0 , nämlich $\mathbf{0}$. Die Nachfolger-Abbildung ist explizit angegeben durch $S(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}$. Ebenfalls ist klar, dass kein $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ die leere Menge ist, also ist $\mathbf{0} = \emptyset$ nicht der Nachfolger irgendeiner natürlichen Zahl.

Seien nun $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbb{N}_0$ mit $S(\mathbf{m}) = S(\mathbf{n})$. Nach Definition der Nachfolgerabbildung gilt somit

$$m \cup \{\mathbf{m}\} = \mathbf{n} \cup \{\mathbf{n}\}.$$

Sei nun $x \in \mathbf{m}$. Dann gilt auch $x \in S(\mathbf{m})$ und damit $x \in S(\mathbf{n}) = n \cup \{\mathbf{n}\}$. Es folgt also $x \in \mathbf{n}$ oder $x \in \{\mathbf{n}\}$, also $x = n$. Wäre nun $x = \mathbf{n}$, so folgt natürlich $\mathbf{n} \in \mathbf{m}$. Nach Definition der Nachfolgerabbildung gilt dann aber entweder $S(\mathbf{n}) = S(\mathbf{m}) \in \mathbf{m}$ oder $S(\mathbf{n}) = S(\mathbf{m}) = \mathbf{m}$, was aber beides nicht sein kann (den Beweis hierfür lassen wir hier aus). Die Annahme, dass $x = \mathbf{n}$ gilt, führt damit zu einem Widerspruch, also kann nur $x \in \mathbf{n}$ gelten, also folgt $\mathbf{m} \subseteq \mathbf{n}$. Dasselbe Argument mit vertauschten Rollen von \mathbf{m} und \mathbf{n} liefert auch die umgekehrte Inklusion, $\mathbf{n} \subseteq \mathbf{m}$, also insgesamt $\mathbf{m} = \mathbf{n}$. Damit ist die Nachfolgerabbildung injektiv.

Das 5. PEANO-Axiom ist nach Konstruktion erfüllt, da \mathbb{N}_0 genau aus den sukzessiven Nachfolgern von $\mathbf{0}$ besteht.

q.e.d.

In der Tat ist das VON NEUMANN-Modell der natürlichen Zahlen keineswegs das einzig mögliche und auch nicht das einzig sinnvolle. Man kann allerdings zeigen, dass alle Modelle der natürlichen Zahlen, also Mengen die den PEANO-Axiomen genügen, **isomorph** sind, das heißt, sie sind zwar nicht unbedingt unbeding gleich im wörtlichen Sinne (man beachte: 1 in Definition 2.1 ist nur ein formales Symbol, man hätte es ebenso gut auch etwa ♠ nennen können), aber sie sind gleich bis auf Änderung der Bezeichnungen.

Im Folgenden fassen wir, wie auch zuvor \mathbb{N} und \mathbb{N}_0 wieder als die Menge der natürlichen Zahlen ohne bzw. mit 0 im üblichen Sinne auf und schreiben wie üblich $n + 1$ statt $S(n)$.

Bemerkung 2.4. Die vertrauten Rechenoperationen $+$ und \cdot auf den natürlichen Zahlen lassen sich über die PEANO-Axiome bzw. die Nachfolgerabbildung S definieren. Hierzu benötigt man allerdings die schon erwähnte vollständige Induktion, die im folgende Abschnitt eingeführt wird. Damit kann man dann auch beweisen, dass diese Rechenoperationen alle üblichen Rechenregeln, wie etwa dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ $a + b = b + a$ gilt, erfüllen. Dies würde allerdings an dieser Stelle zu viel Zeit kosten, weshalb wir ab sofort die üblichen Rechenregeln für die Addition und Multiplikation in den natürlichen Zahlen, sowie die natürliche Anordnung $1 < 2 < 3 < \dots$ auf \mathbb{N} als bekannt voraussetzen.

2.2 Das Prinzip der vollständigen Induktion

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem Prinzip der vollständigen Induktion auseinandersetzen, das aus dem 5. PEANO-Axiom (siehe Definition 2.1) folgt:

Sei $A(n)$ eine Aussageform, die von einer natürlichen Zahl n abhängt. Wir betrachten dann die Menge

$$X := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Gilt dann $1 \in X$ und für jedes $x \in X$ folgt $x + 1 \in X$, so folgt nach dem 5. PEANO-Axiom $\mathbb{N} \subseteq X$, also haben wir $X = \mathbb{N}$. Nach Definition von X folgt dann, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Man kann sich dies anhand einer (idealisierten, unendlich langen) Reihe Dominosteine veranschaulichen: Die Tatsache, dass der n -te Dominostein umfällt steht dafür, dass die Aussage $A(n)$ wahr ist. Wenn man nun den ersten Dominostein umstößt (also sicherstellt, dass die Aussage $A(1)$ gilt) und weiß, dass wenn für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ mit dem n -ten auch der $(n + 1)$ -te Dominostein umfällt, dann folgt die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. Denn dass der 1. Stein umfällt wissen wir schon. Dann folgt aber, dass auch der 2. umfällt. Wenn der 2. umfällt, fällt auch der 3., wenn der 3. umfällt, fällt auch der 4., und so weiter. Die Kette kann auch nicht abbrechen, da ja mit jedem umgefallenen Stein der nächste auch umfallen muss. Damit fallen alle Steine um.

Das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kommt immer wieder vor und ist entsprechend sehr wichtig zu begreifen. Wir illustrieren es zunächst an einigen Beispielen. Zuvor benötigen wir allerdings noch etwas neue Notation.

Definition 2.5. Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Abbildung und $m, n \in \mathbb{N}$.

- (i) Wir schreiben dann für die **Summe** der Werte von f zwischen m und n abkürzend

$$\sum_{k=m}^n f(k) := f(m) + f(m+1) + \dots + f(n).$$

Ist $m > n$, so setzen wir per Definition $\sum_{k=m}^n f(k) := 0$.

- (ii) Wir schreiben dann für das **Produkt** der Werte von f zwischen m und n abkürzend

$$\prod_{k=m}^n f(k) := f(m) \cdot f(m+1) \cdot \dots \cdot f(n).$$

Ist $m > n$, so setzen wir per Definition $\prod_{k=m}^n f(k) := 1$.

Wir kommen nun zum angekündigten Beispiel.

Beispiel 2.6. Wir wollen beweisen, dass wir für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen folgende Formel haben,

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Wir verwenden dazu das Prinzip der vollständigen Induktion.

Wir beginnen mit dem **Induktionsanfang**: Wir beweisen oder vielmehr überprüfen die Aussage zunächst für $n = 1$. Die linke Seite von (1) lautet für $n = 1$

$$\sum_{k=1}^1 k = 1,$$

während die rechte Seite ebenfalls

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1.$$

Die Aussage ist also für $n = 1$ wahr.

Wir formulieren nun die **Induktionsvoraussetzung** oder **Induktionshypothese**: Wir nehmen an, dass die Gleichung (1) für eine natürliche Zahl n richtig ist.

Wir kommen nun zum **Induktionsschritt**, in dem wir, ausgehend von der Induktionsvoraussetzung, zeigen, dass (1) auch für den Nachfolger von n , also $n + 1$ gilt: Für $n + 1$ anstelle von n liefert die linke Seite von (1)

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n + 1).$$

Nach unserer Induktionsvoraussetzung wissen wir, dass

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

gilt, also folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n + 1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Wir erhalten also genau die rechte Seite von (1) für $n + 1$ anstelle von n . Die ausgehend von der Induktionsvoraussetzung haben wir also die Aussage für $n + 1$ bewiesen.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 2.7. Der schematische Aufbau eines Beweises durch vollständige Induktion ist im Wesentlichen immer gleich. Er besteht aus folgenden Schritten:

1. **Induktionsanfang:** Zeige die Behauptung für $n = 1$.
2. **Induktionsvoraussetzung:** Nehmen wir an, die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.¹
3. **Induktionsschritt:** Ausgehend von der Induktionsvoraussetzung, zeige die Aussage für $n + 1$ anstelle von n .

Bemerkung 2.8. Vollständige Induktion kann man natürlich ebenso verwenden, um Aussagen für alle $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen. Der Induktionsanfang ist dann der Fall $n = 0$, Induktionsvoraussetzung und Induktionsschluss bleiben gleich (mit \mathbb{N}_0 statt \mathbb{N}).

Andererseits gibt es auch Aussagen, die für natürliche Zahlen $n \geq m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gelten. Auch diese kann man mit vollständiger Induktion beweisen, wenn man den Fall $n = m$ als Induktionsanfang wählt. Zum Beispiel zeigen Sie in der Übung die Ungleichung

$$2^n \geq n^2, \quad n \geq 4.$$

¹Es reicht, diesen genauen Satz (oder eine Variante davon) im Beweis aufzuschreiben. Man kann ihn aber formal nicht ersatzlos weglassen!

Bemerkung 2.9. Auch wenn es sicher historisch nicht ganz korrekt ist, wird die in Beispiel 2.6 bewiesene Formel immer wieder dem jungen CARL FRIEDRICH GAUSS zugeschrieben, der sie angeblich entdeckte, als sein Lehrer der Klasse die Aufgabe stellte, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Der junge GAUSS hat daraufhin binnen weniger Augenblicke die obige Formel gefunden und das Ergebnis, 5050, sofort berechnen können.

Die Formel war allerdings schon lange vor GAUSS bekannt, und auch die gerade wiedergegebene Anekdote hat sich vermutlich nicht genauso zugetragen.

Während das obige Beispiel mehr zu Illustrationszwecken dient, wollen wir nun ein Resultat mittels vollständiger Induktion beweisen, das im Folgenden immer wieder auftreten wird.

Satz 2.10 (Geometrische Summenformel). Für beliebiges $x \neq 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

wobei wir stets x^0 als 1 verstehen.

Beweis. Induktionsanfang: Wir zeigen die Aussage für $n = 0$. Wir erhalten dann

$$x^0 = 1 = \frac{1 - x^1}{1 - x},$$

also eine wahre Aussage, die Behauptung stimmt also für $n = 0$.

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Induktionsschluss: Wir zeigen aufgrund der Induktionsvoraussetzung die Aussage für $n + 1$. Es gilt dann

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \stackrel{IV}{=} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1},$$

wobei wir im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet haben. Diesen Ausdruck können wir nun weiter umformen und erhalten

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1} + (1 - x)x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x},$$

also ist die Behauptung für $n + 1$ gezeigt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage somit für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
q.e.d.

Wir kommen nun zu einem wichtigen Satz, der immer wieder gebraucht wird und dessen Beweis ebenfalls durch vollständige Induktion erbracht werden kann. Zuvor benötigen wir noch etwas Notation.

Definition 2.11. (i) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den Ausdruck $n!$ (lies „ n Fakultät“) als

$$n! := \prod_{k=1}^n k.$$

Nach Definition gilt dann $0! = 1$ und wir haben

$$1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, \dots$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$(n+1)! = (n+1)n!.$$

(ii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ definieren wir den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k}$ (lies „ n über k “) als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Bemerkung 2.12. Man kann die Definition Binomialkoeffizienten etwas umschreiben als

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\prod_{j=1}^n j}{k! \left(\prod_{j=1}^{n-k} j \right)} = \frac{1}{k!} \prod_{j=n-k+1}^n j = \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^k (n-j+1)$$

Diese Definition ergibt auch für $k > n$ Sinn und liefert in diesem Fall $\binom{n}{k} = 0$.

Wir fassen im folgenden Lemma einige Eigenschaften des Binomialkoeffizienten zusammen.

Lemma 2.13. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt Folgendes.

(i) Wir haben

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{n}{1} = n.$$

(ii) Der Binomialkoeffizient ist symmetrisch:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(iii) Für $k < n$ gilt

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Beweis.

Beweis. Induktionsanfang: Für $n = 0$ haben wir

$$(x + y)^0 = 1 = x^0 y^0.$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}_0$ wahr.

Induktionsschluss: Wir zeigen die Aussagen für $n + 1$. Wir haben

$$(x + y)^{n+1} = (x + y)^n \cdot (x + y) \stackrel{IV}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot (x + y),$$

wobei wir im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung benutzt haben. Wir multiplizieren nun die Klammern aus und erhalten

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \binom{n}{n} x^{n+1} y^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n+1-k} + \binom{0}{0} x^0 y^{n+1-0} \\ &\stackrel{2.13}{=} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + y^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}, \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt Lemma 2.13 (iii) verwendet haben. Das ist aber genau die Behauptung für $n + 1$, also folgt die Behauptung für alle n nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

q.e.d.

Wir halten hiervon noch zwei leichte Folgerungen fest, die Identitäten für Binomialkoeffizienten liefern.

Korollar 2.16. *Es gelten die folgenden Identitäten für alle $n \in \mathbb{N}_0$:*

(i) *Wir haben*

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

(ii) *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Beweis. Für (i) setze man im Binomischen Lehrsatz $x = y = 1$ und für (ii) wähle man $x = 1$ und $y = -1$.

q.e.d.

Bemerkung 2.17. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ spielt unter anderem in der Kombinatorik eine wichtige Rolle. Ist M eine endliche Menge mit n Elementen, so gibt es genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von M mit k Elementen. Aus Korollar 2.16 (i) folgt hieraus direkt, dass dann

$$\#\mathfrak{Pot}(M) = 2^n$$

gilt.

Zum Abschluss betrachten wir noch eine Variante der vollständigen Induktion. Bei dieser ist die Induktionsannahme etwas verändert: Man nimmt nicht an, die Aussage sei für ein n gezeigt und man zeigt sie für $n + 1$, sondern man geht davon aus, für ein n sei die Aussage für **alle** $m \leq n$ gezeigt, und man zeigt, dass sie auch für $n + 1$ gilt. Dies nennt man manchmal auch **starke Induktion**.

Beispiel 2.18. Wir wollen zeigen, dass jede natürliche Zahl $n \geq 2$ einen Teiler besitzt, der eine Primzahl ist ²

Induktionsanfang $n = 2$: Die Zahl $n = 2$ ist offenbar selbst eine Primzahl, also ist die Aussage für $n = 2$ wahr.

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte die Aussage für alle $2 \leq m \leq n$.

Induktionsschritt: Wir zeigen die Aussage für $n + 1$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Ist $n + 1$ selbst eine Primzahl, so ist nichts zu zeigen, da $n + 1$ dann ein Primteiler von sich selbst ist.
2. Ist $n + 1$ keine Primzahl, so gibt es Zahlen $d, q \in \{2, \dots, n\}$ mit $d \cdot q = n + 1$, weil $n + 1$ laut Annahme einen nicht-trivialen Teiler besitzen muss. Dann können wir aber die

²Zur Erinnerung: Für $n \in \mathbb{N}$ heißt $d \in \mathbb{N}$ ein **Teiler** von n , wenn es ein $q \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $n = d \cdot q$ gilt. Primzahlen sind solche natürlichen Zahlen, die nur 1 und sich selbst als Teiler haben.

Induktionsvoraussetzung auf d anwenden und finden, dass d einen Primteiler besitzt. Jeder Teiler von d ist natürlich auch ein Teiler von $n + 1$, also besitzt auch $n + 1$ einen Primteiler, was wir behauptet hatten.

In beiden Fällen gilt die Behauptung also auch für $n + 1$, so dass wir nach dem starken Induktionsprinzip schließen können, dass sie für alle $n \geq 2$ gilt.

Kapitel 3

Die ganzen und rationalen Zahlen

In vielen Teilbereichen der Mathematik geht es am Ende darum, irgendeine Art von Gleichung zu lösen. In den natürlichen Zahlen stößt man hierbei schnell an seine Grenzen. Die Gleichung

$$x + 5 = 7$$

können wir zwar (offensichtlich) in den natürlichen Zahlen lösen, die sehr ähnlich aussehende Gleichung

$$x + 7 = 5$$

jedoch offenbar nicht. Um dem abzuhelpfen, erweitern wir nun nach und nach den Bereich der natürlichen Zahlen.

3.1 Die ganzen Zahlen

Die **ganzen Zahlen** bezeichnet man üblicherweise mit dem Symbol \mathbb{Z} und man fasst darin alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$, die 0, und alle **Negativen** der natürlichen Zahlen $-n$, $n \in \mathbb{N}$ zusammen,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Historisch gesehen ist das Konzept der negativen Zahl lange nicht akzeptiert worden. Während schon die alten Griechen mit irrationalen Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder π (dazu später mehr) gearbeitet haben, haben sich die negativen Zahlen erst mit FIBONACCI im 13. Jahrhundert begonnen sich durchzusetzen. Der Grund dafür war hauptsächlich, dass Zahlen immer geometrisch interpretiert wurden, also z.B. als Länge einer Strecke. Negative Zahlen ergeben hier natürlich keinen Sinn.

Die ganzen Zahlen bilden nun den Prototyp einer sehr wichtigen algebraischen Struktur. Man kann in ihnen wie gewohnt addieren und multiplizieren, zusätzlich gibt es mit der Subtraktion eine Umkehrung der Addition. Diese Eigenschaften lassen sich abstrahieren zu folgender Definition.

Definition 3.1. Sei R eine Menge und $+$: $R \times R \rightarrow R$, $(a, b) \mapsto a + b$ (genannt **Addition**) und \cdot : $R \times R \rightarrow R$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ (genannt **Multiplikation**) zwei Verknüpfungen auf R . Wir nennen dann $(R, +, \cdot)$ einen **Ring**, falls für alle $a, b, c \in R$ folgendes erfüllt ist:

- (A1) Es gilt stets $a + b = b + a$ (**Kommutativgesetz der Addition**)
- (A2) Es gilt stets $(a + b) + c = a + (b + c)$ (**Assoziativgesetz der Addition**)
- (A3) Es existiert ein Element $0 \in R$, so dass stets $a + 0 = a$ gilt (**neutrales Element der Addition**).
- (A4) Für jedes $a \in R$ existiert ein $b \in R$, so dass $a + b = 0$ gilt. Man nennt b dann das zu a **inverse Element** und schreibt dafür $-a$.
- (M1) Es gilt stets $a \cdot b = b \cdot a$ (**Kommutativgesetz der Multiplikation**)
- (M2) Es gilt stets $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (**Assoziativgesetz der Multiplikation**)
- (M3) Es existiert ein Element $1 \in R$, so dass stets $a \cdot 1 = a$ gilt. (**neutrales Element der Multiplikation**)
- (D) Es gilt stets $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. (**Distributivgesetz**)

Bemerkung 3.2. Die neutralen Elemente in einem Ring werden hier wie bei den ganzen Zahlen mit 0 und 1 bezeichnet. Sie sind allerdings im Allgemeinen nur abstrakt als Symbole aufzufassen und nicht tatsächlich als ganze Zahlen. Ebenso sind die Symbole für die Verknüpfungen nicht mit denen in den ganzen Zahlen gleichzusetzen.

Wir listen nun noch ein paar Eigenschaften von Ringen auf, die wahrscheinlich allen von den ganzen Zahlen her offensichtlich erscheinen mögen, die man für allgemeine Ringe tatsächlich beweisen kann und muss.

Proposition 3.3. Sei R ein Ring mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot . Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) Die neutralen Elemente für Addition und Multiplikation sind eindeutig bestimmt.
- (ii) Zu $a \in R$ existiert genau ein inverses Element. Insbesondere gilt $-0 = 0$.
- (iii) Es gilt für jedes $a \in R$ $-a = (-1) \cdot a$.
- (iv) Es gilt für alle $a \in R$ $a \cdot 0 = 0$.
- (v) Es gilt $-(-a) = a$.

Beweis.

- (i) Nehmen wir an, es gäbe ein weiteres neutrales Element $0'$ der Addition. Dann gilt $0 = 0 + 0'$, da $0'$ ein neutrales Element der Addition ist. Da 0 ebenfalls ein neutrales Element der Addition ist, gilt $0 + 0' = 0'$, also folgt insgesamt $0 = 0'$. Für das neutrale Element der Multiplikation geht man analog vor (Übung).
- (ii) Sei $a \in R$ beliebig und $b, b' \in R$ inverse Elements zu a , d.h. wir haben $a + b = 0$ und $a + b' = 0$. Insbesondere gilt dann $a + b = a + b'$. Addieren wir auf beiden Seiten der Gleichung b , so erhalten wir

$$b + (a + b) \stackrel{(A2)}{=} (b + a) + b = 0 + b \stackrel{(A3)}{=} b = b + (a + b') \stackrel{(A2)}{=} (b + a) + b' = 0 + b' \stackrel{(A3)}{=} b'.$$

Den Rest lassen wir als Übung.

q.e.d.

Eine sehr wichtige Eigenschaft der ganzen Zahlen, die in allgemeinen Ringen nicht unbedingt erfüllt ist, ist die so genannte **Nullteilerfreiheit**.

Proposition 3.4. *Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ ganze Zahlen. Gilt $a \cdot b = 0$, so folgt $a = 0$ oder $b = 0$.*

Beweis. Bekanntermaßen existiert eine natürliche Anordnung \leq auf den ganzen Zahlen, bzw. eine strikte Ordnung $<$. Diese erfüllt bekanntlich die Eigenschaft, dass für $a < b$ und $c > 0$ stets $ac < bc$ folgt, bzw. für $c < 0$ $ac > bc$. Gilt nun $a \neq 0$ und $b \neq 0$, so folgt hieraus entweder $ab > 0 \cdot b = 0$ oder $ab < 0 \cdot b = 0$, in jedem Falle aber $ab \neq 0$. Dies ist aber genau die Kontraposition der zu beweisenden Aussage, die damit ebenfalls bewiesen ist.

q.e.d.

3.2 Die rationalen Zahlen

Aus den ganzen Zahlen lassen sich nun auch die **rationalen Zahlen** \mathbb{Q} konstruieren, als Menge aller Brüche:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Die ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ heißt hierbei der **Zähler** des Bruches und $b \in \mathbb{N}$ heißt der **Nenner**. Zwei Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ fassen wir als gleich auf, wenn $a \cdot d = b \cdot c$ gilt (das entspricht dem aus der Schule bekannten Erweitern bzw. Kürzen von Brüchen). Die ganzen Zahlen lassen sich in die rationalen Zahlen einbetten, indem wir die ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit dem Bruch $\frac{n}{1}$ identifizieren.

Zwei Brüche werden bekanntlich addiert durch die Vorschrift

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

und multipliziert durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d},$$

wodurch \mathbb{Q} zu einem Ring wird. Hierbei ist wichtig zu beachten, dass wegen $b, d \neq 0$ auch der Nenner $b \cdot d$ der Summe bzw. des Produktes wegen Proposition 3.4 nicht 0 werden kann.

Brüche erlauben es nun, auch beliebige Gleichungen der Form $ax + b = c$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ zu lösen, nämlich durch den Bruch $\frac{c-b}{a}$.

Brüche ($\neq 0$) lassen sich bekanntlich auch multiplikativ invertieren, d.h. zu $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ existiert ein $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 1$ (nämlich $\frac{b}{a}$). Die rationalen Zahlen werden so zum prototypischen Beispiel einer weiteren algebraischen Struktur.

Definition 3.5. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Ring. Gelten zusätzlich die Eigenschaften

(M4) Für $a \neq 0$ existiert ein $b \in K$ mit $a \cdot b = 1$. Dann heißt b das zu a **multiplikativ inverse Element** und wir schreiben $b = a^{-1}$.

(N) Für die neutralen Elemente gilt $1 \neq 0$.

so nennen wir $(K, +, \cdot)$ einen **Körper**.

Bemerkung 3.6. Die Bedingung $1 \neq 0$ mag merkwürdig und offensichtlich erfüllt erscheinen, es folgt aber in der Tat nicht aus den Ringaxiomen in Definition 3.1, dass dies in einem allgemeinen Ring der Fall sein muss. Tatsächlich gibt es Ringe (im Wesentlichen genau einen), in denen $1 = 0$ gilt (Übung).

Beispiel 3.7. Wir betrachten die Menge $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ und erklären darauf zwei Verknüpfungen über die folgenden Tabellen:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Wir behaupten, dass $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ein Körper ist. Aus der Additions- bzw. Multiplikationstabelle sehen wir direkt, dass die Verknüpfungen $+$ und \cdot dem Kommutativgesetz genügen und auch, dass 0 und 1 jeweils die neutralen Elemente der Addition bzw. der Multiplikation sind. Die Elemente 0 und 1 sind beide jeweils additiv invers zu sich selbst, und 1 ist ebenfalls multiplikativ invers zu sich selbst (außer 1 gibt es hier kein Element $\neq 0$). Nachzurechnen, dass die Assoziativgesetze und das Distributivgesetz erfüllt sind, ist etwas mühselig, man kann es zum Beispiel, ähnlich wie bei einer Wahrheitstafel durch das Auflisten aller möglichen Fälle erledigen. Mit etwas mehr theoretischem Wissen kann man auch

direkt zeigen, dass für diesen (und viele andere endliche) Körper diese Regeln aus denen im Ring der ganzen Zahlen folgen, aber das wollen wir an dieser Stelle nicht vertiefen.

Bemerkung 3.8. Für spätere Zwecke halten wir fest, dass man auch in beliebigen Körpern Ausdrücke wie $n \cdot a$ und a^n für $n \in \mathbb{Z}$ genau so erklären kann, wie man es gewohnt ist:

$$n \cdot a := \begin{cases} \underbrace{a + \dots + a}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ 0 & n = 0 \\ (-n) \cdot (-a) & n < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ (a^{-1})^{-n} & n < 0. \end{cases}$$

Kapitel 4

Die reellen Zahlen

4.1 Irrationale Zahlen

Nicht alle Zahlen lassen sich als Brüche schreiben. Im Alten Griechenland, in der Schule der Pythagoreer um 500 v. Chr., ist man noch, in der Nachfolge von PYTHAGORAS davon ausgegangen: „Alles ist Zahl“, also dass sich alles durch ganze Zahlen oder Verhältnisse ganzer Zahlen beschreiben lässt. Angeblich wurde HIPPASOS, ein Pythagoreer, der entdeckte, dass das Verhältnis der Seitenlänge eines Pentagons zu seiner Diagonalen eben nicht so ausgedrückt werden kann, daraufhin vom Gott Poseidon bzw. schockierten anderen Pythagoreern im Meer ertränkt (historisch ist diese Anekdote wohl nicht, nicht einmal die Variante ohne göttliche Intervention). Auch das Seitenverhältnis eines Quadrates zu seiner Diagonale lässt sich nicht durch das Verhältnis ganzer Zahlen, also als Bruch darstellen. Wir wollen uns hier zunächst an den Beweis erinnern, einer der wenigen, die meist noch im Schulunterricht besprochen werden.

Proposition 4.1. *Die Zahl $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ ist nicht rational, d.h. es gibt keine ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.*

Beweis. Wir führen einen **Widerspruchsbeweis**, d.h. wir nehmen an, unsere Behauptung wäre falsch und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt. Da die Behauptung entweder wahr oder falsch sein muss, folgt dann, dass sie wahr sein muss.

Nehmen wir also an, es gibt $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Da $\sqrt{2}$ offenbar positiv ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $a, b \in \mathbb{N}$ gilt und zudem können wir annehmen, dass der Bruch vollständig gekürzt ist, also dass es keine natürliche Zahl $d > 1$ gibt, die a und b teilt¹. Wir können nun beide Seiten der Gleichung $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ quadrieren und etwas umsortieren und erhalten

$$2b^2 = a^2.$$

Damit ist a^2 eine gerade Zahl und eine Quadratzahl, also nach Bemerkung 1.6 durch 4 teilbar, also ist a durch 2 teilbar. Schreiben wir $a^2 = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}$, so erhalten wir

¹Eigentlich muss man das auch wieder beweisen, aber wir nehmen dies als bekannt an

$2b^2 = 4m$, also, indem wir die Gleichung durch 2 dividieren, $b^2 = 2m$. Damit ist b^2 gerade, also nach Bemerkung 1.6 durch 4 teilbar und somit ist b ebenfalls gerade. Wir hatten aber angenommen, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt ist, was aber nicht sein kann, wenn a und b beide gerade sind. Damit haben wir einen Widerspruch.

Damit muss unsere ursprüngliche Annahme, dass es $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, gibt mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, falsch gewesen sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

q.e.d.

Bemerkung 4.2. Es gibt auch sehr schöne Beweise für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, die sich evtl. auch für den Schulunterricht eignen. Der folgende stammt laut JOHN CONWAY von STANLEY TENNENBAUM.

Angenommen, $\sqrt{2}$ wäre rational. Dann gäbe es natürliche Zahlen $a, b > 0$ mit $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ oder anders ausgedrückt $a^2 = 2b^2$. Wir betrachten nun insgesamt drei Quadrate, eines mit Seitenlänge a und zwei mit Seitenlänge b , und arrangieren sie wie in Abbildung 4.1 skizziert. Die Seitenlänge des Quadrates, auf der sich die kleinen Quadrate mit Seitenlänge

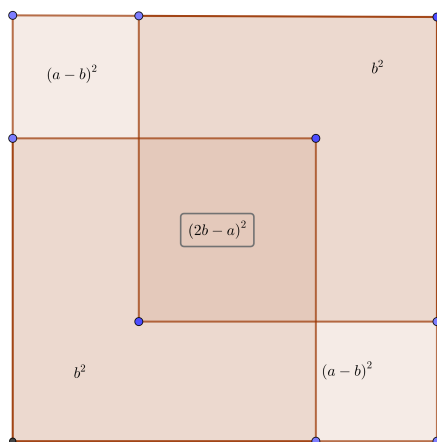


Abbildung 4.1: Irrationalität von $\sqrt{2}$ geometrisch

b überlappen, beträgt offenbar $b - (a - b) = 2b - a$ und wie man leicht nachrechnet, ist seine Fläche $(2b - a)^2$ genau doppelt so groß wie die Fläche eines der nicht überdeckten Quadrate

$$(2b - a)^2 = 2(a - b)^2.$$

So haben wir allerdings Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen konstruiert, von denen das größere genau den doppelten Flächeninhalt hat wie das kleine, die allerdings kleiner sind als die beiden Quadrate, mit denen wir begonnen haben.

Aus diesen Quadraten ließen sich wieder kleinere mit derselben Eigenschaft konstruieren. Das kann aber nicht sein, da die Seitenlängen ganzzahlig sind und daher nur endlich oft kleiner werden können.

4.2 Angeordnete Körper

Wenn man sich nun Zahlen als Punkte auf einer Geraden vorstellt (Zahlengerade), so gibt es nach Proposition 4.1 „Lücken“, wenn man nur rationale Zahlen betrachtet. Um diese Lücken zu schließen, führen wir die **reellen Zahlen** \mathbb{R} ein. Diese Konstruktion wollen wir etwas genauer untersuchen.

Zunächst einige neue Begrifflichkeiten, die wir zunächst abstrakt einführen wollen. Alle Eigenschaften sind für die vertraute Anordnung auf den reellen Zahlen erfüllt, also kann man im folgenden statt K auch konkreter an \mathbb{R} denken.

Definition 4.3. Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und sei $>$ eine Relation auf K , die folgende Eigenschaften erfüllt (**Anordnungsaxiome**)

(O1) Für alle $a \in K$ gilt **genau eine** der folgenden drei Bedingungen,

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0.$$

Im ersten Fall heißt a **positiv**, im dritten Fall **negativ**.

(O2) Für $a, b \in K$ mit $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a + b > 0$.

(O3) Für $a, b \in K$ mit $a > 0$ und $b > 0$ folgt $a \cdot b > 0$.

Dann nennen wir K einen **angeordneten Körper**.

Ist K ein angeordneter Körper, der die natürlichen Zahlen mit 0 so enthält, dass die Addition und Multiplikation in K eingeschränkt auf \mathbb{N}_0 der üblichen Addition und Multiplikation auf \mathbb{N}_0 entsprechen, und gilt zusätzlich die Eigenschaft

(O4) Für alle $a \in K$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n - a > 0$ gilt.

erfüllt ist, so nennen wir K **archimedisch angeordnet** (nach ARCHIMEDES VON SYRAKUS).

Wir benötigen ein wenig weitere Notation.

Definition 4.4. Sei K ein angeordneter Körper mit Anordnungsrelation $>$ und seien $a, b \in K$.

- (i) Wir schreiben $a > b$ und sagen a ist **größer** als b , falls $a - b > 0$ gilt.
- (ii) Wir schreiben $a < b$ und sagen a ist **kleiner** als b , falls $b - a > 0$ gilt.
- (iii) Wir schreiben $a \geq b$ und sagen a ist **größer oder gleich** b , falls $a > b$ oder $a = b$ gilt.
- (iv) Wir schreiben $a \leq b$ und sagen a ist **kleiner oder gleich** b , falls $a < b$ oder $a = b$ gilt.

Wir halten folgende einfache Eigenschaften der Anordnung fest.

Lemma 4.5. Sei K ein angeordneter Körper mit Anordnungsrelation $>$ und seien $a, b, c, d \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) Es gilt $a > 0$ genau dann, wenn $-a < 0$ gilt.
- (ii) Aus $a > b$ und $b > c$ folgt auch $a > c$. Die Relation $>$ ist also transitiv (vgl. Definition 1.23).
- (iii) Für $a > 0$ folgt auch $a^{-1} > 0$.
- (iv) Aus $a > b > 0$ folgt $a^{-1} < b^{-1}$.
- (v) Für beliebiges $c \in K$ folgt aus $a > b$ auch $a + c > b + c$.
- (vi) Gilt $a > b$ und $c > 0$, so gilt auch $ac > bc$. Gilt stattdessen $c < 0$, so gilt $ac < bc$.
- (vii) Aus $a > b$ und $c > d$ folgt $a + c > b + d$.
- (viii) Für $a > b > 0$ und $c > d > 0$ gilt $ac > bd$.
- (ix) Für $a \neq 0$ gilt $a^2 := a \cdot a > 0$. Insbesondere ist stets $1 = 1^2 > 0$.

Beweis.

- (i) Nach Definition 4.4 (ii) gilt $-a < 0$ genau dann, wenn $0 - (-a) > 0$ gilt. Die linke Seite ist aber genau a , also folgt wie behauptet die Äquivalenz

$$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -a < 0.$$

- (ii) Seien $a > b$ und $b > c$. Es folgt also $a - b > 0$ und $b - c > 0$. Nach dem Axiom (O2) in Definition 4.3 folgt also auch $(a - b) + (b - c) = a - c > 0$, also $a > c$ wie behauptet.

(iii) Sei $a > 0$. Dann ist sicher $a^{-1} \neq 0$, denn sonst wäre

$$a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0 \neq 1.$$

Wäre $a^{-1} < 0$, so folgt nach Axiom (O3) in Definition 4.3 auch $1 = a \cdot a^{-1} < 0$ und damit $a < 0 \cdot a = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Also muss wegen (O1) $a^{-1} > 0$ gelten.

(iv) Sei $a > b > 0$. Dann gilt wegen (iii) auch $a^{-1} > 0$ und $b^{-1} > 0$. Wegen des Axioms (O3) folgt damit auch $a^{-1}b^{-1} > 0$, und damit aus der Voraussetzung und wieder (O3):

$$b^{-1} = a(a^{-1}b^{-1}) > b(a^{-1}b^{-1}) = a^{-1},$$

wie behauptet.

Den Rest lassen wir als Übung.

q.e.d.

Für archimedisch angeordnete Körper gelten zusätzlich folgende Eigenschaften. Zunächst haben wir eine wichtige Ungleichung, benannt nach JAKOB I. BERNOULLI.

Lemma 4.6 (BERNOULLI-Ungleichung). *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit Anordnungsrelation $>$. Dann gilt für $x \in K$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ stets*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ sind beide Seiten offensichtlich gleich, also gilt die Behauptung.

Induktionsvoraussetzung: Angenommen, die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss: Wir zeigen die Behauptung für $n + 1$ anstelle von n . Es gilt dann

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n \cdot (1 + x) \\ &\stackrel{IV}{\geq} (1 + nx) \cdot (1 + x) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &\geq 1 + nx + x = 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

also, wie wir zeigen wollten, die Aussage für $n + 1$. Bei der Verwendung der Induktionsvoraussetzung haben wir ebenfalls verwendet, dass $x \geq -1$, als $1 + x \geq 0$ gilt (vgl. Lemma 4.5(viii)). Im letzten Schritt haben wir hierbei verwendet, dass $x^2 \geq 0$ gilt (vgl. Lemma 4.5(ix)) und damit auch $nx^2 \geq 0$ gilt (warum?).

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Aussage somit für alle n .

q.e.d.

Damit können wir das Folgende beweisen.

Lemma 4.7. *Sei K ein archimedisch angeordneter Körper mit Anordnungsrelation $>$. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (i) *Für $a, b \in K$ mit $a > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \cdot a > b$.*
- (ii) *Sei $\varepsilon \in K$ mit $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*
- (iii) *Seien $a, b \in K$ mit $a > 1$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > b$.*
- (iv) *Sei $a, \varepsilon \in K$ mit $a, \varepsilon > 0$ und zusätzlich $a < 1$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n < \varepsilon$.*

Beweis.

- (i) Laut dem Axiom (O4) in Definition 4.3 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a}$ (man beachte, dass $a \neq 0$ gilt!). Da $a > 0$ gilt, folgt wegen 4.5 (viii) für dieses n auch $n \cdot a > b$, also folgt die Behauptung.
- (ii) Dies folgt sofort aus (i) für $b = 1$ und $a = \varepsilon$.
- (iii) Nach dem Axiom (O4) existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{b}{a-1}$ (man beachte auch hier, dass wegen $a > 1$ $a - 1 > 0$ gilt). Dann folgt mit der BERNOULLI-Ungleichung 4.6

$$a^n = (1 + (a - 1))^n \stackrel{4.6}{\geq} 1 + n(a - 1) > 1 + \frac{b}{a - 1}(a - 1) = b + 1 > b.$$

- (iv) Dies folgt direkt aus (iii), angewandt auf a^{-1} statt a und ε^{-1} statt b .

q.e.d.

Alles, was wir bisher über angeordnete Körper gesagt haben, gilt z.B. auch für die rationalen Zahlen. Wir wollen nun zu einer Eigenschaft kommen, die die rationalen Zahlen nicht erfüllen. Dazu benötigen wir einige neue Begriffe.

Definition 4.8. Sei K ein angeordneter Körper mit Anordnungsrelation $>$ und $M \subseteq K$ eine Teilmenge von K .

- (i) Ein Element $B \in K$ heißt eine **obere Schranke** für M , falls für alle $x \in M$ die Abschätzung $x \leq B$ gilt. Existiert ein solches B , so nennen wir M **nach oben beschränkt**.

- (ii) Ein Element $b \in K$ heißt eine **untere Schranke** für M , falls für alle $x \in M$ die Abschätzung $b \leq x$ gilt. Existiert ein solches b , so heißt M **nach unten beschränkt**.
- (iii) Ist M nach oben und nach unten beschränkt, so nennen wir M einfach **beschränkt**.
- (iv) Existiert ein $B \in M$ mit $x \leq B$ für alle $x \in M$, so ist B ein **maximales Element** von M und wir schreiben dafür $\max M$.
- (v) Existiert ein $b \in M$ mit $b \leq x$ für alle $x \in M$, so heißt b ein **minimales Element** von M und wir schreiben dafür $\min M$.
- (vi) Sei M nach oben beschränkt und $B \in K$ eine obere Schranke. Gilt für alle oberen Schranken $C \in K$ von M die Ungleichung $B \leq C$, ist B also die **kleinste obere Schranke für M** , so heißt B das **Supremum** von M und schreiben dafür $\sup M$.
- (vii) Sei M nach unten beschränkt und $b \in K$ eine untere Schranke. Gilt für alle unteren Schranken $c \in K$ von M die Ungleichung $b \geq c$, ist b also die **größte untere Schranke für M** , so heißt b das **Infimum** von M und schreiben dafür $\inf M$.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 4.9. In diesem Beispiel betrachten wir den Körper \mathbb{Q} der rationalen Zahlen mit der üblichen Anordnungsrelation.

1. Wir betrachten die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 7\}$. Dann ist nach der Definition der Menge 7 das Maximum von M . Die Menge M ist also nach oben beschränkt. 7 ist auch das Supremum von M : Ist nämlich B eine obere Schranke von M , so ist sicherlich nach Definition von M $B \geq 7$ und 7 ist eine obere Schranke, also muss es die kleinste obere Schranke sein. Die Menge M ist allerdings offenbar nicht nach unten beschränkt, also gibt es kein Minimum und kein Infimum (vgl. Bemerkung 4.10).

Betrachten wir die leicht modifizierte Menge $N = \{x \in \mathbb{Q} : x < 7\}$, so ist die Menge immer noch nach oben beschränkt (7 ist immer noch eine obere Schranke), aber nicht nach unten. Das Supremum von N ist wieder 7 , allerdings hat die Menge N **kein** Maximum: Angenommen, es gäbe ein Maximum $B \in N$. Dann wäre nach Definition von N $7 - B > 0$. Dann ist aber auch $B < B + \frac{7-B}{2} = \frac{7+B}{2} < 7$, also gilt $B' = B + \frac{7-B}{2} \in N$ und $B' > B$. Das kann aber nicht sein, wenn B das Maximum von N gewesen sein soll.

2. Wir betrachten die Menge $M = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \subseteq \mathbb{Q}$. Für $x \in M$ gilt dann sicher $-2 \leq x \leq 2$ (warum?). Die Menge M ist also beschränkt. Allerdings gibt es kein Maximum, denn dazu müsste $x^2 = 2$ für ein $x \in \mathbb{Q}$ gelten, und wir haben in

Proposition 4.1 gesehen, dass so ein x nicht existiert. Es gibt allerdings auch kein Supremum: Angenommen, $B \in \mathbb{Q}$ wäre das Supremum von M . Dann kann nicht $B^2 > 2$ gelten, denn dann wäre auch $B - \frac{B^2-2}{2B} < B$ eine obere Schranke, denn es gilt

$$\left(B - \frac{B^2-2}{2B}\right)^2 = B^2 - (B^2-2) + \left(\frac{B^2-2}{2B}\right)^2 = 2 + \left(\frac{B^2-2}{2B}\right)^2 > 2.$$

Offenbar kann auch nicht $B^2 < 2$ gelten, also muss $B^2 = 2$ gelten und hier wissen wir wieder, dass es kein solches $B \in \mathbb{Q}$ gibt.

Würden wir M als Teilmenge der reellen Zahlen auffassen, so gäbe es in \mathbb{R} ein Supremum, nämlich $\sqrt{2}$.

Bemerkung 4.10. (i) Sofern sie existieren, sind das Supremum, Maximum, Infimum und Minimum einer Menge eindeutig bestimmt.

(ii) Sofern ein Maximum einer Menge existiert, ist es auch das Supremum. Umgekehrt kann es jedoch ein Supremum geben, ohne dass ein Maximum existieren muss.

(iii) Für eine nach oben unbeschränkte Menge setzt man formal $\sup M = \infty$ und für eine nach unten unbeschränkte Menge $\inf M = -\infty$. Für $M = \emptyset$ setzt man dann $\sup \emptyset = -\infty$ und $\inf \emptyset = \infty$.

Wir haben in Beispiel 4.9 gesehen, dass in \mathbb{Q} eine beschränkte, nicht leere Menge kein Supremum zu haben braucht. Wie wir sehen werden, ist das bei den reellen Zahlen anders.

Definition 4.11. Ein angeordneter Körper K heißt **vollständig** (genauer **DEDEKIND-vollständig**), falls jede nicht-leere, nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq K$ ein Supremum $s \in K$ besitzt.

Bemerkung 4.12. Es ist leicht zu zeigen, dass ein angeordneter Körper auch genau dann vollständig ist, wenn jede nicht-leere, nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum besitzt.

Die Vollständigkeit ist eine sehr starke Eigenschaft. Wir haben nämlich den folgenden Satz.

Satz 4.13. *Es existiert ein archimedisch angeordneter, vollständiger Körper. Dieser ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, d.h. für zwei archimedisch angeordnete, vollständige Körper K, L existiert genau eine Abbildung $\alpha : K \rightarrow L$ mit folgenden Eigenschaften:*

- α ist bijektiv.
- Für alle $a, b \in K$ gilt $\alpha(a + b) = \alpha(a) + \alpha(b)$ und $\alpha(a \cdot b) = \alpha(a) \cdot \alpha(b)$, sowie $\alpha(1) = 1$.
- Es gilt $a \leq b$ in K genau dann, wenn $\alpha(a) \leq \alpha(b)$ in L gilt.

Für den Beweis des zweiten Teils dieses Satzes fehlen uns noch Begrifflichkeiten, die wir z.T. später in der Vorlesung kennenlernen werden. Wir verschieben den Beweis bis dahin. Den ersten Teil des Satzes beweisen wir im folgenden Abschnitt.

4.3 Konstruktion und Eigenschaften der reellen Zahlen

In diesem Unterabschnitt wollen wir eine Konstruktion der reellen Zahlen angeben. Diese geht auf den Mathematiker RICHARD DEDKIND zurück.

Definition 4.14. Eine Menge $N \subseteq \mathbb{Q}$ heißt ein **DEDEKINDScher Schnitt**, falls gilt:

- (i) $N \neq \emptyset$ und $N \neq \mathbb{Q}$.
- (ii) Für alle $x \in \mathbb{Q} \setminus N$ und $y \in N$ gilt $x < y$.
- (iii) N besitzt kein Minimum.

Die Menge aller DEDEKINDSchen Schnitte bezeichnen wir mit \mathcal{R} .

Beispiel 4.15. Die Menge

$$N = \{x \in \mathbb{Q} : x > 4\}$$

ist offenbar ein DEDEKINDScher Schnitt (vgl. Beispiel 4.9), denn 4 ist zwar das Infimum von N , aber nicht das Minimum.

Die Menge

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 4\}$$

hingegen ist **kein** DEDEKINDScher Schnitt, da diese Menge offenbar ein Minimum besitzt.

Bemerkung 4.16. (i) Die rationalen Zahlen lassen sich in \mathcal{R} einbetten: Zu jeder rationalen Zahl $r \in \mathbb{Q}$ assoziieren wir den DEDEKINDSchen Schnitt

$$N_r := \{x \in \mathbb{Q} : x > r\}.$$

Für jede solche Menge ist $r \in \mathbb{Q}$ das Maximum von $\mathbb{Q} \setminus N_r$.

(ii) Es gibt auch Schnitte, deren Komplement kein Maximum besitzt, etwa

$$N = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ und } x^2 > 2\} \in \mathcal{R}.$$

Wie wir in Beispiel 4.9 gesehen haben, hat dann

$$\mathbb{Q} \setminus N = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\}$$

kein Maximum.

Wir können nun Verknüpfungen sowie eine (archimedische) Anordnung auf \mathcal{R} definieren und erhalten folgendes Resultat.

Satz 4.17. Für DEDEKINDSche Schnitte $M, N \in \mathcal{R}$ definieren wir ihre Summe als

$$M + N := \{x + y : x \in M, y \in N\}$$

bzw. ihr Produkt als

$$M \cdot N := \{x \cdot y : x \in M, y \in N\}.$$

Zudem schreiben wir $M > 0$, falls $M \not\subseteq N_0$ gilt und allgemeiner $M > N$, falls $M \not\subseteq N$ gilt.

Mit diesen Verknüpfungen bzw. dieser Anordnung wird \mathcal{R} zu einem vollständigen, archimedisch angeordneten Körper.

Beweis. Den Beweis, dass \mathcal{R} mit den oben erklärten Verknüpfungen ein Körper ist (vgl. Definitionen 3.1 and 3.5), lassen wir als Übung. Im Folgenden verwenden wir, dass der DEDEKINDSche Schnitt $N_0 = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ die Rolle der 0 übernimmt.

Im nächsten Schritt zeigen wir, dass \mathcal{R} mit der Anordnung $>$ ein archimedisch angeordneter Körper im Sinne von Definition 4.3 ist:

Nach Definition eines DEDEKINDSchen Schnitts $A \in \mathcal{R}$ ergibt sich direkt, dass genau eine der Beziehungen $A > 0$, $A = 0 (= N_0)$ oder $-A > 0$ gilt, das Axiom (O1) in Definition 4.3 ist als erfüllt.

Gilt für $A, B \in \mathcal{R}$ $A > 0$ und $B > 0$, also $A \not\subseteq N_0$ und $B \not\subseteq N_0$, so gilt für alle $a \in A$ und $b \in B$ auch $a > 0$ bzw. $b > 0$ (hier reden wir nun über rationale Zahlen!). Nach dem Anordnungsaxiom für die bekannte Anordnung auf \mathbb{Q} folgt somit auch $a + b > 0$, also $A + B \not\subseteq N_0$. Also erfüllt auch die Anordnung auf \mathcal{R} das Axiom (O2) in Definition 4.3. Das Argument für das Axiom (O3) verläuft genau so.

Da wir \mathbb{Q} und damit \mathbb{N} in \mathcal{R} einbetten können, ergibt sich auch hier aus den Anordnungsaxiomen für \mathbb{Q} , dass \mathcal{R} ebenfalls wie behauptet archimedisch angeordnet ist. Die Details lassen wir als Übung.

Als letztes zeigen wir nun noch, dass \mathcal{R} vollständig ist. Sei dazu $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}$ eine nicht-leere Teilmenge von \mathcal{R} , die nach unten beschränkt ist. Wir behaupten zunächst, dass

$$S := \bigcup_{A \in \mathcal{T}} A$$

ein DEDEKINDScher Schnitt ist. Da \mathcal{T} nach Voraussetzung nach unten beschränkt ist, existiert ein $L \in \mathcal{R}$ mit $L < A$ für alle $A \in \mathcal{T}$, also gilt $A \not\subseteq L$ für alle $A \in \mathcal{T}$. Damit ist auch $S \not\subseteq L$. Damit folgt aber, dass weder S noch $\mathbb{Q} \setminus S$ leer sein können, so dass die erste Bedingung für einen DEDEKINDSchen Schnitt erfüllt ist.

Seien nun $x \in \mathbb{Q} \setminus S$ und $y \in S$. Wir wollen zeigen, dass $x < y$ gilt. Wir haben nach Definition von S $x \in \mathbb{Q} \setminus A$ für alle $A \in \mathcal{T}$, denn

$$\mathbb{Q} \setminus S = \mathbb{Q} \setminus \left(\bigcup_{A \in \mathcal{T}} A \right) = \bigcap_{A \in \mathcal{T}} (\mathbb{Q} \setminus A)$$

nach Satz 1.12 und Definition 1.13. Ebenso gibt es ein $B \in \mathcal{T}$ mit $y \in B$. Es gilt dann insbesondere $x \in \mathbb{Q} \setminus B$, also, da B ein DEDEKINDScher Schnitt ist, $x < y$.

Um zu zeigen, dass S ein DEDEKINDScher Schnitt ist, bleibt noch einzusehen, dass S kein Minimum besitzt. Angenommen, $s \in S$ wäre das Minimum von S . Dann gäbe es ein $A \in \mathcal{T}$ mit $s \in A$. Dann folgt aber sofort, dass s auch das Minimum von A sein müsste, was aber nicht sein kann, da A als DEDEKINDScher Schnitt kein Minimum besitzt.

Wir zeigen nun, dass S genau das Infimum von \mathcal{T} ist. Es gilt sicherlich $A \subseteq S$ für alle $A \in \mathcal{T}$, also ist S eine untere Schranke für \mathcal{T} . Sei nun $S' \in \mathcal{R}$ eine weitere untere Schranke für \mathcal{T} . Dann gilt $A \subseteq S'$ für alle $A \in \mathcal{T}$, also auch $S \subseteq S'$. Damit ist S die größte untere Schranke für \mathcal{T} , also das Infimum von \mathcal{T} .

Nach Bemerkung 4.12 folgt also auch die Vollständigkeit von \mathcal{R} .

q.e.d.

Wir werden ab sofort die Menge \mathcal{R} der DEDEKINDSchen Schnitte mit den üblichen reellen Zahlen \mathbb{R} identifizieren und nur noch \mathbb{R} verwenden. Wir nehmen als gegeben hin, dass jede reelle Zahl eine Darstellung als Dezimalzahl hat, wie Sie aus der Schule wissen. Wir bezeichnen auch einen DEDEKINDSchen Schnitt ab sofort gelegentlich als „Zahl“.

Wir bemerken nun eine wichtige Eigenschaft der rationalen Zahlen in den reellen.

Satz 4.18. Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} liegen **dicht** in \mathbb{R} , d.h. für reelle Zahlen $x < y$ existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit

$$x < r < y.$$

Beweis. Wir identifizieren x und y mit DEDEKINDSchen Schnitten X bzw. Y . Dann gilt nach Voraussetzung $Y \subsetneq X$. Damit existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $r \in X$, aber $r \notin Y$. Es gilt somit

$$Y \subsetneq N_r \subsetneq X,$$

also $x < r < y$, wie behauptet.

q.e.d.

Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen findet man also immer eine rationale. Wir wollen nun einen Abstandsbegriff (der evtl. wieder aus der Schule bekannt ist) auf den reellen Zahlen einführen, der es uns erlaubt, dies etwas genauer zu quantifizieren.

Definition 4.19. Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann definieren wir den **Absolutbetrag** von x als

$$|x| := \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

Den **Abstand** von zwei reellen Zahlen x, y identifizieren wir mit $|x - y|$.

Wir halten einige wichtige Eigenschaften des Absolutbetrages fest.

Lemma 4.20. Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann ist Folgendes richtig.

- (i) Es gilt $|x| \geq 0$.
- (ii) Es gilt $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ gilt.
- (iii) Es gilt $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Beweis.

- (i) Für $x \geq 0$ ist nichts zu zeigen. Für $x < 0$ ist $|x| = -x > 0$, also folgt die Behauptung.
- (ii) Es gilt nach Definition $|0| = 0$, also folgt eine Richtung der Äquivalenz. Gilt $|x| = 0$, so folgt für $x \geq 0$, dass in der Tat $x = 0$ gilt. Für $x < 0$ folgt $|x| = -x = 0$, also wieder $x = 0$ und damit ein Widerspruch, dieser Fall kann also nicht eintreten und die Behauptung folgt.
- (iii) Die Behauptung ist offenbar richtig, wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Seien daher $x, y \neq 0$. Haben x und y dasselbe Vorzeichen, gilt also $x, y > 0$ oder $x, y < 0$, so ist in jedem Fall $x \cdot y > 0$, also gilt

$$|x \cdot y| = x \cdot y = (-x) \cdot (-y).$$

In jedem Fall gilt also die Behauptung. Sei nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x > 0$ und $y < 0$. Dann gilt $x \cdot y < 0$, also folgt

$$|x \cdot y| = -(x \cdot y) = x \cdot (-y) = |x| \cdot |y|,$$

wie behauptet.

q.e.d.

Eine immens wichtige Ungleichung, die immer wieder gebraucht wird, ist die folgende so genannte **Dreiecksungleichung**.

Satz 4.21 (Dreiecksungleichung). Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen

$$(i) \quad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

$$(ii) \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|. \quad (\text{umgekehrte Dreiecksungleichung})$$

Beweis.

(i) Es folgt sofort aus der Definition des Absolutbetrages, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Ungleichungen

$$x \leq |x| \quad \text{und} \quad -x \leq |x|$$

erfüllt sind. Aus $x \leq |x|$ und $y \leq |y|$ folgt daher nach Lemma 4.5 auch

$$x + y \leq |x| + |y| \quad \text{und} \quad (-x) + (-y) = -(x + y) \leq |x| + |y|.$$

Da entweder $|x + y| = x + y$ oder $|x + y| = -(x + y)$ gilt, folgt somit auch die behauptete Dreiecksungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

(ii) Aus der Dreiecksungleichung (i) folgt für $a, b \in \mathbb{R}$ direkt

$$|a + b| - |b| \leq |a|.$$

Ersetzen wir hierbei $a = x - y$ und $b = y$, so folgt

$$|x| - |y| \leq |x - y|,$$

andererseits folgt mit $b = -x$ auch

$$|-y| - |-x| = |y| - |x| = -(|x| - |y|) \leq |x - y|,$$

also erneut auch

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

wie behauptet.

q.e.d.

Mit dem Absolutbetrag können wir nun Satz 4.18 etwas umformulieren.

Korollar 4.22. *Seien $x, \varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0^a$. Dann gibt es eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$ mit $|x - r| < \varepsilon$, reelle Zahlen lassen sich also beliebig gut durch rationale Zahlen **approximieren**.*

^aMeistens denken wir ε als sehr klein, aber positiv

Beweis. Man wähle in Satz 4.18 $y = x + \varepsilon$. Dann existiert also ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $x < r < x + \varepsilon$, also folgt $0 < r - x = |x - r| < \varepsilon$.

q.e.d.

Um die Dichtheit von \mathbb{Q} in \mathbb{R} in noch einer anderen Art und Weise zu formulieren, und sehr viel mehr noch, weil es sich im weiteren Verlauf als sehr praktisch erweisen wird, führen wir nun eine bestimmte Art von Teilmengen von \mathbb{R} ein.

Definition 4.23. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann definieren wir

(i) das **offene Intervall** von a bis b als

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

(ii) das **abgeschlossene Intervall** von a bis b als

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

(iii) die **halboffenen Intervalle** von a bis b als

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

bzw.

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

Zusätzlich definieren wir die **unbeschränkten Intervalle**

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

$$(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

$$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}.$$

Bemerkung 4.24. (i) Statt der runden Klammern bei (halb-)offenen Intervallen verwenden manche Autoren die (eigentlich intuitivere) Notation $]a, b[$ statt (a, b) bzw. $]a, b]$ statt $(a, b]$ etc. Die Schreibweise mit runden Klammern ist allerdings verbreiteter, weshalb wir sie hier benutzen.

(ii) Für $a = b$ gilt nach Definition $(a, b) = (a, a) = \emptyset$. Die leere Menge ist also auch ein Intervall. Gleiches gilt für das abgeschlossene Intervall $[a, a] = \{a\}$. Ein einzelner Punkt ist demnach ebenfalls ein Intervall.

(iii) Das Symbol ∞ in Definition 4.23 ist **keine** reelle Zahl. Insofern ergibt es keinen Sinn, Intervalle der Form $(a, \infty]$ zu definieren. Obwohl sie der Schreibweise nach eher wie halboffene oder offene Intervalle aussehen, nennt man auch die unbeschränkten Intervalle $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$ und $(-\infty, \infty)$ abgeschlossene Intervalle (warum werden wir später sehen).

In der Sprache der Intervalle können wir nun eine weitere Formulierung für Satz 4.18 angeben.

Korollar 4.25. *Jedes offene Intervall (a, b) mit $a < b$ enthält eine rationale Zahl $r \in \mathbb{Q}$,*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Wir erinnern uns noch einmal daran, dass die Motivation für die Einführung der reellen Zahlen die Tatsache war, dass Zahlen wie etwa $\sqrt{2}$ nicht rational sind. Wir wollen zum Abschluss dieses Unterabschnitts noch zeigen, dass man aus positiven reellen Zahlen immer eine beliebige Wurzel ziehen kann und diese wieder eine reelle Zahl ist.

Definition 4.26. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und $n \in \mathbb{N}$. Eine positive reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, mit $x^n = a$ heißt eine **n -te Wurzel** aus a . Wir schreiben auch $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$. Allgemeiner definieren wir für eine beliebige rationale Zahl $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ ($m, n \in \mathbb{Z}$) den Ausdruck

$$a^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{a})^m.$$

Wir benötigen die folgende kleine Beobachtung.

Lemma 4.27. (i) *Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt auch*

$$x^n < y^n.$$

(ii) *Umgekehrt folgt für positive reelle Zahlen x, y aus der Ungleichung $x^n < y^n$ auch $x < y$.*

Beweis.

(i) Den Beweis führen wir durch vollständige Induktion.

Der **Induktionsanfang** $n = 1$ ist offensichtlich.

Unter der **Induktionsvoraussetzung**, dass die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, betrachten wir nun im **Induktionsschluss** die Aussage für $n + 1$ und finden

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \stackrel{IV}{<} y^n \cdot x < y^{n+1},$$

wobei der letzte Schritt aus Lemma 4.5(viii) folgt.

(ii) Es gelte $x^n < y^n$ für $x, y > 0$. Dann folgt

$$0 < y^n - x^n = y^n \left(1 - \left(\frac{x}{y} \right)^n \right).$$

Mit der geometrischen Summenformel 2.10 erhalten wir hieraus

$$0 < y^n \left(1 - \frac{x}{y} \right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{y} \right)^k.$$

Da mit y auch y^n sicher positiv und jeder der Brüche $\left(\frac{x}{y} \right)^k$ und somit $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{y} \right)^k$ ebenfalls positiv ist, muss damit auch

$$1 - \frac{x}{y} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > x$$

gelten, wie behauptet.

q.e.d.

Satz 4.28. Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert genau eine (reelle) n -te Wurzel aus a

Beweis. Wir zeigen zunächst die **Existenz** einer n -ten Wurzel und betrachten die Menge

$$M := \{y \in \mathbb{Q} : y > 0 \text{ und } y^n > a\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Nach Lemma 4.7 ist M dann nicht leer und auch $\mathbb{Q} \setminus M = \{x \in \mathbb{Q} : x^n \leq a\}$ ist nicht leer. Seien nun $x \in \mathbb{Q} \setminus M$ und $y \in M$. Dann ist insbesondere $y > 0$. Gilt also $x \leq 0$, so haben wir auch $x < y$. Sei also $x > 0$. Es gilt dann nach Definition $x^n \leq a < y^n$, also $x^n < y^n$. Nach Lemma 4.27 folgt hiermit auch wieder $x < y$.

Da zudem offenbar M kein Minimum besitzt, ist M also ein DEDEKINDScher Schnitt.

Nach der Definition der Multiplikation für DEDEKINDSche Schnitte folgt

$$M^n = N_a = \{x \in \mathbb{Q} : x > a\},$$

also gibt es eine reelle n -te Wurzel von a , da wir reelle Zahlen mit solchen Schnitten identifizieren.

Es bleibt, die **Eindeutigkeit** von n -ten Wurzeln zu zeigen. Seien dazu $w, \tilde{w} \in \mathbb{R}$, $w, \tilde{w} > 0$ mit $w^n = \tilde{w}^n = a$. Dann gilt

$$0 = w^n - \tilde{w}^n = w^n \cdot \left(1 - \left(\frac{\tilde{w}}{w}\right)^n\right).$$

Nach der geometrischen Summenformel 6.32 folgt dann

$$0 = w^n \cdot \left(1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\tilde{w}}{w}\right)^k.$$

Da aber $w, \tilde{w} > 0$ gilt, muss auch die Summe auf der rechten Seite sicher positiv sein, d.h. es muss, wegen der Nullteilerfreiheit von \mathbb{R}

$$0 = \left(1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right)$$

gelten. Dies ist aber äquivalent zu $w = \tilde{w}$, also haben wir auch die behauptete Eindeutigkeit gezeigt.

q.e.d.

Bemerkung 4.29. Wir werden später die **komplexen Zahlen** kennenlernen. Dort werden wir sehen, dass es ebenfalls immer Wurzeln gibt, allerdings sind diese im Allgemeinen nicht mehr eindeutig bestimmt, daher betonen wir in Satz 4.28 den Zusatz „reell“.

Wir erwähnen noch eine wichtige Eigenschaft insbesondere der Quadratwurzel. Sie gilt auch für beliebige n -te Wurzeln (Übung).

Proposition 4.30. Für $0 \leq x < y$ gilt $\sqrt{x} < \sqrt{y}$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$. Dann folgt $y - x > 0$. Da $\sqrt{y} + \sqrt{x} > 0$ gilt, ist dies äquivalent dazu, dass

$$\frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \sqrt{y} - \sqrt{x} > 0$$

gilt, also haben wir auch $\sqrt{y} > \sqrt{x}$, wie behauptet.

q.e.d.

4.4 Abzählbarkeit

In diesem letzten Unterabschnitt zu den reellen Zahlen wollen wir uns mit einem zunächst nicht ganz intuitiven Phänomen befassen, das in den Anfangstagen der Mengenlehre (vgl. Abschnitt 1.2) selbst die größten Mathematiker ihrer Zeit zunächst verwirrt hat: Man hat vielleicht eine intuitive Vorstellung des Begriffs der **Unendlichkeit**. Zum Beispiel findet wohl kaum jemand die Aussage überraschend, dass es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Zumindest rein intuitiv ist womöglich aber weniger klar, dass es **verschiedene** Unendlichkeiten gibt. Damit wollen wir uns nun beschäftigen.

Definition 4.31. Sei M eine beliebige Menge.

Existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ und eine Bijektion $\varphi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$, so heißt M eine **endliche** Menge. Die Zahl n nennen wir die **Kardinalität** oder **Mächtigkeit** von M . Existiert kein solches n , so heißt M **unendlich**.

Gibt es eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$, so nennen wir M **abzählbar unendlich**. Wenn M zwar unendlich ist, aber keine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert, so nennen wir M **überabzählbar unendlich**.

Bemerkung 4.32. Es ist manchmal hilfreich, auch unendlichen Mengen eine Kardinalität zuzuordnen. Die Kardinalität der natürlichen Zahlen wird dabei üblicherweise mit dem Symbol \aleph_0 (lies „Aleph 0“) bezeichnet. Wir befassen uns hier aber nicht weiter mit diesen so genannten **Kardinalzahlen**.

Bemerkung 4.33. Implizit nehmen wir in Definition 4.31 an, dass die Kardinalität zumindest einer endlichen Menge eindeutig bestimmt ist und nicht von der eventuellen Wahl der Bijektion φ abhängt. Den formalen Beweis hierfür lassen wir als Übung.

Bei endlichen Mengen ist einleuchtend, dass jede echte Teilmenge eine kleinere Mächtigkeit besitzt. Bei unendlichen Mengen muss das nicht so sein.

Beispiel 4.34. 1. Die Mengen \mathbb{N} und \mathbb{N}_0 sind beide abzählbar unendlich. Bei \mathbb{N} ist dies natürlich aus der Definition offensichtlich, bei \mathbb{N}_0 kann man explizit eine Bijektion angeben:

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad n \mapsto n - 1.$$

Diese ist offenbar bijektiv, da wir mit

$$\varphi^{-1} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}, \quad m \mapsto m + 1$$

eine Inverse angeben können (vgl. Satz 1.39).

2. Die Menge $M = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ der geraden natürlichen Zahlen ist offenbar eine echte Teilmenge von \mathbb{N} . Diese ist allerdings ebenfalls abzählbar unendlich, denn

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow M, n \mapsto 2n$$

ist eine Bijektion zwischen \mathbb{N} und M . Es kann bei unendlichen Mengen also durchaus sein, dass eine echte Teilmenge in Bijektion zur ursprünglichen Menge steht.

3. Auch die Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen ist abzählbar unendlich. Betrachten wir die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{n}{2} & n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die Abbildung

$$\varphi^{-1} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, m \mapsto \begin{cases} 2 - 2m & m \leq 0 \\ 2m - 1 & m > 0 \end{cases}$$

ist dann invers zu φ , wie man leicht nachrechnet: Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade, so ist $\varphi(n) = 1 - \frac{n}{2} \leq 0$, also folgt

$$\varphi^{-1}(\varphi(n)) = 2 - 2 \cdot \left(1 - \frac{n}{2}\right) = n.$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so ist $\varphi(n) = \frac{n+1}{2} > 0$, also haben wir auch hier

$$\varphi^{-1}(\varphi(n)) = 2 \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right) - 1 = n.$$

φ^{-1} ist also linksinvers zu φ . Dass es auch eine Rechtsinverse ist, rechnet man genauso nach.

Das letzte Beispiel verdeutlicht man auch gern mit der Analogie des **HILBERT-Hotels**. Es handelt sich hierbei um ein Hotel mit abzählbar unendlich vielen (Einzel)zimmern. Eines Tages sind tatsächlich alle Zimmer belegt. Als ein Reisender zur Rezeption tritt und um ein Zimmer bittet, will ihn der Portier schon abweisen, da ja alle Zimmer belegt sind, doch der Hoteldirektor weiß sich zu helfen: Er bittet alle Gäste, einfach ein Zimmer weiter zu ziehen, also der Gast aus Zimmer 1 in Zimmer 2, der Gast aus Zimmer 2 in Zimmer 3, usw. So hat jeder Gast, der schon im Hotel war, wieder ein Zimmer, aber Zimmer 1 bleibt für den neuen Gast frei (vgl. Beispiel 4.34 (i)). Am selben Abend kommt auch ein Bus mit abzählbar unendlich vielen neuen Gästen an, die der Portier zunächst wieder abweisen möchte, aber der Hoteldirektor kann wieder das Problem lösen: Er bittet jeden Gast im Hotel, in das Zimmer mit der doppelten Zimmernummer umzuziehen, also der Gast auf Zimmer 1 in Zimmer 2, den Gast von Zimmer 2 in Zimmer 4, von Zimmer 3 in Zimmer 6 usw. So hat jeder Gast, der schon im Hotel war, ein Zimmer, aber alle Zimmer mit ungeraden Nummern sind frei, welche von den neuen Gästen bezogen werden können (vgl. Beispiel 4.34 (iii)).

Wir kommen nun zu einem etwas überraschenderen Resultat.

Satz 4.35. (i) Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.

(ii) Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} sind abzählbar unendlich.

Beweis.

- (i) Wir zählen die geordneten Paare $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in einem Diagonalverfahren ab: So zählt man offenbar jedes Paar in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ genau einmal ab und erhält so eine

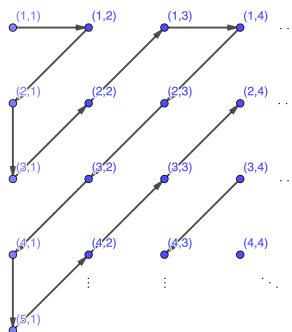


Abbildung 4.2: CANTORSches Diagonalverfahren

Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dieses Argument nennt man auch das **1. Cantorsche Diagonalverfahren**.

- (ii) Die Abbildung

$$\psi : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}, (m, n) \mapsto \frac{m}{n}$$

ist offenbar surjektiv (allerdings nicht injektiv). Nach Teil (i) existiert somit auch eine surjektive Abbildung von \mathbb{N} nach $\mathbb{Q}_{\geq 0}$, d.h. $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ ist höchstens abzählbar unendlich. Allerdings ist $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ auch sicher mindestens abzählbar unendlich, da $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}$ gilt. Damit ist $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ abzählbar unendlich und mit demselben Argument wie in Beispiel 4.34 (iii) sieht man ein, dass auch \mathbb{Q} abzählbar ist.

q.e.d.

Wir weisen darauf hin, dass der Beweis der Abzählbarkeit von \mathbb{Q} mehr eine Skizze als ein formaler Beweis ist. Implizit wird hier das so genannte CANTOR-BERNSTEIN-Theorem verwendet:

Lemma 4.36 (CANTOR-BERNSTEIN-Theorem). *Sind A, B beliebige Mengen und $f : A \rightarrow B$ bzw. $g : B \rightarrow A$ injektive Abbildungen, so existiert eine bijektive Abbildung $h : A \rightarrow B$.*

Der Beweis dieser Aussage ist zwar nicht allzu schwierig, würde uns an dieser Stelle jedoch zu weit führen.

Wir kommen nun wie angekündigt zu der noch überraschenderen Erkenntnis, dass es mehrere verschieden große Unendlichkeiten gibt.

Satz 4.37. *Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist überabzählbar.*

Beweis. Wir verwenden hierfür das **2. Cantorsche Diagonalverfahren**. Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ besitzt eine eindeutige Darstellung als nicht-abbrechende Dezimalzahl (ggf. verwendet man am Ende unendlich viele 9, man hat also $0,99999999\dots$ statt 1).²

Nehmen wir an, die reellen Zahlen wären abzählbar unendlich. Dann trifft dies sicher auch auf die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 zu. Dann könnten wir alle diese reellen Zahlen in einer unendlich langen Liste aufzählen, etwa:

$$\begin{aligned} x_1 &: 0,0923598634235\dots \\ x_2 &: 0,9862424358123\dots \\ x_3 &: 0,00023986036817\dots \\ x_4 &: 0,14159265358979\dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 käme dann genau einmal in dieser Liste vor.

Nun konstruieren wir die Dezimaldarstellung einer neuen reellen Zahl y : Als erste Nachkommastelle wählen wir eine beliebige Ziffer, **außer** der ersten Nachkommastelle von x_1 (hier 0). Für die zweite Nachkommastelle von y wählen wir eine beliebige Ziffer **außer** der 2. Nachkommastelle von x_2 (hier 9), und entsprechend so weiter mit der 3., 4., etc. Nachkommastelle.

Die so erhaltenene reelle Zahl y unterscheidet sich von jedem x_n , $n \in \mathbb{N}$, in mindestens der n -ten Nachkommastelle, kommt also in der Liste nicht vor. Wir hatten aber angenommen, dass jede reelle Zahl zwischen 0 und 1 in der Liste genau einmal vorkommt, also haben wir einen Widerspruch.

Das bedeutet, unsere ursprüngliche Annahme, dass \mathbb{R} abzählbar ist, muss falsch gewesen sein und der Satz ist bewiesen.

²Das haben wir genau genommen noch nicht bewiesen, wir werden es aber später zu einem gewissen Teil nachholen.

q.e.d.

Kapitel 5

Die komplexen Zahlen

In diesem Kapitel kommen wir zu einer vermutlich für die meisten neuen Erweiterung des Zahlbereichs, den **komplexen Zahlen** \mathbb{C} .

5.1 Die komplexe Zahlenebene

Wie wir gesehen haben, sind die reellen Zahlen vollständig, aber es gibt dennoch recht einfache Gleichungen, die sich in \mathbb{R} nicht lösen lassen, wie etwa

$$x^2 + 1 = 0.$$

Wir konstruieren die Komplexen Zahlen, indem wir eine Lösung dieser Gleichung zu den reellen Zahlen hinzufügen und entsprechend Rechenregeln aufstellen. Diese Lösung bezeichnen wir mit dem Buchstaben i und nennen sie die **imaginäre Einheit**.

Definition 5.1. Wir definieren die Menge der **komplexen Zahlen** als

$$\mathbb{C} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ nennen wir a ihren **Realteil** und schreiben $\operatorname{Re}(z) = a$. Der **Imaginärteil** von z ist dann $\operatorname{Im}(z) = b$.

Man beachte in dieser Definition, dass das $+$ zunächst nur formal zu verstehen ist und (zunächst) noch nichts mit einer Addition zu tun hat. Wir könnten die komplexen Zahlen ebenso gut als Paare reeller Zahlen definieren. Da wir die reellen Zahlen auf einer Zahlengerade denken können, wo jede reelle Zahl einem Punkt auf der Zahlengerade entspricht, ergibt sich für die komplexen Zahlen somit das Bild der **komplexen Zahlenebene**: Jede komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der Ebene (Abbildung 5.1).

Ohne irgendwelche Rechenregeln, die den komplexen Zahlen eine algebraische Struktur verleihen, wäre diese Konstruktion nicht sehr nützlich. Es gilt aber in der Tat der folgende Satz.

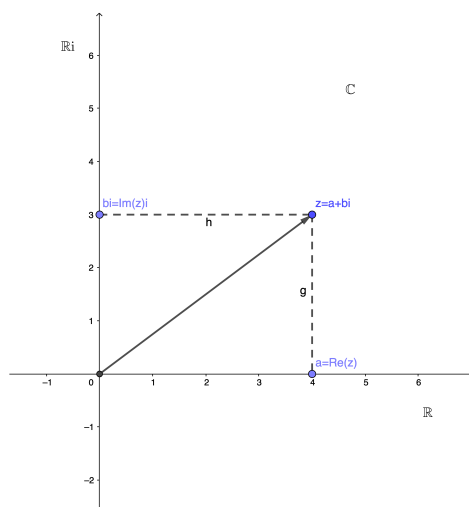


Abbildung 5.1: Komplexe Zahlenebene

Satz 5.2. Für komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ definieren wir die Addition

$$z_1 \oplus z_2 := (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

und die Multiplikation

$$z_1 \odot z_2 := (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i.$$

Mit diesen Verknüpfungen wird \mathbb{C} ein Körper. Dabei ist $0 = 0 + 0 i$, $1 = 1 + 0 i$ und für $0 \neq z = a + b i$ ist

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Beweis. Die Axiome für die Addition (A1-A4 in Definition 3.1) folgen sofort aus denen für die reellen Zahlen. Ebenso ist die Kommutativität der Multiplikation (M1) direkt aus der angegebenen Regel abzulesen, und auch die Existenz der 1 (M3) ist sofort einzusehen. Das Assoziativgesetz (M2) und das Distributivgesetz (D) rechnet man ohne große Schwierigkeiten nach (Übung). Das Axiom (N) in Definition 3.5, dass $1 \neq 0$ gilt, ist offenkundig erfüllt, da dies in \mathbb{R} der Fall ist.

Es bleibt nur noch zu prüfen, dass Inverse Elemente existieren: Für $z = a + b i \neq 0$ sind a und b nicht beide 0, so dass $a^2 + b^2 \geq 0$ gilt. Damit definiert der angegebene Ausdruck für z^{-1} eine komplexe Zahl. Wir rechnen noch nach, dass es sich um ein inverses Element handelt:

$$\begin{aligned}
z \odot z^{-1} &= a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right) + \left(a \cdot \left(-\frac{b}{a^2 + b^2} \right) + \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot b \right) i \\
&= \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} + 0i \\
&= 1 + 0i.
\end{aligned}$$

q.e.d.

Die reellen Zahlen lassen sich in die komplexen einbetten durch $a \mapsto a + 0i$. So können wir insbesondere einfacher 0 und 1 statt $0 + 0i$ bzw. $1 + 0i$ schreiben. Die Addition und Multiplikation in \mathbb{C} reduziert sich in diesem Fall zu der bekannten aus \mathbb{R} . Wir werden daher in Zukunft einfach $+$ und \cdot statt \oplus und \odot schreiben.

Beispiel 5.3. 1. Wir wollen nachrechnen, dass nach den festgelegten Rechenregeln $i = 0 + 1i$ tatsächlich die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ löst, also $i^2 = -1$ gilt. Wir haben

$$i^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 0 \cdot 1)i = -1 + 0i = -1.$$

2. Betrachten wir die komplexen Zahlen $z = 2 + i$ und $w = -1 + 3i$. Dann gilt

$$z + w = (2 + (-1)) + (1 + 3)i = 1 + 4i.$$

Indem wir komplexe Zahlen als Punkte in der Ebene interpretieren, können wir auch die Addition graphisch als Vektoraddition verstehen: wie in Abbildung 5.2 ergänzt man das Dreieck mit Eckpunkten z, w und 0 zu einem Parallelogramm. Der Eckpunkt, der 0 gegenüberliegt, ist dann genau der Punkt $z + w$.

Bemerkung 5.4. In Lemma 4.5 hatten wir gesehen, dass in einem beliebigen angeordneten Körper K für jedes $a \in K$ $a^2 \geq 0$ und $-1 < 0$ gilt. Da es mit i eine komplexe Zahl gibt mit $i^2 = -1$ folgt also, dass \mathbb{C} **NICHT** angeordnet werden kann.

Wenn wir im Folgenden die üblichen Symbole $<$ oder \leq etc. benutzen, sagen wir implizit, dass beide Seiten der Ungleichung reell sind.

Definition 5.5. Zu einer komplexen Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$ nennen wir

$$\bar{z} := a - bi \in \mathbb{C} \quad \text{lies „}z \text{ konjugiert“ oder „}z \text{ quer“}$$

die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Einige wichtige Eigenschaften der komplexen Konjugation halten wir im folgenden Satz fest.

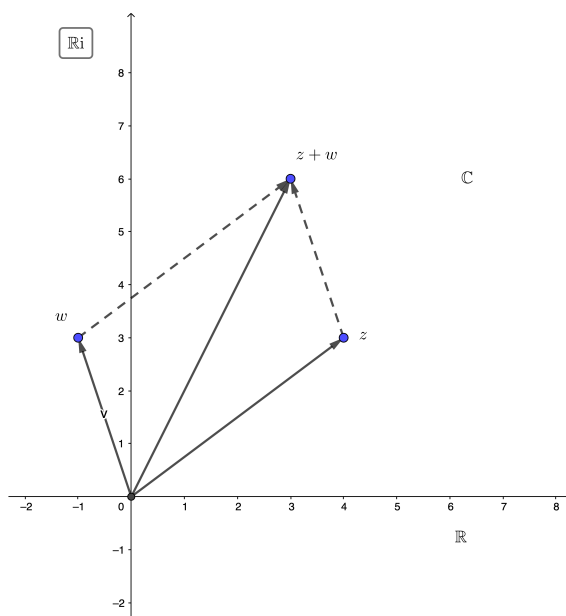


Abbildung 5.2: Addition komplexer Zahlen

Satz 5.6. Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen. Dann gilt:

- (i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
- (ii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
- (iii) $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$
- (iv) $\overline{\overline{z}} = z$
- (v) $z = \overline{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Übung.

q.e.d.

Geometrisch findet man die komplex konjugierte Zahl durch Spiegeln an der reellen Achse.

Wie für reelle Zahlen gibt es auch für komplexe Zahlen einen Absolutbetrag, den wir nun einführen wollen.

Definition 5.7. Für eine komplexe Zahl $z = a + bi$ definieren wir ihren **Absolutbetrag** als

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2}.$$

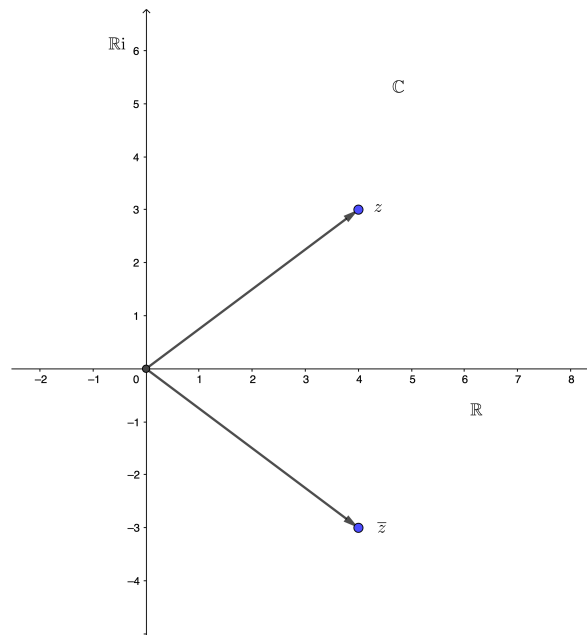


Abbildung 5.3: Komplexe Konjugation

Bemerkung 5.8. Nach dem Satz des PYTHAGORAS entspricht der komplexe Absolutbetrag von z genau der Länge der Verbindungsstrecke vom Nullpunkt zum Punkt z in der komplexen Zahlenebene.

Einige wichtige Eigenschaften des komplexen Absolutbetrages sammeln wir im folgenden Satz.

Satz 5.9. Seien $z = a + bi, w = c + di \in \mathbb{C}$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) Es gilt stets $|z| \geq 0$, wobei genau dann $|z| = 0$ gilt, wenn $z = 0$ gilt.
- (ii) Es gilt $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.
- (iii) Es gilt $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.
- (iv) Für $z \neq 0$ gilt $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- (v) Wir haben $|\bar{z}| = |z|$.
- (vi) Es gilt $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$
- (vii) Es gilt die **Dreiecksungleichung**,

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Beweis.

(i) Für eine reelle Zahl a gilt $a^2 > 0$, falls $a \neq 0$, und $a^2 = 0$ genau dann, wenn $a = 0$ gilt. Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist also $a^2 + b^2 > 0$, es sei denn es gilt $a = 0$ und $b = 0$. Sind also a und b nicht beide 0, also $z = a + bi \neq 0$, folgt $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ nach Definition der reellen Quadratwurzel (siehe Definition 4.26). Gilt andererseits $a = b = 0$, so folgt entsprechend auch $|z| = 0$ und somit die Behauptung.

(ii) Nach Definition der Multiplikation in \mathbb{C} gilt

$$z \cdot w = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

also haben wir

$$\begin{aligned} |z \cdot w|^2 &= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2 \\ &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2. \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$(|z| \cdot |w|)^2 = |z|^2 \cdot |w|^2 = (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Wir haben somit $|z \cdot w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2$, also, da die quadrierten Ausdrücke nicht-negativ sind, auch

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|,$$

wie behauptet.

(iii) Es gilt

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(iv) Folgt direkt aus (iii) durch Umformung.

(v) Es gilt $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$.

(vi) Wir haben $|z|^2 = a^2 + b^2 \geq a^2 = |a|^2 = |\operatorname{Re}(z)|^2$. Ziehen wir auf beiden Seiten die Quadratwurzel, erhalten wir mit Proposition 4.30 auch $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ wie behauptet. Für den Imaginärteil geht man analog vor.

(vii) Gilt $z + w = 0$, so ist nichts zu zeigen, da auf der rechten Seite der Ungleichung nicht-negative Zahlen addiert werden. Sei also $z + w \neq 0$. Dann gilt

$$\frac{|z| + |w|}{|z + w|} = \left| \frac{z}{z + w} \right| + \left| \frac{w}{z + w} \right| \stackrel{(vi)}{\geq} \operatorname{Re} \left(\frac{z}{z + w} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{w}{z + w} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z + w}{z + w} \right) = 1.$$

Damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

Im Komplexen sieht man auch, woher die Dreiecksungleichung ihren Namen hat (siehe

Abbildung 5.2. Das relevante Dreieck hat die Eckpunkte 0 , z und $z + w$. Die Dreiecksungleichung sagt genau, dass die direkte Verbindungslinie von 0 nach $z + w$ höchstens so lang sein kann wie die Summe der anderen beiden Dreiecksseiten.

In Definition 4.8 hatten wir den Begriff der beschränkten Teilmenge von \mathbb{R} definiert. Diese Definition lässt sich allerdings nicht ohne weiteres auf Teilmengen von \mathbb{C} übertragen, da \mathbb{C} kein angeordneter Körper ist, und somit die Begriffe obere bzw. untere Schranke keinen Sinn ergeben. Man kann die Definition im Reellen allerdings leicht umformulieren, indem man den Betrag verwendet und diese Definition auf Teilmengen von \mathbb{C} überträgt:

Definition 5.10. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls ein $B > 0$ existiert, so dass für alle $z \in T$ die Abschätzung $|z| \leq B$ gilt. Anderenfalls heißt T **unbeschränkt**.

5.2 Polarkoordinaten

Betrachten wir eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, in der komplexen Zahlenebene. Die Verbindungslinie von 0 nach z bildet einen Winkel φ mit der reellen Achse. Nach der

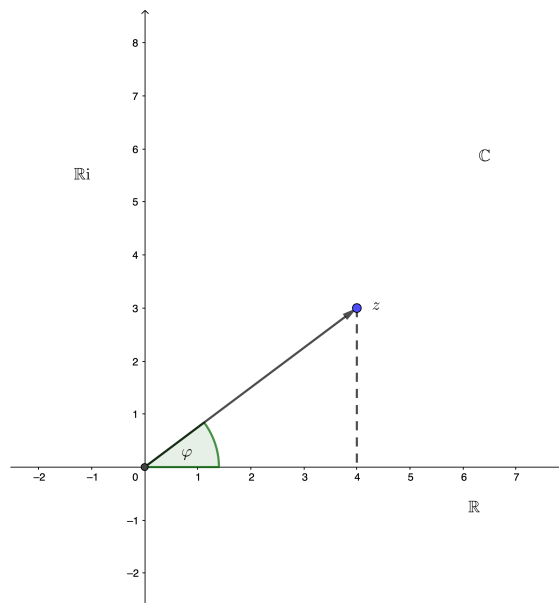


Abbildung 5.4: Winkel mit der reellen Achse

geometrischen Definition des Cosinus und des Sinus, die aus der Schule bekannt sein dürften, sehen wir also, dass gilt

$$\operatorname{Re}(z) = |z| \cos(\varphi) \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(z) = |z| \sin(\varphi).$$

Allgemeiner haben wir den folgenden Satz.

Satz 5.11. Für jede komplexe Zahl $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, gibt es genau ein $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)).$$

Genauer gilt

$$r = |z| \quad \text{und} \quad \varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{a}{r}\right) & b \geq 0 \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{a}{r}\right) & b < 0. \end{cases}$$

Wir nennen φ dann auch das **Argument** von z und schreiben $\varphi = \arg z$. Die Darstellung $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ nennen wir die **Polardarstellung** von z .

Beweis. Über die geometrische Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis (vgl. Abbildung 9.3) sieht man sofort, dass jeder Punkt auf einem Kreis mit Radius r durch einen eindeutigen Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ festgelegt ist, und dieser wiederum eindeutig durch die Werte $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ festgelegt ist (einer der Werte reicht in der Regel nicht allein aus, um den Winkel eindeutig zu bestimmen).

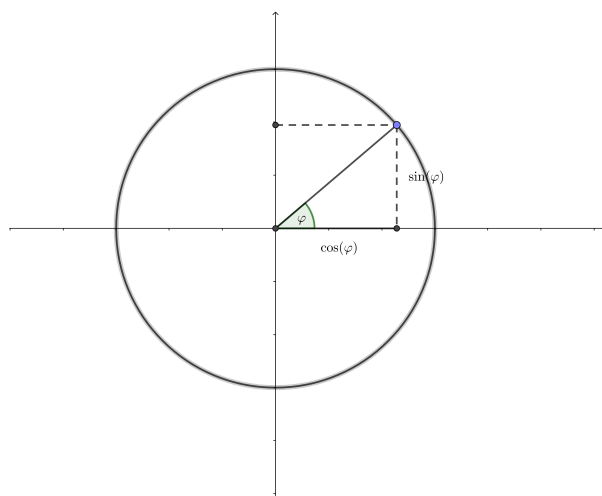


Abbildung 5.5: Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis

Ferner ist klar, dass für jede komplexe Zahl $z \neq 0$ die Zahl $z/|z|$ auf dem Einheitskreis liegt (vgl. Satz 5.9 (iii)), und keine andere Zahl $r > 0$ außer $r = |z|$ erfüllt, dass z/r auf dem Einheitskreis liegt. Dadurch folgt die Existenz und Eindeutigkeit von r und φ .

Wir rechnen noch die Formel für φ nach. Sei zunächst $b \geq 0$. In diesem Fall muss also auch $\sin(\varphi) \geq 0$ gelten, also folgt wegen der bekannten Formel $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, dass $\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}$ gilt (wegen $b \geq 0$ ist das positive Vorzeichen bei der Wurzel zu wählen). Dann haben wir

$$\cos\left(\arccos\left(\frac{a}{r}\right)\right) = \frac{a}{r}$$

und

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{a}{r}\right)\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{a}{r}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{r^2 - a^2}{r^2}} = \frac{b}{r}.$$

Insgesamt folgt also

$$r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) = r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}i\right) = a + bi = z,$$

wie behauptet. Die Rechnung im Fall $b < 0$ verläuft analog.

q.e.d.

Beispiel 5.12. 1. Sei $z = 1 + i$. Dann haben wir $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ und wir suchen $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass $\cos(\varphi) = 1/\sqrt{2}$ und $\sin(\varphi) = 1/\sqrt{2}$. Bekanntermaßen ist dies genau für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ der Fall. Wir haben also mit

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

die Polardarstellung von z gefunden.

2. Für $z = 1 - \sqrt{3}i$ ergibt sich $r = |z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. Weiterhin suchen wir ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos(\varphi) = \frac{1}{r} = \frac{1}{2}$ und $\sin(\varphi) = \frac{-\sqrt{3}}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Im Intervall $[0, 2\pi)$ gilt $\cos(\varphi) = \frac{1}{2}$ für $\varphi \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\}$ und $\sin(\varphi) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ für $\varphi \in \{\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\}$. Wir finden also $\arg(z) = \frac{5}{3}\pi$ und somit die Polardarstellung

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) \right).$$

Bemerkung 5.13. Seien $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ und $w = s(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ komplexe Zahlen in Polardarstellung. Dann rechnet man nach, dass

$$z \cdot w = rs \cdot (\cos(\varphi) \cos(\theta) - \sin(\varphi) \sin(\theta) + i(\cos(\varphi) \sin(\theta) + \cos(\theta) \sin(\varphi)))$$

gilt. Wegen der **Additionstheoreme** von Sinus und Cosinus (die evtl. aus der Schule bekannt sind und die wir später noch beweisen werden) lässt sich dies vereinfachen zu

$$z \cdot w = r \cdot s(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)).$$

Wir sehen daran, dass die Multiplikation komplexer Zahlen geometrisch einer **Drehstreckung** entspricht (siehe Abbildung 5.6).

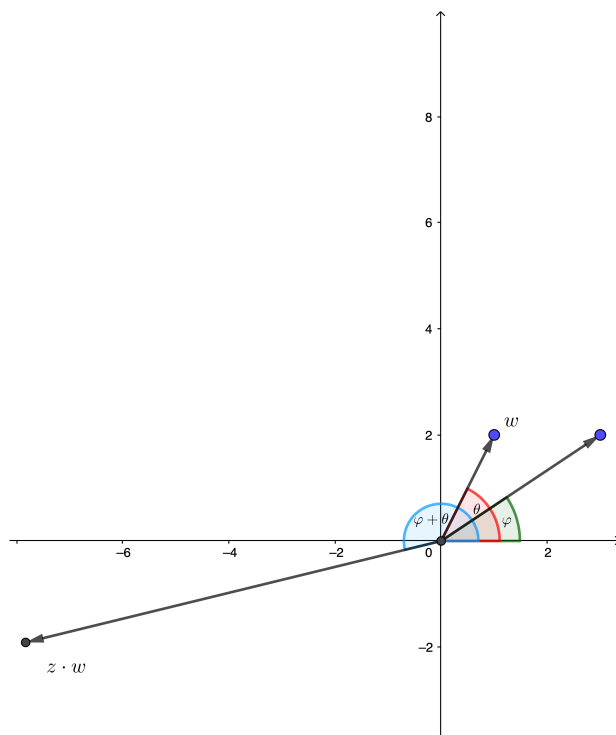


Abbildung 5.6: Multiplikation komplexer Zahlen als Drehstreckung

LEONHARD EULER, einer der größten Mathematiker aller Zeiten, und einige Jahrzehnte vor ihm ABRAHAM DE MOIVRE bemerkten, dass man die Polardarstellung einer komplexen Zahl kompakter schreiben kann. Dies beinhaltet der folgende Satz, dessen Beweis wir später nachholen.

Satz 5.14 (Satz von EULER-DE MOIVRE). (i) Für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) + i \sin(x) = e^{ix}.$$

(ii) Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung in der Form

$$z = r e^{i\varphi}$$

mit $r > 0$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$. Diese nennt man **Exponentialdarstellung** oder manchmal auch **Polardarstellung**.

(iii) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Bemerkung 5.15. Aus dem Satz von EULER-DE MOIVRE erhält man direkt eine der berühmtesten Formeln von EULER die auch häufig als eine der schönsten der gesamten Mathematik angesehen wird:

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

5.3 Polynomgleichungen

Wir wollen uns noch mit der Lösung von Gleichungen im Komplexen befassen. Der Hauptgrund dafür, dass die komplexen Zahlen so wichtig sind und so häufig verwendet werden, liegt im so genannten **Fundamentalsatz der Algebra**. Zunächst betrachten wir ein Beispiel.

Beispiel 5.16. Betrachten wir ein quadratisches Polynom

$$p(z) = az^2 + bz + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Aus der Schule kennen Sie die Formel für die Lösungen dieser Gleichung,

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

zumindest wenn die **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$ nicht-negativ ist. Ist sie negativ, so gibt es keine reelle Lösung.

Im komplexen können wir allerdings zwei Lösungen angeben, indem wir den nicht-definierten Ausdruck \sqrt{D} durch $i\sqrt{|D|}$ ersetzen. Damit erhalten wir in der Tat zwei verschiedene Lösungen, wie man leicht nachrechnet:

$$\begin{aligned} & a \left(\frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \right)^2 + b \left(\frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a} \right) + c \\ &= \frac{b^2 \mp |D| \mp 2b\sqrt{|D|}i - 2b^2 \pm 2i\sqrt{|D|} + 4ac}{4a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jede quadratische Gleichung (mit reellen Koeffizienten) hat also mindestens eine Lösung in \mathbb{C} .

Allgemeiner gilt sogar:

Satz 5.17 (Fundamentalsatz der Algebra). Sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ ein Polynom mit Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$ und $n \geq 1$. Dann besitzt p in \mathbb{C} eine **Nullstelle**, d.h. es existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha) = 0$.

Der allgemeine Fundamentalsatz der Algebra 5.17 ist nicht so einfach zu beweisen und man benötigt dazu etwas fortgeschrittenere Werkzeuge als uns zur Zeit zur Verfügung stehen. Es ist allerdings möglich, den Satz mit Methoden aus dieser (und evtl. der Folgevorlesung) zu beweisen. Der erste Beweis dieses Satzes wurde von D'ALEMBERT veröffentlicht und später von GAUSS an mehreren Stellen verbessert. GAUSS veröffentlichte in der Tat etliche sehr interessante Beweise dieses Satzes, die wir aber hier nicht besprechen können.

Der Fundamentalsatz der Algebra ist ein reiner Existenzsatz, d.h. er garantiert zwar, dass alle Polynomgleichungen (mindestens) eine Lösung besitzen, er (bzw. sein Beweis) geben allerdings keine brauchbare Methode an, diese Lösungen zu finden, etwa wie die Formel zur Lösung quadratischer Gleichungen. Eine solche Formel gibt es übrigens sonst nur noch für Polynome vom Grad 3 (gefunden von TARTAGLIA unabhängig von DEL FERRO und verallgemeinert und veröffentlicht von CARDANO um 1540) und 4 (von CARDANOS Schüler FERRARI um 1545), sie sind allerdings für praktische Rechnungen meist zu kompliziert. Für Polynome vom Grad 5 und höher konnten erst im 19. Jahrhundert ABEL und RUFFINI unabhängig voneinander zeigen, dass es eine solche Formel, die für alle Polynome eines Grades $n \geq 5$ funktioniert, nicht geben kann. Dieser Satz ist eines der Hauptresultate der Vorlesung „Algebra“.

Wir wollen uns nun damit befassen, wie wir zumindest einfache Polynomgleichungen im Komplexen lösen können. Dazu benötigen wir folgenden neuen Begriff.

Definition 5.18. Sei $\zeta \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\zeta^n = 1$, so nennen wir ζ eine **n -te Einheitswurzel**. Ist n minimal, so dass ζ eine n -te Einheitswurzel ist, so nennen wir ζ eine **primitive n -te Einheitswurzel**.

Bemerkung 5.19. Sei $\zeta = r e^{i\varphi}$ eine n -te Einheitswurzel. Nach dem Satz von EULER-DE MOIVRE 5.14 gilt dann

$$\zeta^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)) = 1,$$

also muss $r = 1$ gelten und $n\varphi$ muss ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, denn \cos und \sin sind nach Definition 2π -periodisch. Es gibt also ein $k \in \{0, \dots, n-1\}$, so dass

$$\zeta = e^{2\pi i k/n}$$

gilt.

Es ist nicht schwer zu zeigen, dass die primitiven n -ten Einheitswurzeln genau die von der Form $e^{2\pi i k/n}$ sind, wo k und n **teilerfremd** sind, d.h. es gibt keine natürliche Zahl $d > 1$, die sowohl n als auch k teilt.

Wir können nun Einheitswurzeln verwenden, um einfache Polynomgleichungen im Komplexen zu lösen.

Beispiel 5.20. 1. Betrachten wir die Gleichung

$$z^3 = 125.$$

Schreiben wir z in Exponentialform, $z = r e^{i\varphi}$ und setzen dies in die Gleichung ein, so finden wir

$$r^3 e^{3i\varphi} = 125.$$

Da $|e^{i\theta}| = 1$ gilt für alle $\theta \in \mathbb{R}$, folgt damit also, dass $r^3 = 125$ und $3\varphi = 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ sein muss. Es folgt damit $r = 5$ und, da wir $\varphi \in [0, 2\pi)$ annehmen, $\varphi \in \{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\}$. Wir haben somit drei Lösungen der Gleichung gefunden (siehe auch Abbildung 5.7),

$$z \in \left\{ 5, 5 e^{2\pi i/3} = \frac{5}{2}(-1 + i\sqrt{3}), 5 e^{4\pi i/3} = \frac{5}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \right\}.$$

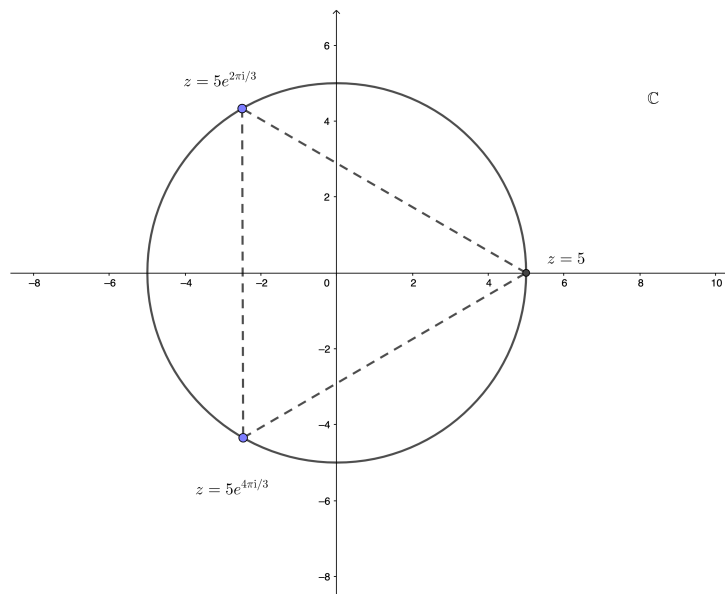


Abbildung 5.7: Lösungen von $z^3 = 125$

2. Wir betrachten die Gleichung

$$(z - 1)^4 = -16.$$

Schreiben wir $(z - 1) = r e^{i\varphi}$ und gehen wie oben vor. Setzen wir in die Gleichung ein, so erhalten wir

$$r^4 e^{4i\varphi} = -16 = 16 e^{i\pi},$$

also muss $r^4 = 16$ und $4\varphi = \pi + 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt also $r = 2$ und $\varphi \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\}$.

Wir erhalten also insgesamt für die Gleichung die Lösungen

$$z \in \left\{ 1 + 2 e^{\pi i/4} = (1 + \sqrt{2}) + i\sqrt{2}, 1 + 2 e^{3\pi i/4} = (1 - \sqrt{2}) + i\sqrt{2}, \right. \\ \left. 1 + 2 e^{5\pi i/4} = (1 - \sqrt{2}) - i\sqrt{2}, 1 + 2 e^{7\pi i/4} = (1 + \sqrt{2}) - i\sqrt{2} \right\},$$

siehe auch Abbildung 5.8.

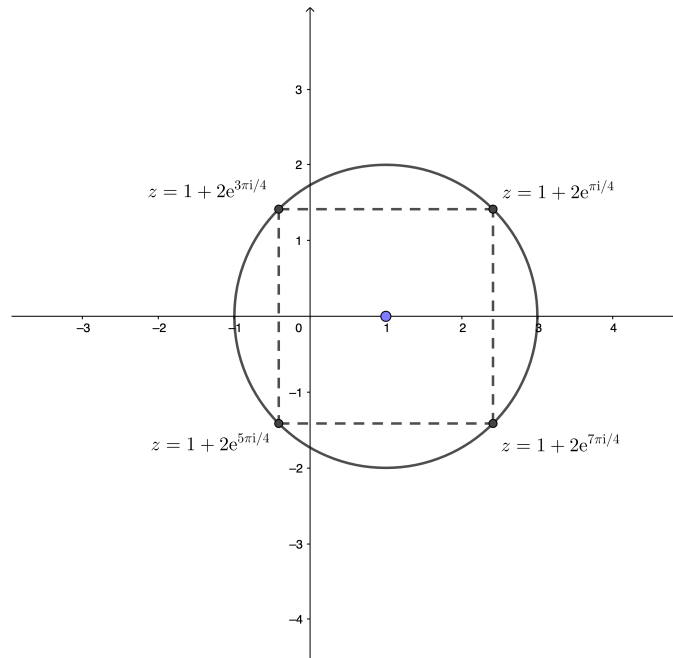


Abbildung 5.8: Lösungen von $(z - 1)^4 = -16$

Teil II
Analysis

Kapitel 6

Folgen und Reihen

In der Analysis beschäftigt man sich allgemein mit dem Verhalten von Funktionen, meist in einer oder mehreren reellen (oder auch komplexen) Variablen. Vieles, das aus der Schule im Kontext mit dem Themenfeld **Kurvendiskussion** in Verbindung gebracht wird, fällt in den Bereich der Analysis, insbesondere der Begriff der Ableitung bzw. des Integrals. Ziel dieses Teils der Vorlesung ist es, diese Begriffe mathematisch sauber einzuführen, was allerdings einige Vorbereitung erfordert. Vor allem ist es nötig, eine präzise Definition des Begriffes **Grenzwert** zu erarbeiten. Auch wenn schon spätestens seit dem 17. Jahrhundert LEIBNIZ, NEWTON und auch viele andere mehr oder minder explizit mit Grenzwerten gearbeitet haben, war er nie klar definiert und immer sehr (manchmal zu) intuitionistisch. Erst im 19. Jahrhundert stellten CAUCHY und später ganz besonders WEIERSTRASS den Begriff des Grenzwertes und damit die Analysis auf ein solides Fundament.

Dazu beschäftigen wir uns in diesem Kapitel zunächst mit **Folgen** bzw. **Reihen** und führen die späteren Konzepte immer wieder darauf zurück.

6.1 Konvergenz von Folgen

6.1.1 Allgemeines zu komplexen Folgen

Wir wollen zunächst einführen, was wir unter einer Folge verstehen.

Definition 6.1. Eine Funktion $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $n \mapsto a(n) =: a_n$ nennen wir eine **Folge** komplexer Zahlen. Wir schreiben auch $(a_n)_{n \geq 1}$ oder auch kürzer $(a_n)_n$. Die einzelnen Funktionswerte a_n nennt man auch die **Glieder** der Folge $(a_n)_n$.

Bemerkung 6.2. (i) Sind die Folgenglieder a_n einer Folge $(a_n)_n$ alle reell, so spricht man entsprechend von einer Folge reeller Zahlen.

(ii) Es ist manchmal sinnvoll, eine Folge schon bei 0 oder auch einer Zahl $N > 1$ beginnen zu lassen. Die Schreibweise ist dann entsprechend $(a_n)_{n \geq 0}$ bzw. $(a_n)_{n \geq N}$. Auch andere Variationen sind möglich, sollten aber durch die Notation selbsterklärend sein.

Beispiel 6.3. 1. Eine Folge kann etwa explizit gegeben sein, indem man, wie bei Funktionen üblich, eine direkte Vorschrift angibt, etwa durch

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Die Folgenglieder lauten dann natürlich

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Es ist klar, dass die Folgenglieder mit wachsendem n immer kleiner werden und beliebig nah an 0 kommen, ohne sie jemals zu erreichen. Man ist geneigt, 0 als **Grenzwert** der Folge anzusehen. Diesen Begriff werden wir in Definition 6.4 formal einführen.

2. Eine andere Möglichkeit, eine Folge zu definieren, ist eine **rekursive** Beschreibung der Folge. Definieren wir zum Beispiel

$$f_1 := 1, f_2 := 1$$

und setzen

$$f_{n+2} := f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 1,$$

so erhalten wir die so genannte **FIBONACCI-Folge**, deren erste Folgenglieder wie folgt aussehen,

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Es ist zwar möglich, für die Glieder der FIBONACCI-Folge eine explizite Formel anzugeben, diese ist allerdings im Vergleich zur rekursiven Beschreibung recht kompliziert (und auch rechenintensiv): Es gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

was man zum Beispiel mit Methoden der Linearen Algebra (vgl. Teil III der Vorlesung) herausbekommen und durch vollständige Induktion beweisen kann. Diese Formel nennt man auch die Formel von DE MOIVRE-BINET, wobei der vermutlich erste veröffentlichte Beweis von DANIEL BERNOULLI stammt.

Wir kommen nun zur angekündigten Definition des Grenzwertes.

Definition 6.4. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$ eine (weitere) komplexe Zahl. Wir sagen, die Folge $(a_n)_n$ **konvergiert** gegen a , wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N$ die Abschätzung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

Wir nennen dann $a \in \mathbb{C}$ den **Grenzwert** der Folge $(a_n)_n$ und schreiben dafür

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Gilt $a = 0$, so nennen wir $(a_n)_n$ eine **Nullfolge**.

Existiert kein $a \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft (1), so heißt die Folge $(a_n)_n$ divergent.

Bemerkung 6.5. Die Schreibweise $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ setzt immer implizit voraus, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert.

Bildlich kann man sich die Definition der Konvergenz (zumindest für reelle Folgen) etwa wie in Abbildung 6.1 veranschaulichen.

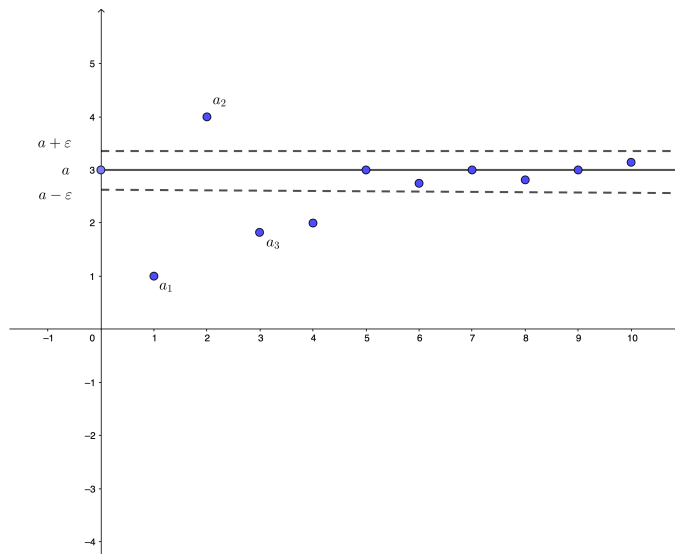


Abbildung 6.1: Folgenkonvergenz

Beispiel 6.6. 1. Es dürfte keine große Überraschung sein, dass die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert 0 konvergiert. Mittels der Definition können wir dies auch direkt nachweisen: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann setzen wir $N := \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$, wobei für $x \in \mathbb{R}$

$$\lfloor x \rfloor := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

die **untere GAUSS-Klammer** von x bezeichne. Dann gilt für $n \geq N$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

also gilt nach Definition 6.4

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = (-1)^n$ ist **divergent**. Wäre nämlich $a \in \mathbb{C}$ der Grenzwert dieser Folge, dann sei $\varepsilon = 1/2$ gegeben und $N \in \mathbb{N}$ wie in (1). Dann gilt einerseits für gerades $n \geq N$

$$|a_n - a| = |1 - a| < \frac{1}{2},$$

andererseits für ungerades $n \geq N$

$$|a_n - a| = |-1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Damit würde folgen, dass

$$2 = |1 - (-1)| = |1 - a - (-1 - a)| \leq |1 - a| + |-1 - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

gilt, was absurd ist. Es kann also keinen solchen Grenzwert geben.

Wir beschäftigen uns zunächst mit einigen allgemeinen Eigenschaften von konvergenten Folgen und ihren Grenzwerten.

Lemma 6.7. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge. Dann gilt:

(i) Der Grenzwert von $(a_n)_n$ ist eindeutig bestimmt.

(ii) Die Folge $(a_n)_n$ ist **beschränkt**, das heißt es existiert ein $B > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq B$$

gilt.

Beweis.

- (i) Seien $a \neq \tilde{a} \in \mathbb{C}$ Grenzwerte der Folge $(a_n)_n$ und sei $\varepsilon := \frac{|\tilde{a} - a|}{2} > 0$. Dann existiert nach Definition ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon.$$

Damit folgt für $n \geq N$ auch

$$|\tilde{a} - a| = |a_n - a - (a_n - \tilde{a})| \leq |a_n - a| + |a_n - \tilde{a}| < \varepsilon + \varepsilon = |\tilde{a} - a|,$$

was ein Widerspruch ist. Damit muss $a = \tilde{a}$ gelten und die Behauptung folgt.

(ii) Sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a \in \mathbb{C}$. Dann existiert für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ $|a_n - a| < 1$ gilt. Damit folgt nach der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| \leq |a| + 1 \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Die Menge $\{a_n : n < N\}$ ist endlich und damit beschränkt, sagen wir $|a_n| \leq B'$ für $n < N$. Dann gilt aber für beliebiges $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq B := \max\{1 + |a|, B'\},$$

also ist die Folge beschränkt, wie wir behauptet hatten.

q.e.d.

Die FIBONACCI-Folge $(f_n)_n$ aus Beispiel 6.3 ist daher zum Beispiel NICHT konvergent, da man per Induktion z.B. zeigen kann, dass für $n \geq 11$

$$f_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

gilt, also kann die Folge nicht beschränkt sein und damit ist sie nicht konvergent.

Zurück zu konvergenten Folgen. Wir halten für Grenzwerte folgende Rechenregeln fest.

Satz 6.8 (Grenzwertsätze). Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen mit Grenzwerten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$$

Dann gilt:

- (i) Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda a$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
- (iv) Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $b_n \neq 0$ und auch $b \neq 0$, so folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis.

- (i) Für $\lambda = 0$ ist nichts zu zeigen, wir nehmen also $\lambda \neq 0$ an.

Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$$

gilt. Dann folgt für diese n ebenfalls

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda| \cdot |a_n - a| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Damit folgt die Behauptung.

(iii) Sei wieder $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung ist die Folge $(b_n)_n$ konvergent, also nach Lemma 6.7 (ii) beschränkt, das heißt es existiert ein $B > 0$ mit $|b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nach Voraussetzung existieren dann $N_a, N_b \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N := \max\{N_a, N_b\}$ die Abschätzungen

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2B} \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$$

gelten. Dann gilt für $n \geq N$ auch

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| \\ &\leq B \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| < B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2|a|} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit folgt wie behauptet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$$

Den Rest lassen wir als Übung.

q.e.d.

Die Definition der Konvergenz setzt voraus, dass der Grenzwert der Folge bekannt ist. Bei konkreten Aufgaben kann man den Grenzwert gelegentlich „erraten“, aber manchmal gestaltet sich dieses Vorgehen als schwierig. Wir werden nun ein Kriterium für Konvergenz beweisen, das uns erlaubt, auch ohne Kenntnis des Grenzwertes zu entscheiden, ob eine Folge konvergiert oder nicht.

Satz 6.9 (CAUCHY-Kriterium für Folgenkonvergenz). *Eine komplexe Folge $(a_n)_n$ ist genau dann konvergent, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n, m \geq N$ die Abschätzung $|a_m - a_n| < \varepsilon$ erfüllt ist,*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Eine Folge, die diese Bedingung erfüllt, nennen wir auch eine CAUCHY-Folge.

Beweis (1. Teil). Nehmen wir zunächst an, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergent ist und sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{C}$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Für $m, n \geq n$ folgt dann

$$|a_m - a_n| = |a_m - a + a - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Die Folge genügt also dem CAUCHY-Kriterium und ist damit eine CAUCHY-Folge.

q.e.d.

Für den zweiten Teil des Beweises benötigen wir einige Eigenschaften speziell von reellen Folgen, die wir im folgenden Unterabschnitt genauer untersuchen wollen. Wir kommen dann auf den Beweis des CAUCHY-Kriteriums zurück.

Zuvor noch ein Beispiel, das das Kriterium in Aktion zeigt.

Beispiel 6.10. Wir betrachten erneut die FIBONACCI-Folge $(f_n)_n$ aus Beispiel 6.3 mit

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 1.$$

Diese Folge ist nicht beschränkt, also nicht konvergent. Bildet man jedoch die Quotienten $a_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$, $n \in \mathbb{N}$, von aufeinanderfolgenden FIBONACCI-Zahlen, so ergibt sich

$$\begin{array}{ll} a_1 = \frac{f_2}{f_1} = 1 & a_6 = \frac{f_7}{f_6} = \frac{13}{8} = 1,625 \\ a_2 = \frac{f_3}{f_2} = 2 & a_7 = \frac{f_8}{f_7} = \frac{21}{13} = 1,6153846\dots \\ a_3 = \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2} = 1,5 & a_8 = \frac{f_9}{f_8} = \frac{34}{21} = 1,619047\dots \\ a_4 = \frac{f_5}{f_4} = \frac{5}{3} = 1,6666666\dots & a_9 = \frac{f_{10}}{f_9} = \frac{55}{34} = 1,6176470\dots \\ a_5 = \frac{f_6}{f_5} = \frac{8}{5} = 1,6 & a_{10} = \frac{f_{11}}{f_{10}} = \frac{89}{55} = 1,6181818\dots \end{array}$$

Man kann daher vermuten, dass die Folge $(a_n)_n$ gegen einen Grenzwert $a \approx 1,618$ konvergiert.

Wir wollen dies nun beweisen: Es gilt für $n \geq 1$

$$a_{n+1} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{a_n},$$

so dass wir auch für a_n eine rekursive Beschreibung haben. Da die FIBONACCI-Zahlen alle positiv sind, ergibt sich somit sofort für $n \geq 2$ $a_n > 1$ und damit für $n \geq 3$

$$a_n a_{n-1} = a_{n-1} + 1 > 2.$$

Für $n \geq 3$ haben wir also

$$|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} \right| = \left| \frac{a_{n-1} - a_n}{a_n a_{n-1}} \right| \leq \frac{1}{2} |a_n - a_{n-1}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |a_2 - a_1| = \frac{1}{2^{n-1}},$$

wobei die letzte Ungleichung durch eine sehr einfache Induktion folgt.

Für $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ setzen wir $m = n + k$ und haben dann

$$|a_m - a_n| \stackrel{*}{=} \left| \sum_{\ell=0}^{k-1} (a_{n+\ell+1} - a_{n+\ell}) \right| \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} |a_{n+\ell+1} - a_{n+\ell}| \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{2^{n+\ell-1}}.$$

Im ersten Schritt (*) haben wir hierbei eine so genannte **Teleskop-Summe** verwendet. Mit der geometrischen Summenformel (Satz 2.10) ergibt sich somit

$$|a_m - a_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{m-n}}}{1 - \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Wählen wir also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ N so groß, dass $2^{-(N-2)} < \varepsilon$ gilt, dann folgt nach dem gerade gezeigten für $m > n \geq N$

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

also ist $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge und damit nach Satz 6.9 konvergent.

Da wir nun wissen, dass es einen Grenzwert gibt, können wir diesen auch exakt bestimmen:

Sei a der Grenzwert von $(a_n)_n$. Dann folgt aus den Rechenregeln für Grenzwerte (Satz 6.8), da $a_n \neq 0$ gilt, aus der Rekursion für a_n

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{a},$$

also muss gelten

$$a^2 - a - 1 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung besitzt genau 2 reelle Lösungen, nämlich $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Da eine dieser Lösungen negativ ist und alle a_n positiv sind, muss folglich

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339\dots$$

gelten.

Diese Zahl nennt man auch den **goldenen Schnitt**. Diese taucht in diversen Kontexten in der Mathematik, aber auch in der Natur und der Kunst auf.

Wir kommen nun noch zu einem wichtigen allgemeinen Konzept, das uns im Laufe der Vorlesung immer wieder begegnen wird.

Definition 6.11. Sei $(a_n)_n$ eine (nicht notwendig konvergente) Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt a ein **Häufungspunkt** von $(a_n)_n$, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}$$

unendlich viele Elemente enthält.

Bemerkung 6.12. Ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent, so ist ihr Grenzwert ein Häufungspunkt. Aber auch divergente Folgen können Häufungspunkte haben. Die Folge $((-1)^n)_n$ etwa hat zwei Häufungspunkte, 1 und -1 .

In diesem Zusammenhang erweist sich das folgende Konzept als nützlich:

Definition 6.13. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und $(n_k)_k$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $n_k < n_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir die Folge $(a_{n_k})_k$ eine **Teilfolge** von $(a_n)_n$.

Beispiel 6.14. Betrachten wir die Folge $(a_n)_n$ mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Die ersten Folgenglieder sind somit

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

Für die Folge $(n_k)_k = (2k-1)_k$ ergibt sich damit die Teilfolge $(a_{2k-1})_k$, deren erste Folgenglieder durch

$$-1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{11}, \dots$$

gegeben sind. Für $(n_k)_k = (2k)_k$ ergibt sich die Teilfolge $(a_{2k})_k$, also

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \dots$$

Wir können dann Häufungspunkte über Teilfolgen charakterisieren:

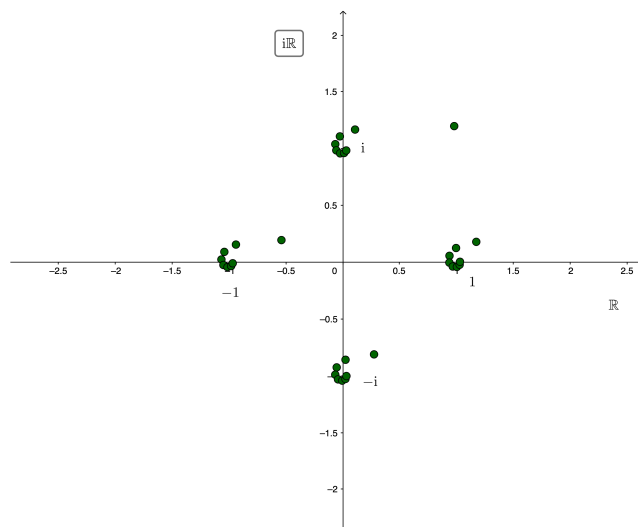
Satz 6.15. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Dann ist a genau dann ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$ existiert mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Beweis. Nehmen wir zunächst an, dass eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ existiert, die gegen den Grenzwert a konvergiert. Sei dann $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ die Abschätzung

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

gilt. Anders ausgedrückt haben wir

$$\{n_k : k \geq K\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon\}.$$

Abbildung 6.2: Graphische Darstellung der Folge $(a_n)_n$

Da die linke Menge offenbar unendlich viele Elemente enthält, muss dies auch für die rechte Menge gelten, so dass a in der Tat ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass a ein Häufungspunkt von $(a_n)_n$ ist. Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge

$$A_k := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid |a_n - a| < \frac{1}{k} \right\}$$

unendlich. Sei dann $n_1 := \min A_1$. Für $k \geq 2$ setzen wir dann $n_k := \min(A_k \setminus \{n_1, \dots, n_{k-1}\})$. Da A_k stets unendlich ist, ist $A_k \setminus \{n_1, \dots, n_{k-1}\}$ sicher nicht leer, also existiert das Minimum. Außerdem gilt stets $n_k < n_{k+1}$. Wir betrachten also die Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$. Dann gilt nach Konstruktion $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$. Für $\varepsilon > 0$ und $K = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ finden wir also für alle $k \geq K$

$$|a_{n_k} - a| \leq \frac{1}{K} < \varepsilon,$$

also folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

q.e.d.

Beispiel 6.16. Betrachten wir die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_n = i^n + \frac{e^{in/5}}{n}.$$

Wir betrachten die Teilfolgen $(b_{n,r})_n$, $r = 0, \dots, 3$, von $(a_n)_n$ mit

$$b_{n,r} = a_{4n+r} = i^{4n+r} + \frac{e^{i(4n+r)/5}}{4n+r} = i^r + \frac{e^{i(4n+r)/5}}{4n+r}.$$

Wegen $|e^{i(4n+r)/5}| = 1$ für alle n folgt damit, dass jede der Folgen $(b_{n,r})_n$ jeweils gegen den Wert i^r konvergiert. Nach Satz 6.15 sind damit $1, i, -1$ und $-i$ alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_n$.

Wir können Häufungspunkte und Teilfolgen verwenden, um Konvergenz (oder meistens eher Divergenz) von Folgen zu zeigen.

Satz 6.17 (Teilfolgenkriterium). *Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen.*

- (i) *Die Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt besitzt, nämlich ihren Grenzwert.*
- (ii) *Die Folge ist genau dann konvergent, wenn jede ihrer Teilfolgen konvergent ist. Konvergieren alle Teilfolgen, so konvergieren sie alle gegen denselben Grenzwert.*

Beweis.

(i) Wegen Satz 6.15 folgt dies direkt aus Teil (ii).

(ii) Nehmen wir zunächst an, dass alle Teilfolgen von $(a_n)_n$ konvergieren. Da jede Folge Teilfolge von sich selbst ist, konvergiert damit auch $(a_n)_n$.

Ist $(a_n)_n$ konvergent, dann sei $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ihr Grenzwert und $(a_{n_k})_k$ eine beliebige Teilfolge. Nach Voraussetzung existiert dann zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

gilt. Da für die Folge $(n_k)_k$, stets $n_k < n_{k+1}$ gilt und alle Folgenglieder natürliche Zahlen sind, muss ein $K \in \mathbb{N}$ existieren mit $n_k \geq N$ für alle $k \geq K$. Dann folgt aber auch für $k \geq K$

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon$$

und damit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Insbesondere haben wir somit auch gezeigt, dass wenn alle Teilfolgen konvergieren, dann auch die Folge selbst, und wie gerade nachgerechnet, konvergieren dann alle Teilfolgen gegen diesen Grenzwert.

q.e.d.

Bemerkung 6.18. Das Teilfolgenkriterium eignet sich in den meisten Fällen eher dazu zu zeigen, dass eine gegebene Folge nicht konvergiert: Es reicht dann, zwei Teilfolgen zu konstruieren, die verschiedene Grenzwerte haben bzw. die selbst nicht konvergieren, was mitunter leichter zu sehen ist als bei der ursprünglichen Folge.

6.1.2 Spezielles für reelle Folgen

Reelle Folgen sind weniger allgemein als komplexe, weshalb man erwarten kann, dass hier einige spezielle Eigenschaften gelten, die v.a. darauf beruhen, dass es sich bei den reellen Zahlen (im Gegensatz zu den komplexen) um einen angeordneten Körper handelt. Schon unsere erste Definition ergibt im Komplexen keinen Sinn.

Definition 6.19. Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen.

(i) Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$a_n \leq a_{n+1},$$

so nennen wir die Folge $(a_n)_n$ **monoton wachsend**. Gilt immer die strikte Ungleichung

$$a_n < a_{n+1},$$

so nennen wir $(a_n)_n$ **streng monoton wachsend**.

(ii) Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$a_n \geq a_{n+1},$$

so nennen wir die Folge $(a_n)_n$ **monoton fallend**. Gilt immer die strikte Ungleichung

$$a_n > a_{n+1},$$

so nennen wir $(a_n)_n$ **streng monoton fallend**.

Monotonie ist eine sehr starke Eigenschaft. Man hat hier nämlich u.a. folgendes Konvergenzkriterium.

Satz 6.20 (Monotonie-Kriterium). Sei $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen. Ist $(a_n)_n$ monoton wachsend und **nach oben beschränkt**, existiert also ein $B \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent. Ist die Folge $(a_n)_n$ monoton fallend und **nach unten beschränkt**, existiert also ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Folge $(a_n)_n$ konvergent.

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung für monoton wachsende Folgen. Der Beweis für monoton fallende Folgen verläuft analog (Übung).

Sei also $(a_n)_n$ monoton wachsend und $B \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für $(a_n)_n$. Dann ist die Menge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, besitzt also nach Satz 4.17 ein Supremum $\sup A =: a \in \mathbb{R}$.

Wir behaupten, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

gilt. Angenommen, das wäre nicht so. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n = n(N) \geq N$ existiert mit $|a_n - a| = a - a_n \geq \varepsilon_0$. Wegen der Monotonie der Folge $(a_n)_n$ gilt damit aber auch für alle N

$$a - a_N \geq a - a_{n(N)} \geq \varepsilon_0,$$

also

$$a_N \leq a - \varepsilon_0.$$

Damit ist aber $a - \varepsilon_0 < a$ eine obere Schranke für die Menge A , was nach der Wahl von $a = \sup(A)$ nicht sein kann. Damit ist unsere Annahme falsch und wir haben wie behauptet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

q.e.d.

Beispiel 6.21. Wir betrachten die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst, dass diese Folge streng monoton wachsend ist:

Man überlegt sich, dass für reelle Zahlen $a \leq b$ die Ungleichung

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a+1}{b+1}$$

gilt (Übung).

Mit dem Binomischen Lehrsatz 2.15 können wir somit schreiben:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{n-k+1}{n} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n+1}{n+1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{n+1-k+1}{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \frac{1}{(n+1)^k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\
&\stackrel{\leq}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Es folgt also $a_n \leq a_{n+1}$, so dass die Folge $(a_n)_n$ wie behauptet streng monoton wachsend ist.

Wir zeigen nun, dass die Folge nach oben beschränkt ist, genauer gilt $a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wie wir nun zeigen wollen:

Wie in der Rechnung oben gesehen können wir

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

schreiben. Jeder Faktor $(1 - l/n)$, $l = 1, \dots, k-1$, ist sicher durch 1 nach oben beschränkt, also finden wir hiermit

$$a_n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Verwendet man nun für $k \geq 2$ die Ungleichung

$$k! \geq 2^{k-1},$$

die man leicht mittels vollständiger Induktion beweist (Übung), ergibt sich nach der geometrischen Summenformel für $n \geq 2$:

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^k} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1 - 1/2^{n-1}}{1 - 1/2} \leq 2 + 1 = 3.$$

Die Folge $(a_n)_n$ ist demnach (streng) monoton wachsend und nach oben beschränkt, also besitzt sie nach dem Monotoniekriterium (Satz 6.20) einen Grenzwert.

Der Grenzwert der Folge in Beispiel 6.21 ist eine sehr wichtige Zahl in der Mathematik.

Definition 6.22. Wir nennen den Grenzwert der Folge $(a_n)_n$ aus Beispiel 6.21 die **EULERSche Zahl** e ,

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.7182818284590452\dots$$

Generell gilt, dass Grenzwerte die Anordnung in \mathbb{R} respektieren.

Lemma 6.23. Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge reeller Zahlen und es gebe ein $B \in \mathbb{R}$ mit

$$a_n \leq B \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq B.$$

Beweis. Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n =: a \in \mathbb{R}$ und wir nehmen an, dass $a > B$ gilt. Wir setzen dann $\varepsilon = \frac{a-B}{2}$. Für dieses ε existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ die Abschätzung

$$|a - a_n| = a - a_n \leq a - B < \varepsilon = \frac{a - B}{2},$$

was offenbar nicht stimmen kann. Also muss unsere Annahme, dass $a > B$ gilt, falsch gewesen sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

q.e.d.

Bemerkung 6.24. (i) Die analoge Aussage für untere Schranken konvergenter Folgen gilt ebenso, mit einem analogen Beweis.

(ii) Im Allgemeinen folgt in der Situation von Lemma 6.23 aus der strikten Ungleichung $a_n < B$ **NICHT** die strikte Ungleichung $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < B$. Etwa für $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ haben wir $a_n < 1$, aber es gilt nach Satz 6.8 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Wenn man eine Folge von oben und von unten durch andere Folgen beschränken kann, so kann man daraus ein nützliches Konvergenzkriterium ableiten.

Satz 6.25 (Sandwich-Lemma). Seien $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ Folgen reeller Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

erfüllt ist.

Konvergieren $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ gegen denselben Grenzwert a , so konvergiert auch die Folge $(b_n)_n$ gegen a .

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ sowohl

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{als auch} \quad |c_n - a| < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Dann folgt auch $|c_n - a_n| = c_n - a_n < \frac{2}{3}\varepsilon$ und somit auch $b_n - a_n \leq c_n - a_n < \frac{2}{3}\varepsilon$, womit wir

$$|b_n - a| \leq |b_n - c_n| + |c_n - a| < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

erhalten, so dass auch die Folge $(b_n)_n$ wie behauptet gegen den Grenzwert a konvergiert.
q.e.d.

Beispiel 6.26. Wir betrachten die Folge $(b_n)_n$ mit

$$b_n = \frac{\sin(n)}{n}.$$

Da bekanntermaßen für alle $n \in \mathbb{N}$ $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ gilt, betrachten wir die Folgen $(a_n)_n$ und $(c_n)_n$ mit

$$a_n = -\frac{1}{n} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{1}{n}.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ gilt, folgt nach dem Sandwich-Lemma 6.25 auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0.$$

Allgemein gilt für eine beliebige Nullfolge $(a_n)_n$ und eine beschränkte Folge $(b_n)_n$, dass die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)_n$ ebenfalls gegen 0 konvergiert.

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Satz, der allerdings meist mehr von theoretischem Interesse ist, weshalb wir den Beweis nur skizzieren wollen.

Satz 6.27 (Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS). *Jede beschränkte Folge $(a_n)_n$ reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis.[Beweisskizze] Sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann existiert ein $B > 0$, so dass die Menge $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ im Intervall $I = I_1 = [-B, B]$ enthalten ist.

Wir konstruieren nun eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_k$. Dazu sei $n_1 = 1$. Dann halbieren wir das Intervall I_1 und zerlegen es in die Intervalle $[-B, 0]$ und $[0, B]$. Mindestens eines dieser Intervalle muss dann unendlich viele Folgenglieder enthalten. Dieses Intervall sei I_2 (enthalten beide Intervalle unendlich viele Elemente, entscheiden wir uns stets für das rechte Intervall) und wir wählen $n_2 := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in I_2\} \setminus \{n_1\}$.

Das Intervall I_2 können wir nun wieder halbieren und ein Intervall I_3 finden, das unendlich viele Folgenglieder enthält und wir wählen $n_3 := \min\{n \in \mathbb{N} : a_n \in I_3\} \setminus \{n_1, n_2\}$. Diesen Prozess wiederholen wir für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da sich in jedem Schritt die Länge des Intervalls halbiert, existiert genau ein $a \in \mathbb{R}$, dass in allen Intervallen I_k enthalten ist. Dieses a ist dann der Grenzwert der Teilfolge $(a_{n_k})_k$.

q.e.d.

Bemerkung 6.28. (i) Der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS gibt zwar in seinem Beweis eine prinzipielle Möglichkeit, eine konvergente Teilfolge zu finden, diese ist allerdings mitunter nicht sehr praktikabel. Auch über den Grenzwert dieser Folge erhält man keine exakten Informationen.

(ii) Der letzte Schritt der obigen Beweisskizze ist der Punkt, an dem der Beweis nicht ganz formal funktioniert, man muss nämlich zeigen, dass diese **Intervallschachtelung** tatsächlich funktioniert. In der Tat kann man beweisen, dass dies äquivalent zur Vollständigkeit der reellen Zahlen ist.

Bemerkung 6.29. Man überlegt sich leicht, dass eine Folge *komplexer* Zahlen $(a_n)_n$ genau dann konvergiert, wenn die reellen Folgen $(\operatorname{Re}(a_n))_n$ und $(\operatorname{Im}(a_n))_n$ beide konvergieren. Auf diese Weise lässt sich der Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS auch wörtlich auf komplexe Folgen übertragen.

Wir wollen nun den Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS verwenden, um den Beweis des CAUCHY-Kriteriums (Satz 6.9) zu vervollständigen. Wir hatten bereits gezeigt, dass jede konvergente Folge komplexer Zahlen eine CAUCHY-Folge ist. Es bleibt also zu zeigen, dass jede CAUCHY-Folge konvergent ist.

Beweis von Satz 6.9 (2. Teil) Sei $(a_n)_n$ eine komplexe CAUCHY-Folge. Dann existiert zu $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ die Abschätzung

$$|a_m - a_n| < 1$$

gilt. Insbesondere gilt also für alle $n \geq N$

$$|a_n - a_N| < 1.$$

Für $B := \max\{|a_1|, \dots, |a_N|, |a_N| + 1\}$ folgt also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq B,$$

die Folge ist also beschränkt. Nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS 6.27 (mit Bemerkung 6.29) existiert damit eine Teilfolge $(a_{n_k})_k$ von $(a_n)_n$, die gegen einen Grenzwert $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K$ die Abschätzung

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Da $(a_n)_n$ eine CAUCHY-Folge ist, existiert ebenso ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq M$ die Abschätzung

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

erfüllt ist. Für $n \geq \max\{M, n_K\}$ haben wir dann

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_K}| + |a_{n_K} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Damit konvergiert auch die ganze Folge $(a_n)_n$ gegen den Grenzwert a und die Behauptung ist bewiesen.

q.e.d.

6.2 Reihen

6.2.1 Konvergenzkriterien

Wir beginnen diesen Abschnitt mit einem Beispiel.

Beispiel 6.30. Die Dezimaldarstellung einer reellen Zahl kann man als eine Summe auffassen. Es gilt etwa

$$\pi = 3,14159\dots = 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 1 \cdot 10^{-3} + 5 \cdot 10^{-4} + 9 \cdot 10^{-5} + \dots$$

Ist allgemeiner für $n \in \mathbb{N}$ $d_n \in \{0, \dots, 9\}$ die n -te Nachkommastelle einer reellen Zahl $x \in (0, 1)$, so haben wir

$$x = d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2} + d_3 \cdot 10^{-3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot 10^{-n}.$$

Eine solche unendliche Summe nennen wir eine **Reihe**.

Wir wollen diesen Begriff nun etwas formaler einführen.

Definition 6.31. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann nennen wir die Folge $(s_N)_N$ mit

$$s_N = \sum_{n=1}^N a_n$$

die Folge der **Partialsommen** der Folge $(a_n)_n$. Für diese Folge schreiben wir auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

und nennen Sie eine unendliche **Reihe**.

Ist die Folge $(s_N)_N$ konvergent, so sagen wir auch, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und wir bezeichnen den Grenzwert ebenso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n \right).$$

Diesen nennen wir den **Wert** der Reihe.

Eine sehr wichtige Reihe, die immer wieder auftritt, ist die im folgenden Satz.

Satz 6.32. Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann konvergiert die **geometrische Reihe** $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ und es gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Beweis. Nach der geometrischen Summenformel (Satz 2.10) gilt für alle $q \neq 1$, also insbesondere für $|q| < 1$

$$s_N = \sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Wegen $|q| < 1$ gilt $\lim_{N \rightarrow \infty} q^{N+1} = 0$ (Übung), also folgt nach den Rechenregeln für Grenzwerte in Satz 6.8

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{N \rightarrow \infty} s_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q},$$

wie behauptet.

q.e.d.

Beispiel 6.33. Wir wollen zeigen, dass in den reellen Zahlen

$$0,99999\dots = 0,\bar{9} = 1$$

gilt. Hierzu schreiben wir wie in Beispiel 6.30 die Zahl $0,\bar{9}$ als Reihe,

$$0,\bar{9} = \sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}.$$

Nach den Grenzwertrechenregeln und Satz 6.32 folgt dann

$$0,\bar{9} = 9 \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n} = 9 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1 \right) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Wir wollen nun einige Konvergenzkriterien für Reihen herleiten. Zunächst haben wir eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe.

Lemma 6.34. Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ höchstens dann, wenn $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist.

Beweis. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann bedeutet das, dass die Folge der Partialsummen

$$(s_N)_N = \left(\sum_{n=1}^N a_n \right)_N$$

gegen einen Grenzwert konvergiert. Diesen bezeichnen wir mit s . Nun gilt, wenn wir $s_0 := 0$ setzen, für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

und nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt somit, dass die Folge $(a_n)_n$ konvergiert und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

wie wir behauptet hatten.

q.e.d.

Bemerkung 6.35. ACHTUNG: Die Umkehrung von Lemma 6.34 gilt **NICHT**, d.h. aus der Tatsache, dass $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, folgt im Allgemeinen noch nicht, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Eines der wichtigsten Gegenbeispiele hierfür ist die **harmo-nische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Betrachtet man nämlich die (Teil-)Folge der Partialsummen

$$(s_N)_N = \left(\sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} \right)_N,$$

dann gilt

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 + \frac{1}{2} \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}_{\geq \frac{1}{4}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}_{\geq \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right)}_{\geq \frac{1}{8}} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} = 1 + \frac{3}{2} \\ &\vdots \\ s_N &\geq 1 + \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge der Partialsummen nicht beschränkt, also nicht konvergent.

Schon im 14. Jahrhundert konnte NIKOLAUS VON ORESME im Wesentlichen mit diesem Argument die Divergenz der Reihe beweisen, was insofern erstaunlich ist, dass die Reihe sehr langsam wächst, z.B. ist

$$\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n} \approx 9.7876... < 10.$$

Direkt aus dem CAUCHY-Kriterium für allgemeine Folgen erhalten wir das folgende CAUCHY-Kriterium für Reihen.

Satz 6.36 (CAUCHY-Kriterium für Reihen). Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $m, n \geq N$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nach Definition genau dann, wenn die Folge der Partialsummen

$$(s_M)_M = \left(\sum_{k=1}^M a_k \right)_M$$

konvergiert. Nach Satz 6.9 ist dies genau dann der Fall, wenn diese Folge eine CAUCHY-Folge ist, falls also zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $N \leq m \leq n$ die Abschätzung

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon$$

gilt. Das ist aber genau die Behauptung.

q.e.d.

Beispiel 6.37. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Diese ist eng mit der harmonischen Reihe verwandt, konvergiert allerdings:

Für natürliche Zahlen $N \leq m \leq n$ gilt nämlich

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \stackrel{\text{Teleskopsumme}}{=} \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{N}.$$

Wählen wir also zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ $N > \frac{1}{\varepsilon}$, so ergibt sich für $m, n \geq n$

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon,$$

so dass die Reihe nach dem CAUCHY-Kriterium 6.36 konvergiert.

Das so genannte **Basel-Problem** im 17. und 18. Jahrhundert stellte die Aufgabe, den genauen Wert dieser Reihe zu ermitteln. Es stammt ursprünglich aus einer Arbeit aus dem Jahr 1650 von MENGOLI und wurde zuerst von EULER gelöst, der 1734 zeigen konnte, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

gilt. Um dies zu beweisen reichen die Methoden in dieser Vorlesung allerdings leider nicht aus.

Speziell für reelle Reihen gibt es noch zwei (natürlich etliche) weitere Konvergenzkriterien, die man oft sehr gut anwenden kann.

Satz 6.38 (Monotoniekriterium für Reihen). Sei $(a_n)_n$ eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, also $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn sie beschränkt ist.

Beweis. Wenn die Reihe konvergiert, ist sie insbesondere beschränkt (vgl. Lemma 6.7), hier ist also nichts zu zeigen.

Sie also nun die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ beschränkt. Da die Summanden a_n nach Voraussetzung alle nicht-negativ sind, ist die Folge der Partialsummen offenbar monoton wachsend und, wie gerade angenommen, beschränkt, also nach dem Monotonie-Kriterium 6.20 konvergent.

q.e.d.

Beispiel 6.39. Als Verallgemeinerung von Bemerkung 6.35 und Beispiel 6.37 betrachten wir die **allgemeine harmonische Reihe**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Für $\alpha = 1$ erhalten die ursprüngliche harmonische Reihe aus Bemerkung 6.35, von der wir dort gesehen hatten, dass sie divergiert. Da für $\alpha \leq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ nun $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n}$ gilt und die harmonische Reihe nicht beschränkt ist, kann die allgemeine harmonische Reihe für kein $\alpha \leq 1$ konvergieren.

Für $\alpha = 2$ erhalten wir die Reihe aus Beispiel 6.37, von der wir dort gesehen hatten, dass sie konvergiert. Wir wollen nun zeigen, dass dies für alle $\alpha > 1$ der Fall ist: Sei

dazu $\alpha > 1$ und setzen wir $\varepsilon := \alpha - 1 > 0$. Dann können wir für jedes $N \in \mathbb{N}$ wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \\
 & \leq \sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n^\alpha} \\
 & = 1 + \underbrace{\frac{1}{2^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{3^{1+\varepsilon}}}_{\leq 2 \cdot \frac{1}{2^{2+\varepsilon}}} + \underbrace{\frac{1}{4^{1+\varepsilon}} + \dots + \frac{1}{7^{1+\varepsilon}}}_{\leq 4 \cdot \frac{1}{4^{1+\varepsilon}}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{(2^{N-1})^{1+\varepsilon}} + \dots + \frac{1}{(2^N - 1)^{1+\varepsilon}}}_{\leq 2^{N-1} \cdot \frac{1}{(2^{N-1})^{1+\varepsilon}}} \\
 & \leq 1 + \frac{1}{2^\varepsilon} + \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^{N-1} \\
 & = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\varepsilon}\right)^n = \frac{1}{1 - (1/2^\varepsilon)} = \frac{2^\varepsilon}{2^\varepsilon - 1}.
 \end{aligned}$$

Da die so gefundene obere Schranke nicht mehr von N abhängt, ist die allgemeine harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ also nach oben beschränkt und damit, weil alle Summanden nicht negativ sind, nach Satz 6.38 konvergent.

Da die allgemeine harmonische Reihe in vielen Kontexten auftritt, formulieren wir unsere Erkenntnisse aus dem letzten Beispiel noch einmal als Satz.

Satz 6.40. Die *allgemeine harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

ist für alle $\alpha > 1$ konvergent und für $\alpha \leq 1$ divergent.

Ebenfalls praktisch ist folgendes Kriterium für so genannte **alternierende Reihen**, das auf LEIBNIZ zurückgeht.

Satz 6.41 (LEIBNIZ-Kriterium). Sei $(a_n)_n$ eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Beweis. Wie üblich setzen wir für $N \in \mathbb{N}$ $s_N = \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n$.

Betrachten wir die Teilfolge $(s_{2N})_N$. Da die Folge $(a_n)_n$ monoton fallend ist, gilt auch

$$s_{2N+2} = s_{2N} - a_{2N+1} + a_{2N+2} \leq s_{2N},$$

also ist die Teilfolge $(s_{2N})_N$ ebenfalls monoton fallend. Wegen

$$s_{2N} = -a_1 + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{2N-2} - a_{2N-1}) + a_{2N} \geq a_{2N} - a_1 \geq -a_1$$

ist die Folge auch nach unten beschränkt, also nach dem Monotonie-Kriterium 6.20 konvergent gegen einen Grenzwert s .

Genauso zeigt man, dass die Teilfolge $(s_{2N-1})_N$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, also ebenfalls konvergiert. Wegen $s_{2N-1} = s_{2N-2} - a_{2N-1}$ und der Tatsache, dass $(a_n)_n$ eine Nullfolge ist, folgt, dass die Folge $(s_{2N-1})_N$ ebenfalls gegen den Grenzwert s konvergiert.

Damit konvergiert aber auch die ganze Folge $(s_N)_N$, und damit die Reihe.

q.e.d.

Beispiel 6.42. 1. Zwei sehr bekannte alternierende Reihen, deren Konvergenz man unmittelbar aus dem LEIBNIZ-Kriterium 6.41 einsieht, sind die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}.$$

Letztere nennt man auch die **LEIBNIZ-Reihe**. Ihre Grenzwerte kann man mit fortgeschritteneren Methoden exakt bestimmen, es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Die Monotonie der Nullfolge $(a_n)_n$ im LEIBNIZ-Kriterium 6.41 ist tatsächlich notwendig: Die Folge $(a_n)_n$ mit

$$a_n = \begin{cases} \frac{2}{n} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist offenbar eine Nullfolge, aber es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

also haben wir es mit der bekanntermaßen divergenten harmonischen Reihe zu tun (vgl. Bemerkung 6.35).

6.2.2 Absolute Konvergenz

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem, wie wir sehen werden, stärkeren Konvergenzbegriff für Reihen, der für allgemeine Folgen keine direkte Entsprechung hat.

Definition 6.43. Wir nennen eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **absolut konvergent**, falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Eine Reihe, die zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent ist, nennen wir **bedingt konvergent**.

Wir haben dazu zunächst folgende Aussage.

Satz 6.44. Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie auch im herkömmlichen Sinne (vgl. Definition 6.31).

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann ist nach Definition die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent. Nach dem CAUCHY-Kriterium 6.36 existiert dann zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq N$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon$$

gilt.

Wegen der Dreiecksungleichung damit gilt aber auch

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon,$$

also folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem CAUCHY-Kriterium.

q.e.d.

Beispiel 6.45. 1. Die Umkehrung von Satz 6.44 gilt im Allgemeinen **NICHT**, d.h. es gibt Reihen, die zwar konvergent, aber eben nicht absolut konvergent, also bedingt konvergent sind. So konvergiert etwa die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ nach dem LEIBNIZ-Kriterium 6.41, aber die Reihe der Absolutbeträge ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die harmonische Reihe, von der wir wissen, dass sie divergiert.

2. Auch wenn eine Reihe absolut konvergiert, müssen die Werte $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ nicht gleich sein. So gilt etwa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(Dass der Wert sich genau halbiert ist Zufall und kein allgemeines Phänomen). Es gilt allerdings stets die **Dreiecksungleichung für Reihen**,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Wir wollen noch einige Kriterien für absolute Konvergenz kennenlernen.

Satz 6.46 (Majorantenkriterium). Sei $(b_n)_n$ eine Folge, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergiert. Für jede Folge $(a_n)_n$ mit $|a_n| \leq |b_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. Sei $b \in \mathbb{R}$ der Wert der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$.

Die Folge $(s_N)_N = \left(\sum_{n=1}^N |a_n|\right)_N$ ist offenbar monoton wachsend, da stets $|a_n| \geq 0$ gilt. Außerdem gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N |a_n| \leq \sum_{n=1}^N |b_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = b,$$

also ist die Folge $(s_N)_N$ auch beschränkt. Nach dem Monotonie-Kriterium 6.20 ist sie somit konvergent, also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

q.e.d.

Sehr wichtig sind auch die folgenden beiden Kriterien, die beide aus dem Majorantenkriterium folgen.

Satz 6.47 (Quotientenkriterium). Sei $(a_n)_n$ eine Folge komplexer Zahlen und es gebe ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n \neq 0$ für alle $n \geq N_0$ gilt. Existiert ein $0 < q < 1$, so dass für alle $n \geq N_0$ die Abschätzung

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$$

gilt, so ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $k \geq 0$

$$|a_{N_0+k}| \leq |a_{N_0}| \cdot q^k.$$

Definieren wir also die Folge $(b_n)_n$ mit

$$b_n = \begin{cases} |a_n| & n < N_0 \\ |a_{N_0}| q^k & k = n - N_0 \geq 0. \end{cases},$$

dann gilt stets $|a_n| \leq |b_n|$ und wir haben

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{n=1}^{N_0-1} |a_n| + |a_{N_0}| \frac{1}{1-q}$$

wegen der Formel für die geometrische Reihe (Satz 6.32). Nach Definition ist damit $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine nach oben beschränkte Reihe nicht-negativer reeller Zahlen, also absolut konvergent. Nach dem Majorantenkriterium ist also auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

q.e.d.

Bemerkung 6.48. (i) Die Bedingung $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q$ für ein $0 < q < 1$ in Satz 6.47 ist **NICHT** äquivalent zu $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$: Die Folge $(1/n)_n$ erfüllt

$$\frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} < 1$$

für alle n , aber die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist nicht (absolut) konvergent.

(ii) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist zwar absolut konvergent, aber es gilt

$$\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{1 + 2/n + 1/n^2} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

also erfüllt nicht jede absolut konvergente Reihe das Quotientenkriterium.

Beispiel 6.49. Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{10^n}$. Die summierte Folge ist also $(a_n)_n$ mit

$$a_n = \frac{5+n}{10^n}.$$

Es gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{5+(n+1)}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{5+n} = \frac{1}{10} \cdot \frac{6+n}{5+n} \leq \frac{3}{25} =: q < 1,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass für $a \geq b \geq 0$ und $c \geq 0$ stets

$$\frac{a+c}{b+c} \leq \frac{a}{b}$$

gilt (Übung). Nach dem Quotientenkriterium ist die Reihe also absolut konvergent.

Etwas allgemeiner als das Quotientenkriterium, aber in der Regel schwieriger anzuwenden, ist das folgende Kriterium für absolute Konvergenz.

Satz 6.50 (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und es mögen ein $0 < q < 1$ und ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $n \geq N_0$ die Abschätzung

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$$

gilt. Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Ist hingegen für unendlich viele $n \geq N_0$ $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so divergiert die Reihe.

Beweis. Die ersten N_0 Summanden ändern nichts am Konvergenzverhalten der Reihe, d.h. wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $N_0 = 1$ annehmen. Dann folgt aber aus der Voraussetzung $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für ein $0 < q < 1$ auch

$$|a_n| \leq q^n,$$

also ist, da $0 < q < 1$ gilt, die absolut konvergente geometrische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

(vgl. Satz 6.32) eine Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, die damit nach dem Majorantenkriterium 6.46 selbst konvergiert.

Gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n , so können die Reihenglieder a_n keine Nullfolge bilden, also divergiert die Reihe in diesem Fall.

q.e.d.

Beispiel 6.51. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

Es gilt dann

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

Ähnlich wie in Beispiel 6.21 kann man zeigen, dass die Folge $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ monoton wächst und gegen $\frac{1}{e}$ konvergiert, also folgt

$$\sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}} \leq q := \frac{1}{e} \approx 0.367879... < 1,$$

also folgt die absolute Konvergenz der Reihe nach dem Wurzelkriterium.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir noch einen wichtigen Unterschied zwischen absolut und bedingt konvergenten Reihen hinweisen. Wir haben dazu den folgenden Satz von RIEMANN, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 6.52 (RIEMANNSCHEr Umordnungssatz). (i) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen und sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann existiert eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass die umgeordnete Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

gegen den Wert α konvergiert. Ebenso existieren Bijektionen $\psi_+, \psi_- : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, so dass die umgeordneten Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_+(n)} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{\psi_-(n)}$$

nach oben bzw. nach unten unbeschränkt sind.

(ii) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe reeller (oder komplexer) Zahlen. Dann gilt für jede Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\varphi(n)}.$$

Etwas prägnanter formuliert kann man die Summationsreihenfolge bei absolut konvergenten Reihen beliebig abändern und verändert den Wert der Reihe nicht, bei bedingt konvergenten Reihen allerdings kann man die Summationsreihenfolge nicht einfach beliebig vertauschen, sondern man kann damit den Wert der Reihe beliebig verändern.

6.2.3 Die Exponentialreihe

Eine extrem wichtige Anwendung des Quotientenkriteriums ist der folgende Satz.

Satz 6.53. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.

Beweis. Für $z = 0$ verschwinden alle Summanden der Reihe außer dem für $n = 0$. Die Summe ist dann also endlich und damit insbesondere (absolut) konvergent. Für beliebiges $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben wir

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| = \frac{|z|}{n+1}.$$

Für $n > \lfloor |z| \rfloor$ folgt dann

$$\left| \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{z^n} \right| \leq \frac{|z|}{\lfloor |z| \rfloor + 1} =: q < 1,$$

also ist die Reihe nach dem Quotientenkriterium absolut konvergent.

q.e.d.

Die Reihe aus Satz 6.53 ist so wichtig, dass sie einen eigenen Namen bekommt.

Definition 6.54. Die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

aus Satz 6.53 nennen wir die **Exponentialreihe**. Durch sie wird die **Exponentialfunktion**

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

definiert.

Bemerkung 6.55. Aus der Definition ist ersichtlich, dass für $x \in \mathbb{R}$ auch $\exp(x)$ reell ist. Tatsächlich gilt sogar $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wie wir später sehen werden.

Zwei spezielle Werte der Exponentialfunktion sollte man sich in jedem Fall merken.

Proposition 6.56. *Es gilt*

$$\exp(0) = 1 \quad \text{und} \quad \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,$$

wobei $e = 2,71828\dots$ wie immer die EULERSche Zahl bezeichnet (vgl. Definition 6.22).

Beweis. Dass $\exp(0) = 1$ gilt, ist aus der Definition ersichtlich.

Wir deuten den Beweis der zweiten Behauptung,

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e,$$

nur an.

In Beispiel 6.21 hatten wir gesehen, dass für $n \in \mathbb{N}$ stets

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

gilt. Analog kann man zeigen, dass auch

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

gilt. Da nach Beispiel 6.21

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

gilt und mit einem analogen Beweis auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

folgt (Übung), folgt nach dem Sandwich-Lemma 6.25 auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

q.e.d.

Wir werden uns später noch intensiv mit der Exponentialfunktion und ihren Eigenschaften befassen und dabei viele der Ihnen vermutlich aus der Schule bekannten Rechenregeln, wie etwa $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ und andere, herleiten.

Zum Abschluss noch eine kleine Bemerkung über die Zahl e :

Proposition 6.57. *Die Zahl e ist irrational.*

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es im Gegenteil natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$e = \frac{a}{b},$$

wobei wir wieder den Bruch als vollständig gekürzt annehmen dürfen. Wegen Proposition 6.56 folgt dann für beliebiges $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a}{b} = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $b \cdot N!$, so ergibt sich

$$(*) \quad N! \cdot a = b \sum_{n=0}^N N \cdot \dots \cdot (N - n + 1) + b \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N+1) \cdot \dots \cdot n}.$$

Die linke Seite ist offenbar immer eine ganze Zahl, ebenso der erste Term auf der rechten Seite. Aber es gilt

$$\frac{1}{N+1} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N+1) \cdot \dots \cdot n} < \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{N+1} \right)^k = \frac{1/(N+1)}{1 - 1/(N+1)} = \frac{1}{N}.$$

Es gilt also

$$\frac{b}{N+1} < b \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(N+1) \cdot \dots \cdot n} < \frac{b}{N}.$$

Wählen wir $N > 2b$, so ist also der zweite Term auf der rechten Seite von (*) sicher keine ganze Zahl, also haben wir einen Widerspruch.

q.e.d.

Kapitel 7

Stetige Funktionen

Die Analysis beschäftigt sich generell mit Funktionen, d.h. Abbildungen von Teilmengen der reellen oder komplexen Zahlen (oder auch allgemeineren, verwandten Objekten) in die reellen bzw. komplexen Zahlen. Eine fundamental wichtige Klasse von Funktionen bilden die stetigen Funktionen, die wir hier einführen wollen.

7.1 Definitionen und Beispiele

Der Einfachheit halber betrachten wir ab sofort nur reelle Funktionen. Alle Aussagen dieses Abschnittes lassen sich jedoch direkt für komplexe Funktionen übertragen.

Definition 7.1 (ε - δ -Kriterium für Stetigkeit). Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht-leere Teilmenge von \mathbb{R} und

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion (Abbildung). Weiter sei $x_0 \in D$. Die Funktion f heißt **stetig** in x_0 , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Ist die Funktion f in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig, so sagen wir auch, dass f stetig auf D ist.

Geometrisch interpretiert man die Definition von Stetigkeit wie folgt: Gibt man sich um den Funktionswert $f(x_0)$ eine „Toleranz“ oder Fehlerschranke von ε vor, dann existiert ein Intervall um x_0 , über dem der Graph von f ganz in einem Streifen zwischen $f(x_0) - \varepsilon$ und $f(x_0) + \varepsilon$ bewegt, man bleibt also immer innerhalb der vorgegebenen Toleranz um diesen Wert (siehe Abbildung 7.1).

Bemerkung 7.2. Es ist wichtig zu bemerken, dass δ in Definition 7.1 in der Regel sowohl von dem vorgegebenen ε , also auch vom Punkt x_0 abhängt. Gibt es eine Wahl für δ , die nicht von x_0 abhängt, so nennen wir die Funktion **gleichmäßig stetig**.

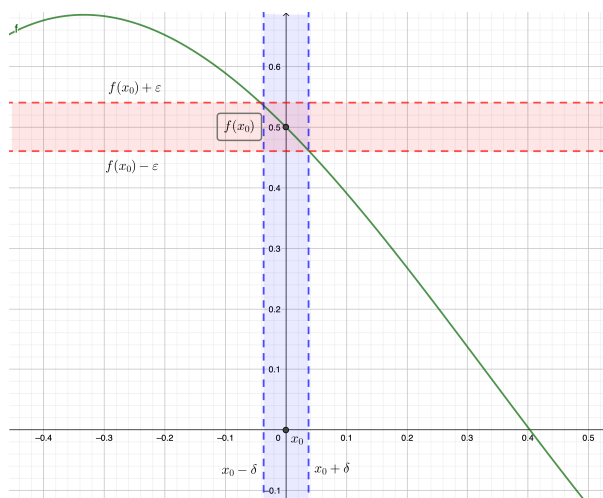


Abbildung 7.1: Im Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ entfernen sich die Funktionswerte höchstens um ε von $f(x_0)$.

Die meisten Funktionen, die man aus der Schule kennt, sind stetige Funktionen, allerdings kommen unstetige Funktionen auch in Anwendungen durchaus vor.

Beispiel 7.3. 1. Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

ist stetig auf \mathbb{R} .

Um dies zu sehen, sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Wählen wir dann $\delta := \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon} - |x_0| > 0$, so ergibt sich für $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \delta |x + x_0| \leq \delta(|x| + |x_0|) \\ &< \delta(2|x_0| + \delta) = (\delta + |x_0|)^2 - |x_0|^2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Funktion f auf \mathbb{R} stetig.

2. Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist überall stetig. Wir zeigen nur die Stetigkeit in $x_0 = 0$. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen dann $\delta := \varepsilon$ und erhalten für $x \in (-\delta, \delta)$

$$||x| - |0|| = |x| < \delta = \varepsilon.$$

Also folgt die Stetigkeit in $x_0 = 0$. Auch für $x_0 \neq 0$ können wir $\delta = \varepsilon$ wählen, wir überlassen jedoch die Details als Übung.

3. Die so genannte **HEAVISIDE-FUNKTION**

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

ist ein Beispiel für eine Funktion, die im Nullpunkt nicht stetig ist: Für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ lässt sich kein $\delta > 0$ finden, so dass für alle $x \in (-\delta, \delta)$

$$|h(x) - h(0)| = |h(x) - 1| < \frac{1}{2}$$

gilt, denn für jedes $x < 0$ gilt $h(x) - 1 = -1$.

Die DIRICHLET-Funktion

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist ein Beispiel einer Funktion, die in keinem einzigen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist (warum?).

Eine wichtige Charakterisierung stetiger Funktionen beinhaltet der folgende Satz.

Satz 7.4 (Folgenkriterium für Stetigkeit). Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $x_0 \in D$, wenn für jede Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

gilt.

Beweis. Sei zunächst $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $(x_n)_n$ eine beliebige Folge mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Sei dann $\varepsilon > 0$. Da f stetig ist, existiert dann ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ auch $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt, existiert nun ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ $|x_n - x_0| < \delta$ gilt (vgl. Definition 6.4). Dann gilt aber für $n \geq N$

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$$

also folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$, wie wir behauptet hatten.

Die Rückrichtung zeigen wir durch Kontraposition: Wir zeigen, dass, wenn f nicht stetig in x_0 ist, es eine Folge $(x_n)_n$ gibt, die gegen x_0 konvergiert, deren Funktionswerte $(f(x_n))_n$ aber nicht gegen $f(x_0)$ konvergieren. Sei dazu $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 **nicht** stetig, d.h. es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ existiert, so dass $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ gilt. Für $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ wählen wir dann jeweils ein solches $x_n \in D$ mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$. Die so konstruierte Folge $(x_n)_n$ konvergiert dann offenbar gegen x_0 , aber es gilt stets $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$, die Folge $(f(x_n))_n$ konvergiert also **nicht** gegen $f(x_0)$, also haben wir eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften gefunden.

q.e.d.

Das Folgenkriterium eignet sich bei konkreten Beispielen meist mehr um zu zeigen, dass eine Funktion in einem gegebenen Punkt nicht stetig ist.

Beispiel 7.5. 1. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f in $x_0 = 0$ nicht stetig, denn z.B. für die Folge $(x_n)_n = (1/n)_n$, die gegen 0 konvergiert, ist die Folge $(f(1/n))_n = (n)_n$ offenbar nicht beschränkt, also nicht konvergent, schon gar nicht gegen den Grenzwert 0.

2. Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig und betrachten wir die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \sin(1/x) & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion in $x_0 = 0$ nicht stetig ist, welchen Wert α auch immer haben mag. Ist nämlich $\alpha \neq 0$, so betrachten wir die Folge $(x_n)_n = (\frac{1}{\pi n})_n$. Diese konvergiert gegen 0 und wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$ $g(x_n) = \sin(n\pi) = 0$. Die Folge $(g(x_n))_n$ ist also konstant und konvergiert damit gegen 0, aber eben nicht gegen α .

Ist $\alpha = 0$, wählen wir zum Beispiel die Folge $(x_n)_n = (\frac{2}{(4n+1)\pi})_n$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$g(x_n) = \sin\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Die Folge der Funktionswerte $(g(x_n))_n$ konvergiert also gegen 1 und eben nicht gegen α .

Da wir uns bereits intensiv mit Folgen beschäftigt haben, erweist sich das Folgenkriterium in vielen Beweisen von Eigenschaften stetiger Funktionen (siehe Abschnitt 7.2) als hilfreicher als die Definition selbst. Auch die folgenden Rechenregeln für stetige Funktionen lassen sich mittels des Folgenkriteriums direkt aus den Grenzwertsätzen (Satz 6.8) folgern.

Satz 7.6. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Weiter seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die beide in x_0 stetig sind. Dann gilt Folgendes:

(i) Für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ ist auch die Funktion

$$\lambda f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \lambda f(x)$$

in x_0 stetig.

(ii) Die Funktionen

$$f + g : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

sind stetig in x_0 .

(iii) Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

stetig in x_0 .

Beweis. Sei $(x_n)_n$ eine beliebige Folge mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Nach dem Folgenkriterium (Satz 7.4) gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte in Satz 6.8 folgt damit aber auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda f(x_n) = \lambda f(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(x_0) + g(x_0)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot g(x_n) = f(x_0)g(x_0)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$, letzteres, weil wir $g(x) \neq 0$ für $x \in D$ angenommen hatten. Nach dem Folgenkriterium sind damit aber alle hier betrachteten Funktionen in x_0 stetig, wie behauptet.

q.e.d.

Mit Satz 7.6 können wir nun sofort von einer ganzen Klasse von Funktionen zeigen, dass sie stetig sind.

Korollar 7.7. (i) Jede **Polynomfunktion**

$$p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

ist auf ganz \mathbb{R} stetig.

(ii) Jede **rationale Funktion** $f = \frac{p}{q}$ für Polynomfunktionen p, q ist auf Ihrem Definitionsbereich $D := \mathbb{R} \setminus \{a \in \mathbb{R} : q(a) = 0\}$ stetig.

Beweis. Die Funktion

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$$

ist stetig, wie z.B. sofort aus dem Folgenkriterium folgt. Jede Polynomfunktion lässt sich nun durch die Operationen in Satz 7.6 (i) – (ii) konstruieren, und ist damit überall stetig. Erlaubt man zusätzlich die Bildung von Quotienten, so folgt mit Satz 7.6 (iii) auch die Stetigkeit aller rationalen Funktionen auf der Menge, in der das Nennerpolynom nicht verschwindet.

q.e.d.

Weitere Beispiele stetiger Funktionen, die Sie aus der Schule kennen, listen wir in der folgenden Proposition zunächst ohne Beweis auf. Die Beweise liefern wir wenigstens teilweise zu einem späteren Zeitpunkt nach.

Proposition 7.8. *Die folgenden Funktionen sind auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig.*

(i) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = e^x$

(ii) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$

(iii) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$

(iv) $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$

(v) $\sqrt[n]{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt[n]{x}$

(vi) $\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log(x)$

(vii) $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arcsin(x)$

(viii) $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arccos(x)$

(ix) $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x)$

Neben den algebraischen Wegen neue stetige Funktionen aus Summen, Produkten und dergleichen von stetigen Funktionen zu konstruieren, existiert noch mindestens ein extrem wichtiger weiterer Weg:

Satz 7.9. *Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen auf ihrem Definitionsbereich, wobei $f(D) \subseteq E$ gelten möge. Dann ist auch die Verkettung*

$$g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

stetig auf D .

Beweis. Sei $x_0 \in D$ beliebig und $(x_n)_n$ eine Folge mit $x_n \in D$ für alle n und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Da f in x_0 stetig ist, folgt somit auch, dass die Folge $(f(x_n))_n$ gegen $f(x_0)$ konvergiert. Da g ebenfalls stetig ist, folgt daher auch $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0))$. Da die Folge x_n beliebig war, ergibt sich aus dem Folgenkriterium (Satz 7.4) die Stetigkeit von $g \circ f$ in x_0 . Da $x_0 \in D$ beliebig war, ist die Verkettung damit auf ganz D stetig.

q.e.d.

7.2 Eigenschaften stetiger Funktionen

Eine der wichtigsten Eigenschaften stetiger Funktionen, die wir immer wieder benutzen werden, ist der so genannte **Zwischenwertsatz**.

Satz 7.10 (Zwischenwertsatz). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ und es sei $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq c \leq f(b)$. Dann existiert ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = c$.

Beweis. Für $c = f(a)$ oder $c = f(b)$ ist die Aussage offenkundig richtig.

Sei also $f(a) < c < f(b)$. Wir betrachten dann die Menge

$$M := \{x \in [a, b] : f(x) < c\}.$$

Dann ist $M \neq \emptyset$, denn wir haben $a \in M$, da nach Voraussetzung $f(a) < c$ gilt. Außerdem ist M nach oben beschränkt (etwa durch b), also existiert

$$x_0 := \sup M \in \mathbb{R}.$$

Behauptung: Es gibt eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in M$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.

Nach Definition von M ist für $n \in \mathbb{N}$ $x_0 - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke für M , da x_0 die kleinste obere Schranke von M ist. Das heißt es gibt ein $x_n \in M$ mit $x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0$. Nach dem Sandwich-Lemma 6.25 konvergiert die so konstruierte Folge $(x_n)_n$ gegen x_0 . Da $x_n \in M \subseteq [a, b]$ gilt, folgt auch $x_0 \in [a, b]$. Weiter gilt wegen der Stetigkeit von f damit $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ und wegen $x_n \in M$, also $f(x_n) < c$, folgt damit wegen Lemma 6.23 $f(x_0) \leq c$.

Wegen $f(b) > c$ folgt damit insbesondere $x_0 \neq b$. Für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ (sagen wir $n \geq N$ für ein $N \in \mathbb{N}$) ist damit aber $x_0 + \frac{1}{n} \in [a, b]$, und weil x_0 die kleinste obere Schranke für M ist, gilt dann $x_0 + \frac{1}{n} \notin M$, also haben wir $f(x_0 + \frac{1}{n}) \geq c$ für alle $n \geq N$. Die Folge $(x_0 + \frac{1}{n})_{n \geq N}$ konvergiert gegen x_0 , also haben wir wieder wegen der Stetigkeit von f $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_0 + \frac{1}{n}) = f(x_0) \geq c$ (wegen Lemma 6.23)

Wir haben demnach insgesamt $f(x_0) \leq c$ und $f(x_0) \geq c$, also $f(x_0) = c$.

q.e.d.

Bemerkung 7.11. (i) Der Zwischenwertsatz gilt natürlich genauso, wenn man $f(a) \geq f(b)$ annimmt.

(ii) Es ist wichtig, dass die Funktion f auf einem Intervall definiert ist, ansonsten gilt der Zwischenwertsatz im Allgemeinen nicht, wie etwa das Beispiel der Funktion

$$f : [-2, 0] \cup [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

zeigt. Sie ist auf ihrem Definitionsbereich stetig (warum?), wir haben $0 = f(0) < f(1) = 1$, aber es gibt kein $x_0 \in [-2, 0] \cup [1, 2]$ mit beispielsweise $f(x_0) = \frac{1}{2}$.

Eine wichtige und sehr nützliche Folgerung aus dem Zwischenwertsatz ist der folgende Nullstellensatz von BOLZANO.

Korollar 7.12 (Nullstellensatz von BOLZANO). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f(x_0) = 0$.

Beweis. Dies folgt sofort aus dem Zwischenwertsatz 7.10 für $c = 0$, denn man hat $f(a) \cdot f(b) < 0$ genau dann, wenn entweder $f(a) < 0 \wedge f(b) > 0$ oder $f(a) > 0 \wedge f(b) < 0$ gilt.

q.e.d.

Beispiel 7.13. Der Nullstellensatz von BOLZANO 7.12 liefert ein sehr robustes Verfahren, um Nullstellen von recht allgemeinen stetigen Funktionen in einem Intervall numerisch zu bestimmen, auch wenn man diese nicht in geschlossener Form ausrechnen kann. Betrachten wir etwa die Funktion

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x) - x^2.$$

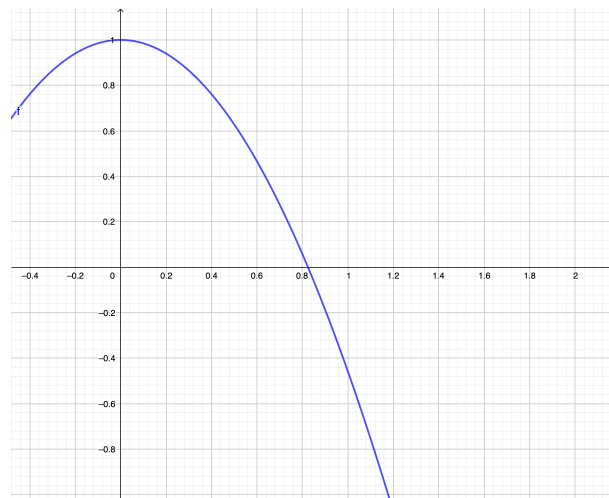
Diese ist offenbar stetig, da \cos und Polynomfunktionen stetig sind und Summen bzw. Differenzen stetiger Funktionen selbst stetig sind (vgl. Proposition 7.8, Korollar 7.7, and Satz 7.6). Wie wir in Abbildung 7.2 sehen, gibt es eine Nullstelle zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$. Dies können wir auch über den Nullstellensatz formal beweisen: Es gilt nämlich

$$f(0) = \cos(0) - 0^2 = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 < 0.$$

Da die Funktionswerte ihr Vorzeichen wechseln, muss es nach Korollar 7.12 eine Nullstelle im Intervall $(0, \frac{\pi}{2})$ geben.

Wir können aber nun auch das Intervall halbieren und die Funktion auf den beiden Teilintervallen $[0, \frac{\pi}{4}]$ bzw. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ betrachten. Da

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 0,090256... > 0$$

Abbildung 7.2: Graph der Funktion $f(x) = \cos(x) - x^2$

gilt, macht die Funktion im Intervall $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ einen Vorzeichenwechsel, so dass der Nullstellensatz von Bolzano die Existenz einer Nullstelle in dem kleineren Teilintervall $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ garantiert.

Halbiert man nun wiederum dieses Intervall und betrachtet die Teilintervalle $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi]$ und $[\frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}]$ und berechnet

$$f(\frac{3}{8}\pi) = -1,005229... < 0,$$

also haben wir einen Vorzeichenwechsel zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3}{8}\pi$, und damit eine Nullstelle im Intervall $(\frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi)$.

Wiederholt man diesen Prozess der Intervallhalbierung immer wieder, bis man eine gewünschte Fehlerschranke unterschritten hat, so erhält man eine beliebig gute Approximation für die gesuchte Nullstelle. Nach vier weiteren Iterationen hat man die Nullstelle auf das Intervall

$$(\frac{33}{128}\pi, \frac{17}{64}\pi) \approx (0,809941..., 0,834485...)$$

eingegrenzt, nach weiteren 5 auf

$$(0,8237..., 0,82451...).$$

Auf 10 Dezimalstellen genau lautet der Wert der Nullstelle

$$x_0 \approx 0,8241323123...,$$

was man z.B. auch durch weitere Anwendungen dieser so genannten **Bisektionsmethode** finden könnte. Es gibt allerdings auch deutlich effizientere Methoden, etwa das **NEWTON-Verfahren**, das wir hier aber nicht weiter vertiefen wollen.

Eine sehr wichtige Eigenschaft stetiger Funktionen ist der nächste Satz, laut dem stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen ihr Maximum und Minimum annehmen. Dazu benötigen wir zunächst ein Lemma, das an sich auch durchaus nützlich ist.

Lemma 7.14. *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f **beschränkt**, das heißt es existiert ein $B > 0$ so dass für alle $x \in [a, b]$*

$$|f(x)| \leq B$$

gilt.

Beweis. Angenommen, f wäre nicht beschränkt. Dann existiert zu $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $|f(x_n)| > n$. Die so konstruierte Folge $(x_n)_n$ ist aber beschränkt, das heißt nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS 6.27 existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$, deren Grenzwert wir x_0 nennen. Da das Intervall $[a, b]$ abgeschlossen ist, gilt $x_0 \in [a, b]$ ¹. Da f in x_0 stetig ist, muss die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ gegen eine reelle Zahl, nämlich $f(x_0)$ konvergieren. Aber die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ ist nach Konstruktion unbeschränkt, also haben wir einen Widerspruch.

q.e.d.

Als Anwendung erhalten wir den folgenden auf WEIERSTRASS zurückgehenden Satz.

Satz 7.15 (Satz von WEIERSTRASS). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f in $[a, b]$ sein Maximum und Minimum an, das heißt es existieren $x_{max}, x_{min} \in [a, b]$ mit $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ für alle $x \in [a, b]$.*

Beweis. Wir zeigen nur die Behauptung für das Maximum, für das Minimum verläuft der Beweis analog.

Wie in Lemma 7.14 gesehen ist die Menge $M = f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ beschränkt und nicht leer, besitzt also ein Supremum $B \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann $B - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M . also existiert ein $x_n \in [a, b]$ mit

$$B - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq B.$$

Nach demselben Argument wie in Schritt 1 besitzt die so gefundene Folge $(x_n)_n$ nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS 6.27 eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert wir x_{max} nennen. Wie oben gilt auch hier $x_{max} \in [a, b]$. Wegen der Stetigkeit von f konvergiert die Folge $(f(x_{n_k}))_k$ gegen den Funktionswert $f(x_{max})$, andererseits gilt nach Konstruktion

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = B,$$

¹Dies ist zwar vermutlich einleuchtend, muss aber eigentlich bewiesen werden. Wir verzichten hier auf den Beweis.

also $B = f(x_{max})$, womit die Behauptung folgt.

q.e.d.

Bemerkung 7.16. Es ist essentiell für die Richtigkeit von Satz 7.15, dass die Funktion auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall stetig ist. Ansonsten kann man nämlich nicht garantieren, dass die konvergenten Teilfolgen existieren (wenn das Intervall nicht beschränkt ist), bzw. dass der Grenzwert wieder im Intervall liegt (wenn das Intervall offen oder halboffen ist). Für all diese Fälle gibt es Gegenbeispiele, die zeigen, dass der Satz dann falsch ist (Übung).

Wie bei Folgen können wir auch bei reellen Funktionen von Monotonie sprechen.

Definition 7.17. Sei I ein beliebiges Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Gilt für alle $x, y \in I$ mit $x < y$ die Ungleichung

$$f(x) \leq f(y),$$

so nennen wir f **monoton wachsend**. Gilt sogar die strikte Ungleichung

$$f(x) < f(y),$$

so heißt f **streng monoton wachsend**.

Gilt stattdessen stets

$$f(x) \geq f(y),$$

so nennen wir f **monoton fallend** bzw., falls

$$f(x) > f(y)$$

gilt, **streng monoton fallend**.

Beispiel 7.18. Wir haben bereits in Lemma 4.27 und Proposition 4.30 gesehen, dass für alle $r \in \mathbb{Q}$ mit $r > 0$ die Potenzfunktion definiert durch $x \mapsto x^r$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich (also auf $[0, \infty)$ falls der Nenner von r gerade ist und \mathbb{R} , falls der Nenner ungerade ist) streng monoton wachsend ist.

Wir haben dazu den folgenden Satz.

Satz 7.19. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv und die Umkehrabbildung $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Die analoge Aussage gilt auch, wenn f stetig und streng monoton fallend ist.

Beweis. Für $x < y \in [a, b]$ ist nach Voraussetzung $f(x) < f(y)$, also ist f sicher injektiv (hierfür brauchen wir die Stetigkeit noch gar nicht). Desweiteren gilt wegen der Monotonie von f $\min\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(a)$ und $\max\{f(x) : x \in [a, b]\} = f(b)$. Da f stetig ist, folgt mit dem Zwischenwertsatz 7.10 also, dass $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ gilt, also ist die Abbildung

$$f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

wie behauptet bijektiv.

Damit existiert eine eindeutige Umkehrabbildung (vgl. Satz 1.39) zu f ,

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b].$$

Seien dann $x < y \in [f(a), f(b)]$. Dann existieren eindeutig bestimmte $x', y' \in [a, b]$ mit $f(x') = x$ und $f(y') = y$. Wegen der Monotonie von f folgt dann auch $x' < y'$. Aber es gilt $x' = f^{-1}(x)$ und $y' = f^{-1}(y)$, also folgt, dass auch $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ streng monoton wachsend ist.

Sei nun $y_0 \in [f(a), f(b)]$ beliebig und $(y_n)_n$ eine beliebige Folge in $[f(a), f(b)]$, die gegen y_0 konvergiert. Wir definieren dann $x_0 := f^{-1}(y_0)$ und $x_n = f^{-1}(y_n)$. Wir erhalten so eine Folge $(x_n)_n$ in $[a, b]$ und wir müssen zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ gilt. Angenommen, das wäre nicht so, dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \geq N$ existiert mit $|x_0 - x_n| \geq \varepsilon_0$. Damit gibt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so dass $x_0 - x_n \geq \varepsilon_0$, also $x_0 \geq x_n + \varepsilon_0 > x_n$ gilt. Wegen der strengen Monotonie von f folgt für diese n auch

$$f(x_0) \geq f(x_n + \varepsilon_0) > f(x_n).$$

Für all diese n folgt dann wegen $f(x_0) = y_0$ und $f(x_n) = y_n$

$$|y_0 - y_n| \geq \varepsilon'_0$$

mit $\varepsilon'_0 = f(x_0 + \varepsilon_0) - f(x_0) > 0$, was aber nicht sein kann, weil wir angenommen hatten, dass die Folge $(y_n)_n$ gegen y_0 konvergiert. Damit haben wir einen Widerspruch und die Folge $(x_n)_n$ konvergiert wie behauptet gegen x_0 , womit f^{-1} nach dem Folgenkriterium (Satz 7.4) stetig ist.

q.e.d.

Bemerkung 7.20. Tatsächlich kann man umgekehrt auch zeigen, dass eine injektive, stetige Funktion notwendigerweise entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist (Übung).

Kapitel 8

Differentialrechnung

In diesem Kapitel wollen wir, basierend auf unseren bisherigen Erkenntnissen über Folgen, Reihen und stetige Funktionen, den aus der Schule bekannten Begriff der differenzierbaren Funktion einführen. Geometrisch gesprochen beschreibt die **Ableitung** einer differenzierbaren Funktion f in einem Punkt x_0 die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$.

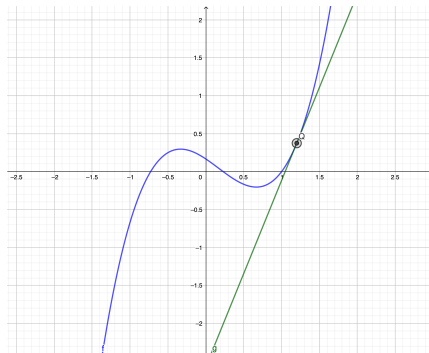


Abbildung 8.1: Tangente an den Graphen einer differenzierbaren Funktion

Dem gegenüber steht der Begriff des Integrals, das die Summe der orientierten¹ Flächeninhalte des Graphen von f mit der x -Achse misst.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, der gewissermaßen den Höhepunkt dieses Kapitels bildet, besagt, zunächst überraschenderweise, dass diese Konzepte von Tangentensteigung und Flächeninhalt gewissermaßen invers zueinander sind.

8.1 Ableitungsregeln

Anschaulich erhält man die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion f , indem man an zwei Stellen x_0 und $x_0 + h$ die **Sekante**, also die Gerade durch die Punk-

¹d.h. Flächen unterhalb der x -Achse werden negativ gewertet

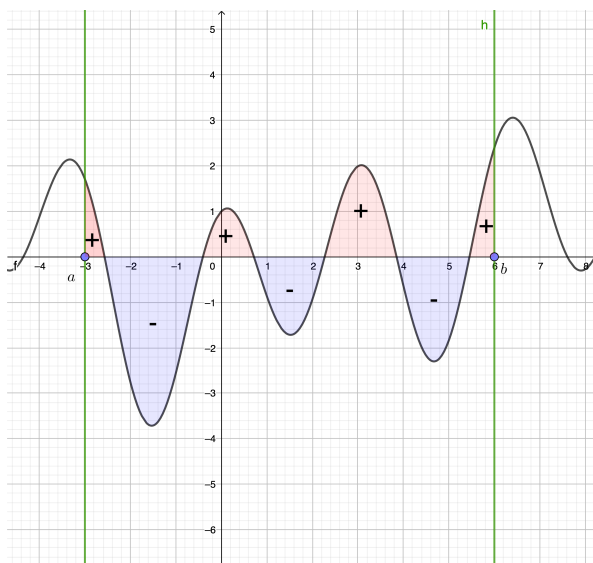
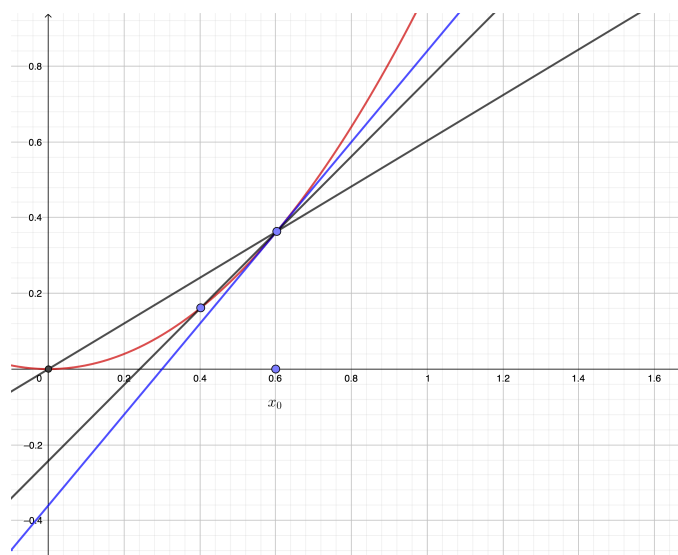


Abbildung 8.2: Integral als Summe orientierter Flächeninhalte

te $x_0, f(x_0)$) und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, betrachtet und dann beide Punkte immer näher zusammenführt.

Abbildung 8.3: Sekanten (schwarz) und Tangente an einen Graphen in einem Punkt x_0

Die Steigung der Sekante ist hierbei nach der aus der Schule bekannten Formel durch den so genannten **Differenzenquotienten**

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

gegeben. Für die Tangentensteigung ist man nun versucht, diese als eine Art Grenzwert zu definieren. Um dies formal korrekt zu formulieren, benötigen wir zunächst zwei neue Begriffe, die beide aus dem Kontext mit Folgen schon bekannt sind.

Definition 8.1. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge von \mathbb{R} . Dann heißt ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}$ ein **Häufungspunkt** von D , falls es eine Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$ gilt.

Diese Definition sollte an die Charakterisierung von Häufungspunkten von Folgen in Satz 6.15 erinnern. Wir betrachten ein wichtiges Beispiel.

Beispiel 8.2. Sei $D = I = (a, b]$ ein Intervall. Dann ist jeder Punkt $x \in I$ ein Häufungspunkt von I , da wir etwa die konstante Folge $(x)_n$ wählen können, die x als Grenzwert hat.

Andererseits gilt hier $a \notin I$, aber a ist dennoch ein Häufungspunkt von I : Betrachten wir etwa die Folge $(x_n)_n$ mit

$$x_n = a + \frac{b-a}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $x_n \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und offenbar auch $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, also ist a ein Häufungspunkt von I .

Mit dem Begriff des Häufungspunktes können wir nun den Grenzwertbegriff von Folgen auf Funktionen übertragen.

Definition 8.3. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D . Gilt dann für alle Folgen $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, dass die Folgen $(f(x_n))_n$ alle gegen denselben Wert $a \in \mathbb{R}$ konvergieren, dann nennen wir a den **Grenzwert** von f für x gegen x_0 und schreiben

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a.$$

Gilt für jede Folge $(x_n)_n$ aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ und $x_n \leq x_0$ bzw. $x_n \geq x_0$, dass die Folge $(f(x_n))_n$ gegen denselben Grenzwert konvergiert, so bezeichnen wir diesen mit

$$\lim_{x \nearrow x_0} f(x) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow x_0} f(x).$$

Bemerkung 8.4. (i) Der Vollständigkeit halber erklären wir auch, falls D etwa nach oben unbeschränkt ist, den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =: a.$$

Dieser existiert genau dann, wenn für jede nach oben unbeschränkte Folge $(x_n)_n$ mit $x_n \in D$ der die Folge $(f(x_n))_n$ gegen denselben Grenzwert a konvergiert.

Genauso erklärt man auch $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- (ii) Alle Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen (Satz 6.8) übertragen sich natürlich direkt auf Funktionsgrenzwerte.

Wir kommen nun zur Definition von Differenzierbarkeit.

Definition 8.5 (Differenzierbarkeit). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in I$. Wir nennen die Funktion f **differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Diesen nennt man auch den **Differentialquotienten** oder häufiger die **Ableitung** von f in x_0 und bezeichnen ihn mit $f'(x_0)$.

Ist f in jedem Punkt in I differenzierbar, so sagen wir, dass f auf I differenzierbar ist und nennen die Funktion

$$f' : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

die **Ableitungsfunktion** von f .

Beispiel 8.6. 1. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n.$$

Wir wollen zeigen, dass diese auf ganz \mathbb{R} differenzierbar ist.

Für $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir dazu den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h}.$$

Mit dem binomischen Lehrsatz (Satz 2.15) können wir zunächst den Differenzenquotienten umschreiben in

$$\begin{aligned} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} - x_0^n \right) = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} h^k x_0^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^k x_0^{n-k-1} = \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^k x_0^{n-k-1}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^n - x_0^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} h^k x_0^{n-k-1} \right) \\ &= nx_0^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k+1} (\lim_{h \rightarrow 0} h^k) x_0^{n-k-1} = nx_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Der Grenzwert existiert also für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und die Ableitungsfunktion ist gegeben durch

$$f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto nx^{n-1}.$$

2. Die Betragsfunktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x|$$

ist im Nullpunkt **nicht** differenzierbar, denn für die Folge $(x_n)_n = (1/n)_n$ gilt etwa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1/n| - |0|}{1/n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1/n} = 1,$$

aber für die Folge $(x_n)_n = (-1/n)_n$ haben wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|-1/n| - |0|}{-1/n - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{-1/n} = -1.$$

Da wir zwei Nullfolgen gefunden haben, für die die Differenzenquotienten nicht gegen denselben Grenzwert konvergieren, existiert der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$$

nicht und die Betragsfunktion ist somit in 0 nicht differenzierbar.

Im vorigen Kapitel haben wir stetige Funktionen kennengelernt. Zunächst haben Stetigkeit und Differenzierbarkeit (augenscheinlich) nicht viel miteinander zu tun. Wir haben jedoch folgendes Resultat.

Proposition 8.7. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, so ist f in x_0 auch stetig.

Beweis. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar. Dann existiert für jede Folge $(x_n)_n$ aus I mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = a.$$

Damit existiert nach den Grenzwertsätzen (Satz 6.8) aber auch der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - f(x_0) = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_0) = 0,$$

also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Da die Folge $(x_n)_n$ aber beliebig war, folgt aus dem Folgenkriterium (Satz 7.4) die Stetigkeit von f in x_0 .

q.e.d.

Bemerkung 8.8. Wie wir in Beispiel 8.6 gesehen haben, gibt es stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind. Tatsächlich gibt es sogar stetige Funktionen, die in keinem einzigen Punkt differenzierbar sind. In gewisser Weise trifft das sogar auf fast alle stetigen Funktionen zu, ein konkretes Beispiel einer solchen so genannten **WEIERSTRASS-Funktion** anzugeben, ist dennoch erstaunlich kompliziert.

Aus den Grenzwertsätzen (Satz 6.8) ergeben sich mehr oder weniger direkt die folgenden bekannten Rechenregeln für Ableitungen.

Satz 8.9 (Ableitungsregeln). Sei I ein Intervall und $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, die in einem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann gelten die folgenden Ableitungsregeln.

(i) Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\alpha f + \beta g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0).$$

(ii) Das Produkt $f \cdot g$ ist in x_0 differenzierbar und es gilt die **LEIBNIZ-Regel** oder **Produktregel**

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) Gilt $g(x_0) \neq 0$, so ist die Funktion $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt die **Quotientenregel**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Beweis.

(i) Übung.

(ii) Wir schreiben für $x \neq x_0$ den Differenzenquotienten um in

$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$$

und da nach Proposition 8.7 g auch stetig in x_0 ist, folgt auch $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Nach den Rechenregeln für Grenzwerte folgt also

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0), \end{aligned}$$

und genau das hatten wir behauptet.

(iii) Übung.

q.e.d.

Beispiel 8.10. Aus Satz 8.9 folgt sofort, genau wie in Korollar 7.7, dass Polynomfunktionen auf ganz \mathbb{R} differenzierbar sind und rationale Funktionen überall dort, wo der Nenner nicht verschwindet.

Genauer gilt für eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ nach den Rechnungen in Beispiel 8.6

$$p'(x) = \sum_{k=0}^n k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Im Vorgriff auf spätere Resultate formulieren wir an dieser Stelle bereits die folgende Proposition mit weiteren Beispielen differenzierbarer Funktionen.

Proposition 8.11. *Die folgenden Funktionen sind alle auf ihrem gesamten Definitionsbereich differenzierbar.*

- (i) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x) = e^x$ mit $\exp'(x) = \exp(x)$,
- (ii) $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ mit $\sin'(x) = \cos(x)$,
- (iii) $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ mit $\cos'(x) = -\sin(x)$,
- (iv) $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x)$ mit $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Für eine weitere bekannte Ableitungsregel, die **Kettenregel**, bietet es sich an, den Begriff der Differenzierbarkeit neu zu formulieren. Dies wird auch hilfreich sein, wenn

wir Ableitungen von Umkehrfunktionen bestimmen. Auch im zweiten Teil der Vorlesung, wenn wir uns mit Differenzierbarkeit in mehreren Variablen beschäftigen, wird diese Formulierung sinnvoller sein als die Definition über Differentialquotienten.

Satz 8.12. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann ist f in x_0 genau dann differenzierbar, wenn eine in x_0 stetige Funktion $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in I$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta(x).$$

Es gilt dann $\Delta(x_0) = f'(x_0)$.

Beweis. Sei zunächst f in x_0 differenzierbar. Wir definieren dann die Funktion

$$\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} & x \neq x_0 \\ f'(x_0) & x = x_0. \end{cases}$$

Da f differenzierbar ist, gilt für jede Folge $(x_n)_n$ aus D mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = f'(x_0) = \Delta(x_0),$$

also ist Δ in x_0 stetig.

Sei umgekehrt $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in x_0 , so dass für alle $x \in I$ die Gleichung

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta(x)$$

erfüllt ist. Dann können wir für $x \neq x_0$

$$\Delta(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

schreiben. Da Δ in x_0 stetig ist, gilt

$$\Delta(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \Delta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Nach Definition ist damit aber f in x_0 differenzierbar und es gilt $f'(x_0) = \Delta(x_0)$.

q.e.d.

Wir kommen nun wie angekündigt zur Kettenregel.

Satz 8.13 (Kettenregel). Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $f(I) \subseteq J$ gilt. Desweiteren sei f in $x_0 \in I$ differenzierbar und g in $f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die Funktion $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Beweis. Nach Satz 8.12 existieren Funktionen $\Delta_f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Delta_g : J \rightarrow \mathbb{R}$, die jeweils in x_0 bzw. in $y_0 = f(x_0)$ stetig sind und jeweils die Gleichungen

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta_f(x) \quad \text{und} \quad g(y) = g(y_0) + (y - y_0)\Delta_g(y)$$

für alle $x \in I$ bzw. für alle $y \in J$ erfüllen.

Insbesondere folgt so für $y = f(x)$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + (f(x) - f(x_0))\Delta_g(f(x)) = g(f(x_0)) + (x - x_0) \underbrace{\Delta_f(x)\Delta_g(f(x))}_{=:\Delta_{g \circ f}(x)}.$$

Da f nach Proposition 8.7 in x_0 und Δ_g in $f(x_0)$ stetig ist, ist $\Delta_g \circ f$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig in x_0 (Satz 7.9). Da auch Δ_f in x_0 stetig ist, folgt nach Satz 7.6, dass auch $\Delta_{g \circ f} = \Delta_f \cdot \Delta_g \circ f$ in x_0 stetig ist.

Damit folgt aber nach Satz 8.12, dass $g \circ f$ in x_0 differenzierbar ist mit

$$(g \circ f)'(x_0) = \Delta_{g \circ f}(x_0) = \Delta_g(f(x_0)) \cdot \Delta_f(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

q.e.d.

Für Umkehrfunktionen differenzierbarer Funktionen haben wir das folgende Resultat.

Satz 8.14. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Zudem sei f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist auch die Umkehrfunktion f^{-1} von f in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Beweis. Zunächst wissen wir nach Satz 7.19, dass $f : I \rightarrow f(I)$ tatsächlich bijektiv ist, so dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ existiert und ebenfalls streng monoton und stetig ist.

Da f in x_0 differenzierbar ist, existiert nach Satz 8.12 eine in x_0 stetige Funktion $\Delta : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\Delta(x)$ für alle $x \in I$. Nach Voraussetzung gilt $\Delta(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Wir können somit die folgende Funktion definieren,

$$\tilde{\Delta} : f(I) \rightarrow I, \quad y \mapsto \begin{cases} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} & y \neq y_0 \\ \frac{1}{\Delta(x_0)} & y = y_0. \end{cases}$$

Da f bijektiv ist, existiert zu jedem $y \in f(I)$ genau ein $x \in I$ mit $f(x) = y$, also folgt, da f stetig ist,

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\Delta(x_0)}.$$

Damit ist die Funktion $\tilde{\Delta}$ stetig in $y_0 = f(x_0)$ und erfüllt nach Konstruktion

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) + (y - y_0)\tilde{\Delta}(y)$$

für alle $y \in f(I)$. Damit folgt aus Satz 8.12, dass f^{-1} in y_0 differenzierbar ist mit

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

q.e.d.

Beispiel 8.15. Wie wir später noch genauer sehen werden, sind die folgenden Funktionen überall differenzierbar (und damit stetig) und streng monoton wachsend:

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Sie besitzen somit Umkehrfunktionen, nämlich jeweils

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \arcsin : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir wissen nun nach Proposition 8.11 und Satz 8.14, dass diese Umkehrfunktionen selbst

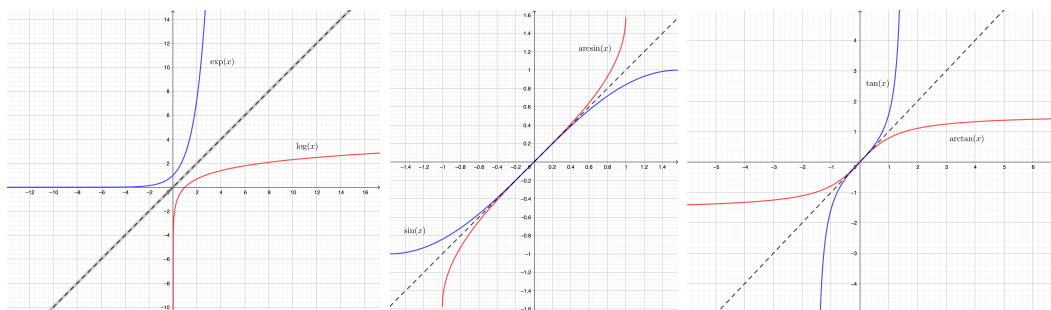


Abbildung 8.4: Graphen der Funktionen \exp , \sin und \tan (blau) mit ihren jeweiligen Umkehrfunktionen (rot)

wieder differenzierbar sind und können die Ableitungen bestimmen:

$$\begin{aligned} \log'(x) &= \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}, \\ \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ \arctan'(x) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1/\cos^2(\arctan(x))} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x))}{\cos^2(\arctan(x))}} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

8.2 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung und Extrema

Das Hauptziel dieses Unterabschnitts soll es sein, die aus der Schule bekannten Kriterien für lokale Extrema differenzierbarer Funktionen herzuleiten. Das wesentliche theoretische Hilfsmittel hierzu wird der sogenannte **Mittelwertsatz der Differentialrechnung** sein. Zunächst wollen wir formal definieren, was wir unter einem lokalen Extremum verstehen.

Definition 8.16. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Man sagt f hat in $x_0 \in (a, b)$ ein **lokales Maximum**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

2. Man sagt f hat in $x_0 \in (a, b)$ ein **lokales Minimum**, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass gilt

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

3. Besitzt f in x_0 entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum, so sprechen wir von einem **lokalen Extremum** in x_0 .

Wir wollen zeigen, dass wir alle möglichen lokalen Extrema einer differenzierbaren Funktion über ihre Ableitung bestimmen können. Dazu ist zunächst etwas Vorbereitung erforderlich.

Zunächst haben wir den folgenden Satz, der ein erster Schritt zum Beweis des Mittelwertsatzes ist. Er wurde zuerst von ROLLE im Jahr 1691 speziell für Polynome bewiesen (wobei sich Vorläufer bereits im 12. Jahrhundert in Indien nachweisen lassen).

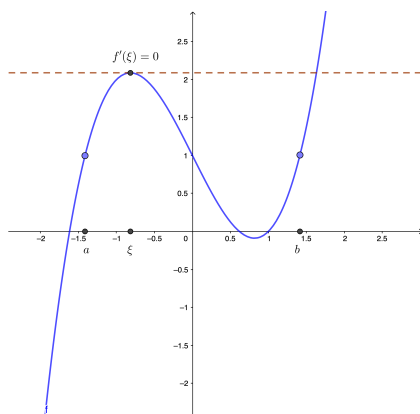


Abbildung 8.5: Satz von ROLLE

Satz 8.17 (Satz von ROLLE). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar sei. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$ (siehe Abbildung 8.5).

Beweis. Ist f konstant, so können wir $\xi = \frac{a+b}{2}$ wählen und sind fertig.

Sei also f nicht konstant. Nach dem Satz von WEIERSTRASS (Satz 7.15) nimmt f , da f stetig ist, in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ sowohl sein Minimum y_{\min} als auch sein Maximum y_{\max} an, sagen wir an den Stellen x_{\min} und x_{\max} in $[a, b]$. Da f nicht konstant ist, muss $y_{\min} \neq y_{\max}$ gelten, und wegen $f(a) = f(b)$ muss mindestens einer der Punkte x_{\min} und x_{\max} im offenen Intervall (a, b) liegen. Sagen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass $\xi := x_{\max} \in (a, b)$ gilt. Da f in ξ differenzierbar ist, existiert der Grenzwert

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h}.$$

Insbesondere gilt dann wegen $\xi = x_{\max}$ für $|h|$ hinreichend klein² $f(\xi + h) \leq f(\xi)$, also folgt einerseits

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leq 0,$$

andererseits

$$f'(\xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \geq 0,$$

also insgesamt $f'(\xi) = 0$.

q.e.d.

Genau dasselbe Argument wie im Beweis zum Satz von ROLLE 8.17 erlaubt uns auch direkt folgendes notwendiges Kriterium für die Existenz von lokalen Extrema zu beweisen.

Satz 8.18 (Notwendiges Kriterium für Extremstellen). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $x_0 \in (a, b)$ eine lokale Extremstelle von f . Dann gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit liege in x_0 ein lokales Minimum von f vor (der Beweis für ein lokales Maximum verläuft analog). Das heißt, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ die Ungleichung $f(x) \geq f(x_0)$ gilt. Anders ausgedrückt gilt dann für $0 < h < \varepsilon$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

also auch

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

²So dass $\xi + h \in (a, b)$ gilt

wobei die Existenz wegen der Differenzierbarkeit von f garantiert ist. Genauso gilt für $-\varepsilon < h < 0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0,$$

also auch

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Da f in x_0 differenzierbar folgt somit

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

q.e.d.

Wir kommen nun zum zuvor angekündigten Mittelwertsatz. Dieser wurde zuerst 1797 von LAGRANGE und später erneut von CAUCHY bewiesen. Seit dem späten 19. Jahrhundert ist der hier vorgestellte Beweis sehr verbreitet, der den Mittelwertsatz aus dem Satz von ROLLE 8.17 folgert. Geometrisch gesprochen besagt der Mittelwertsatz, dass es

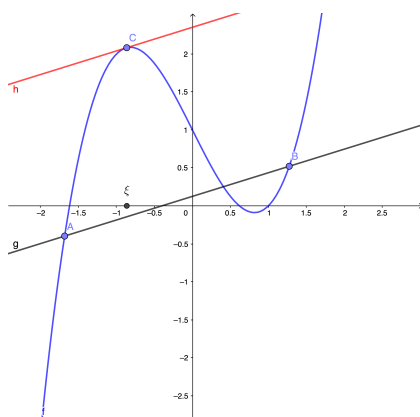


Abbildung 8.6: Mittelwertsatz der Differentialrechnung

zu jeder Sekante durch den Graphen einer differenzierbaren Funktion immer eine zu ihr parallele Tangente gibt.

Satz 8.19 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf (a, b) differenzierbar sei. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

gilt (siehe Abbildung 8.6).

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Dann ist mit f auch h auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiterhin gilt

$$h(a) = f(a) \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a),$$

also existiert nach dem Satz von ROLLE 8.17 ein $\xi \in (a, b)$ mit $h'(\xi) = 0$.

Nach den Ableitungsregeln (Satz 8.9) gilt nun auch

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

also folgt

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

und damit die Behauptung.

q.e.d.

Aus dem Mittelwertsatz erhält man nun etliche wichtige Folgerungen über differenzierbare Funktionen.

Korollar 8.20. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Gilt $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Beweis. Seien $x \neq x' \in (a, b)$ beliebig. Dann ist f auf dem abgeschlossenen Intervall $[x, x']$ stetig und auf (x, x') differenzierbar, also gibt es nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 8.19) ein $\xi \in (x, x')$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x')}{x - x'}.$$

Nach Voraussetzung gilt aber auch $f'(\xi) = 0$, also folgt notwendigerweise $f(x) = f(x')$. Da $x, x' \in (a, b)$ beliebig gewählt waren, folgt somit, dass f konstant sein muss.

q.e.d.

In Satz 7.19 hatten wir uns bereits mit monotonen Funktionen beschäftigt. Bei differenzierbaren Funktionen gibt es nun eine direkte Methode, um zeigen zu können, dass sie monoton sind. Diese folgt ebenfalls aus dem Mittelwertsatz.

Satz 8.21 (Monotoniekriterium für Funktionen). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten folgende Aussagen.

- (i) f ist genau dann monoton wachsend (bzw. fallend), wenn für alle $x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) gilt.
- (ii) Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf (a, b) streng monoton wachsend (bzw. streng monoton fallend).

Beweis. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung: Seien $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$. Dann ist f auf $[x, y]$ stetig und auf (x, y) differenzierbar, so dass der Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 8.19) die Existenz eines $\xi \in (x, y)$ garantiert, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \quad (*)$$

gilt.

- (i) Angenommen, es gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Insbesondere gilt dies für ξ wie in der Vorüberlegung. Damit folgt aber auch $f(y) - f(x) \geq 0$, also ist f , da x, y beliebig gewählt waren, monoton wachsend.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass f monoton wachsend ist, dass also für $x < y \in (a, b)$ stets $f(y) - f(x) \geq 0$ gilt. Sei dann $x_0 \in (a, b)$ beliebig. Für $h > 0$ hinreichend klein gilt dann insbesondere

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

also auch

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

und genauso für $h < 0$ mit $|h|$ hinreichend klein

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

da $h < 0$ und daher $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ gilt, also folgt auch

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0,$$

also insgesamt

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

- (ii) Analog wie die Rückrichtung in (i).

q.e.d.

Bemerkung 8.22. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bekanntlich streng monoton wachsend (siehe Lemma 4.27), aber es gilt $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$. In Satz 8.21 (ii) haben wir also keine „genau dann, wenn“-Aussage.

Mit Satz 8.21 können wir nun auch die aus der Schule bekannten hinreichenden Kriterien für die Existenz lokaler Extrema beweisen.

Satz 8.23 (Hinreichende Kriterien für lokale Extrema). Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ ein **kritischer Punkt**, d.h. es gelte $f'(x_0) = 0$.

- (i) Existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $f'(x) > 0$ und für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $f'(x) < 0$ gilt, so liegt in x_0 ein lokales Maximum vor. Gilt stattdessen für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ $f'(x) < 0$ und für alle $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$ $f'(x) > 0$, so liegt in x_0 ein lokales Minimum vor. (**Vorzeichenwechselkriterium**)
- (ii) Ist f zweimal differenzierbar, ist also die Ableitung von f selbst wieder differenzierbar, und gilt $f''(x_0) := (f')'(x_0) < 0$, so liegt in x_0 ein lokales Maximum vor. Gilt $f''(x_0) > 0$, so liegt in x_0 ein lokales Minimum vor.

Beweis.

(i) Gilt $f'(x) > 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$, so ist f nach Satz 8.21 dort streng monoton wachsend, also gilt wegen der Stetigkeit von f auch $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$. Genauso folgt, dass f auf dem Intervall $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton fällt, also folgt auch hier $f(x_0) \geq f(x)$, also insgesamt $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Nach Definition liegt damit in x_0 ein lokales Maximum vor. Für ein lokales Minimum argumentiert man analog.

(ii) Sei $f''(x_0) < 0$. Es gilt dann nach Definition

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

wegen $f'(x_0) = 0$. Damit folgt aber, dass für beliebiges $\varepsilon > 0$ und $x \in (a, b)$ mit $|x - x_0| < \varepsilon$ auch

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0$$

folgt. Für solche $x < x_0$ folgt daraus aber $f'(x) > 0$, für $x > x_0$ folgt $f'(x) < 0$, also folgt nach dem Vorzeichenwechselkriterium (i), dass in x_0 ein lokales Maximum vorliegt. Wieder argumentiert man für Minima analog.

q.e.d.

Bemerkung 8.24. Das Kriterium mittels der 2. Ableitung ist schwächer als das Vorzeichenwechselkriterium, da letzteres für den Beweis des ersteren verwendet wurde und Funktionen existieren, bei denen das Vorzeichenwechselkriterium die Existenz eines lokalen Extremums liefert, das Kriterium mit der 2. Ableitung jedoch nicht. So hat etwa $f(x) = x^4$ in 0 ein lokales Minimum, aber es gilt trotzdem $f''(0) = 0$. Die erste Ableitung $f'(x) = 4x^3$ macht aber in 0 einen Vorzeichenwechsel.

Es gibt aber auch Beispiele für Funktionen, in denen auch das Vorzeichenwechselkriterium keine Auskunft gibt.

Bemerkung 8.25. Sofern sie existieren, bezeichnen wir die höheren Ableitungen einer Funktion f mit

$$f', f'', f''', \dots, f^{(n)},$$

wobei wir induktiv $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$ (mit $f^{(0)} = f$) setzen.

Der folgende Satz liefert eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes, mit der wir eine wichtige Technik zur Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen herleiten wollen, die Regel von DE L'HOSPITAL.

Satz 8.26 (Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$, so dass die Gleichung*

$$f'(\xi)(g(b) - g(a)) = g'(\xi)(f(b) - f(a))$$

erfüllt ist.

Beweis. Gilt $g(a) = g(b)$, so garantiert der Satz von ROLLE 8.17 die Existenz eines $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$. Für dieses ξ ist die Behauptung offenbar erfüllt.

Sei also $g(a) \neq g(b)$. Dann können wir die Hilfsfunktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

betrachten. Diese ist selbst wieder auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiterhin gilt $h(a) = f(a) = h(b)$, also folgt wieder nach dem Satz von ROLLE 8.17, dass ein $\xi \in (a, b)$ existiert mit $h'(\xi) = 0$. Wegen

$$0 = h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi)$$

folgt die Behauptung.

q.e.d.

Hieraus leiten wir nun wie angekündigt die Regel von DE L'HOSPITAL ab. Richtiger sollten diese als Regeln von BERNOULLI-DE L'HOSPITAL bezeichnet werden, da sie von JOHANN I. BERNOULLI entdeckt wurden und DE L'HOSPITAL von ihm lediglich das Recht zur Veröffentlichung erworben hat.

Satz 8.27 (Regel von DE L'HOSPITAL). Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Gilt $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \nearrow b} g(x) = 0$ und existiert der Grenzwert $\lim_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: c \in \mathbb{R}$, so folgt auch

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Gilt andererseits $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow b$, so gilt dies auch für $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung, die zweite verläuft analog. Indem wir $f(b) = g(b) = 0$ setzen, lassen sich f und g auch das Intervall $(a, b]$ stetig fortsetzen. Nach dem erweiterten Mittelwertsatz 8.26 existiert dann für jedes $x \in (a, b)$ ein $\xi \in (x, b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Für $x \nearrow b$ folgt notwendigerweise auch $\xi \rightarrow b$ und da der Grenzwert $\lim_{\xi \rightarrow b} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = c$ nach Voraussetzung existiert, folgt also auch wie behauptet

$$\lim_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

q.e.d.

Bemerkung 8.28. Die Regel von DE L'HOSPITAL erlauben es, undefinierte Ausdrücke der Form „ $\frac{0}{0}$ “ zu behandeln. Sie lassen sich genauso auch auf Ausdrücke der Form „ $\frac{\infty}{\infty}$ “ anwenden und auch, wenn die Grenze b nicht reell, sondern selbst ∞ ist.

Beispiel 8.29. 1. Wir betrachten den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Zähler und Nenner konvergieren offenbar gegen 0 und sind differenzierbar, also können wir die Regel von DE L'HOSPITAL 8.27 anwenden. Der Quotient der Ableitungen lautet

$$\frac{\cos(x)}{1}$$

und es gilt offenbar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$, also folgt auch

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Wir behaupten, dass stets

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0$$

gilt. Wir zeigen dies durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ können wir nach DE L'HOSPITAL (Satz 8.27) den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x)'}{\exp'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(x)} = 0$$

betrachten und erhalten so auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\exp(x)} = 0.$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt: Für $n + 1$ statt n betrachten wir nach DE L'HOSPITAL wieder den Quotienten der Ableitungen und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^{n+1})'}{\exp'(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)x^n}{\exp(x)} = 0$$

nach Induktionsvoraussetzung. Nach der Regel von DE L'HOSPITAL folgt aber damit auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{\exp(x)} = 0,$$

so dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

8.3 Die Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

In diesem Unterabschnitt wollen wir einige Eigenschaften der Exponentialfunktion (vgl. Definition 6.54) und der trigonometrischen Funktionen einführen, die wir in Teilen bereits in Beispielen verwendet haben.

Zunächst kann man mit nahezu wörtlich demselben Beweis wie in Beispiel 6.21 und Satz 6.53 folgendes zeigen.

Lemma 8.30. *Für jede Folge $(z_n)_n$ komplexer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z).$$

Hieraus erhält man direkt folgende wichtige Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion.

Satz 8.31. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Beweis. Nach Lemma 8.30 und den Grenzwertsätzen 6.8 folgt

$$\exp(z) \cdot \exp(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \left(1 + \frac{w}{n}\right) \right]^n = \left(1 + \frac{z + w + (zw)/n}{n}\right)^n.$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (z + w + (zw)/n) = z + w$ folgt also wieder nach Lemma 8.30 die Behauptung.

q.e.d.

Als Folgerung hieraus erhält man ohne viel Mühe eine ganze Reihe wichtiger Eigenschaften der Exponentialfunktion.

Proposition 8.32. *Seien $z \in \mathbb{C}$, sowie $x < y \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt Folgendes:*

- (i) $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.
- (ii) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$.
- (iii) $\exp(x) > 0$.
- (iv) $\exp(x) < \exp(y)$.
- (v) $(\exp(x))^r = \exp(rx)$.

Beweis. Eigenschaften (i) und (ii) zu beweisen lassen wir als Übung.

- (iii) Nach Definition der Exponentialfunktion $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ folgt sofort, dass $\exp(x) > 0$ für $x \geq 0$ gilt. Für $x < 0$ gilt nach (i) $\exp(x) \cdot \exp(-x) = 1 > 0$ und da wie gerade gesehen $\exp(-x) > 0$ gilt, folgt auch $\exp(x) > 0$.
- (iv) Da $\exp(x), \exp(y) > 0$ gilt, ist die Behauptung äquivalent dazu, dass $\exp(y)/\exp(x) = \exp(y-x) > 1$ gilt. Für beliebiges $t > 0$ haben wir aber nach Definition

$$\exp(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} > 1,$$

also folgt die Behauptung.

- (v) Für $r = n \in \mathbb{Z}$ folgt die Behauptung direkt per Induktion aus der Funktionalgleichung in Satz 8.31 zusammen mit (i). Für $r = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$ folgt dann nach dem gerade bewiesenen, dass

$$\exp(x/m)^m = \exp(mx/m) = \exp(x)$$

gilt. Damit ist $\exp(x/m)$ eine m -te Wurzel aus der positiven Zahl $\exp(x)$. Da die (positive) Wurzel eindeutig bestimmt ist (vgl. Satz 4.28), folgt also $\exp(x)^{1/m} = \exp(x/m)$. Insgesamt haben wir so die Behauptung für alle $r \in \mathbb{Q}$ bewiesen.

q.e.d.

Hiermit ergibt sich das folgende Resultat, das wir bereits in Proposition 8.11 formuliert haben.

Satz 8.33. *Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist überall differenzierbar und es gilt $\exp'(x) = \exp(x)$. Insbesondere ist die Exponentialfunktion auch stetig.*

Beweis. Wir betrachten für $x \in \mathbb{R}$ den Differenzenquotienten

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h},$$

wobei wir hier die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in Satz 8.31 benutzt haben. Nach Definition von \exp gilt aber

$$\frac{\exp(h) - 1}{h} = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^k}{(k+1)!}.$$

Die ist absolut konvergent und jeder Summand geht für $h \rightarrow 0$ gegen 0, also folgt³

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

³An dieser Stelle ist äußerste Vorsicht geboten. Es ist zwar richtig, aber im Allgemeinen muss man sehr aufpassen, wenn man Grenzwerte mit unendlichen Reihen vertauscht!

Es folgt also

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$$

und damit die Behauptung über die Differenzierbarkeit.

Mit Proposition 8.7 folgt auch die über die Stetigkeit.

q.e.d.

Da die Exponentialfunktion nach Proposition 8.32 positiv und streng monoton wachsend ist und nach Satz 8.33 differenzierbar und damit stetig ist, besitzt sie eine eindeutige Umkehrfunktion, welche wir nun einführen wollen.

Definition 8.34. Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion nennen wir die **Logarithmus-Funktion**,

$$\log : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x).$$

Viele Eigenschaften „erbt“ der Logarithmus direkt von der Exponentialfunktion.

Proposition 8.35. Seien $x, y > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

(i) $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

(ii) $\log(x^r) = r \log x$, insbesondere $\log(x^{-1}) = -\log x$

(iii) Für $x < y$ folgt $\log(x) < \log(y)$

Beweis. Übung.

q.e.d.

Das Logarithmengesetz $\log(x^r) = r \log(x)$ für $x > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$ motiviert nun folgende Definition.

Definition 8.36. Für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig definieren wir die **allgemeine Potenz** von x als

$$x^\alpha := \exp(\alpha \log(x)).$$

Bemerkung 8.37. Alle bekannten Rechenregeln für (rationale) Potenzen übertragen sich über die Eigenschaften der Exponentialfunktion auch auf reelle Potenzen. Zudem ist die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha$$

auf ihrem Definitionsbereich stetig und differenzierbar mit

$$(x^\alpha)' = \exp(\alpha \log(x)) = \exp(\alpha \log(x)) \cdot \alpha \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Aus der Definition folgt ebenfalls sofort wegen Proposition 8.32 (iii), dass $x^\alpha > 0$ gilt und die Potenzfunktionen streng monoton wachsend sind.

Wir definieren nun die trigonometrischen Funktionen über die Exponentialfunktion.

Definition 8.38. Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir die **Cosinus-Funktion** als

$$\cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

und die **Sinus-Funktion** als

$$\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}.$$

Zusätzlich definieren wir auch die **Tangens-Funktion** durch

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad (\text{für } \cos(z) \neq 0)$$

und die **Cotangens-Funktion** durch

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \quad (\text{für } \sin(z) \neq 0)$$

Man erhält direkt als Folgerung aus der Definition folgende Beobachtungen.

Lemma 8.39. (i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

wobei die Reihen jeweils für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergieren.

(ii) Für $z = x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \operatorname{Re}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \operatorname{Im}(\exp(ix)).$$

Insbesondere wird so eine reelle Funktion $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert.

Beweis.

- (i) Da die definierende Reihe für $\exp(z)$ für alle z absolut konvergiert, können wir wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) i^n \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.\end{aligned}$$

Die Konvergenz für alle z ergibt sich direkt aus der absoluten Konvergenz für alle z der Exponentialreihe (vgl. Satz 6.53).

Die Rechnung für die Sinus-Funktion verläuft analog.

- (ii) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\overline{ix} = -ix$, also folgt nach Definition

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2} = \frac{\exp(ix) + \exp(\overline{ix})}{2} \\ &\stackrel{8.32(iii)}{=} \frac{\exp(ix) + \overline{\exp(ix)}}{2} \stackrel{5.6(iii)}{=} \operatorname{Re}(\exp(ix)),\end{aligned}$$

wie behauptet.

Wieder verläuft die Rechnung für die Sinus-Funktion analog.

q.e.d.

Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ergeben sich folgende Identitäten für die Cosinus- und Sinus-Funktion.

Satz 8.40 (Additionstheoreme). *Seien $z, w \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann gelten folgende Identitäten.*

- (i) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1.$
- (ii) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$
- (iii) $\sin(z + w) = \cos(z)\sin(w) + \cos(w)\sin(z).$

Beweis. Übung.

q.e.d.

Aus der Beobachtung, dass für $x \in \mathbb{R}$ stets

$$|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1$$

gilt, der Punkt $\exp(ix)$ in der komplexen Ebene also auf dem Einheitskreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ liegt, und der Tatsache, dass nach Lemma 8.39 dann

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

gilt, sehen wir, dass die hier eingeführten Cosinus- und Sinus-Funktionen genau die Definition von Sinus und Cosinus am Einheitskreis erfüllen und damit mit den bekannten Funktionen übereinstimmen. Insbesondere folgt hiermit auch der Satz von EULER-DE MOIVRE 5.14.

Aus den Additionstheoremen zusammen mit der Reihendarstellungen von \cos und \sin in Lemma 8.39 können wir, ganz ähnlich wie in Satz 8.33 beweisen, dass die Cosinus- und Sinus-Funktion beide auf \mathbb{R} differenzierbar sind mit $\cos'(x) = -\sin(x)$ und $\sin'(x) = \cos(x)$.

Bemerkung 8.41. Man erhält etwa die Beziehung $\sin'(x) = \cos(x)$ auch, indem man in der Reihendarstellung von $\sin(x)$ jeden Term einzeln differenziert:

$$\sin'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x).$$

Hierbei muss man allerdings genau begründen, warum man die Ableitung der Reihe erhält, indem man jeden Term ableitet. Für allgemeine Funktionenreihen geht das normalerweise nicht ohne Weiteres, aber für Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

wo $(a_n)_n$ eine Folge reeller Zahlen ist und $x_0 \in \mathbb{R}$ fest gewählt ist, so genannte **Potenzreihen**, ist dies erlaubt, sobald die Reihe absolut konvergiert. Dies werden wir später noch genauer untersuchen.

Kapitel 9

Das RIEMANN-Integral

Wie bereits erwähnt, misst das Integral einer Funktion über einem Intervall die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x -Achse (genauer die Summe der orientierten Flächeninhalte) (siehe Abbildung 8.2).

9.1 Ober- und Untersummen

Anschaulich leuchtet ein, dass man diesen Flächeninhalt von oben und von unten annähern kann, indem man das Intervall in kleinere Intervalle zerlegt und auf jedem Teilintervall die gesuchte Fläche durch ein geeignetes Rechteck annähert. Je feiner man das Intervall unterteilt, desto besser wird (jedenfalls für genügend gutartige Funktionen) die Annäherung. Man hat vor einigen Jahren erst nachgewiesen, dass bereits ARCHIMEDES in der Antike ähnliche Ideen verwendet hat, allerdings waren die entsprechenden Aufzeichnungen mehrere Jahrhunderte lang verschollen und erst im 17. Jahrhundert haben LEIBNIZ und NEWTON diese Methode wieder genauer aufgegriffen. Im 19. Jahrhundert gelang es BERNHARD RIEMANN, den heute verbreiteten, nach ihm benannten, Integralbegriff formal einzuführen, mit dem wir uns nun beschäftigen wollen.

Definition 9.1. Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine **Zerlegung** $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ von I ist ein Tupel reeller Zahlen ξ_0, \dots, ξ_n , genannt **Stützstellen**, mit

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{n-1} < \xi_n = b.$$

Eine Zerlegung $Z' = (\xi'_0, \dots, \xi'_m)$ von I heißt eine **Verfeinerung** der Zerlegung $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$, falls

$$\{\xi_0, \dots, \xi_n\} \subseteq \{\xi'_0, \dots, \xi'_m\}$$

gilt.

Hiermit können wir nun die zentralen Hilfsmittel zur Einführung des Integralbegriffs definieren.

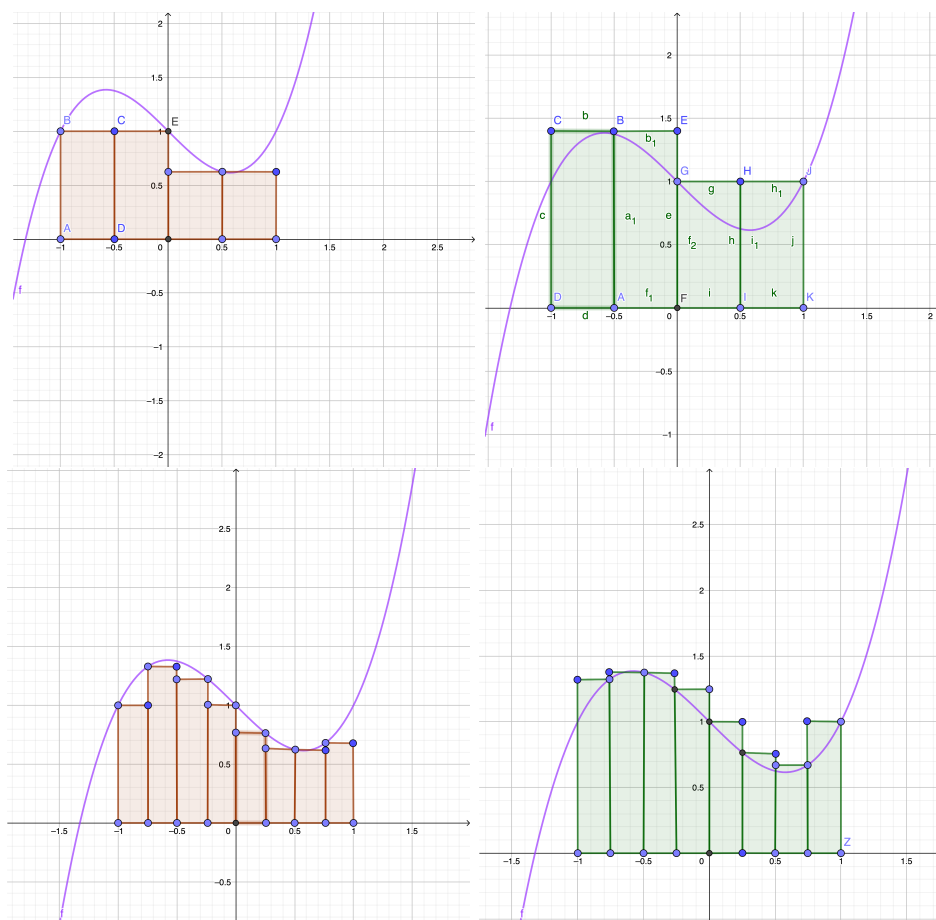


Abbildung 9.1: Annäherung der Fläche unter einem Graphen durch Unter- und Obersummen

Definition 9.2. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion und $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Dann nennen wir

$$U(f; Z) := \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \inf\{f(x) : \xi_j \leq x \leq \xi_{j+1}\}$$

die **Untersumme** von f bezüglich Z und entsprechend

$$O(f; Z) := \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \sup\{f(x) : \xi_j \leq x \leq \xi_{j+1}\}$$

die **Obersumme** von f bezüglich Z .

Im Folgenden schreiben wir auch kürzer

$$\inf_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f := \inf\{f(x) : \xi_j \leq x \leq \xi_{j+1}\}$$

und

$$\sup_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f := \sup\{f(x) : \xi_j \leq x \leq \xi_{j+1}\}.$$

Bemerkung 9.3. (i) Da f in Definition 9.2 als beschränkt vorausgesetzt ist, existieren $U(f; Z)$ und $O(f; Z)$ zu jeder beliebigen Zerlegung des Intervalls $[a, b]$.

(ii) Zu zwei Zerlegungen $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ und $Z' = (\xi'_0, \dots, \xi'_m)$ existiert eine gemeinsame Verfeinerung $Z'' = (\xi''_0, \dots, \xi''_\ell)$. Nach Definition gilt dann

$$U(f; Z) \leq U(f; Z'') \leq O(f; Z'') \leq O(f; Z').$$

Damit ist $U(f; Z)$ für alle Zerlegungen Z nach oben beschränkt, also existiert

$$\sup_Z U(f; Z).$$

Ebenso existiert auch

$$\inf_Z O(f; Z)$$

und es gilt

$$\sup_Z U(f; Z) \leq \inf_Z O(f; Z).$$

(iii) Um spätere Komplikationen zu vermeiden, bietet es sich an, für ein degeneriertes Intervall $[a, b]$ mit $a = b$, also $[a, b] = \{a\}$ formal $O(f; Z) = U(f; Z) = 0$ zu setzen, da es hier keine Zerlegung Z gibt.

Definition 9.4. Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **RIEMANN-integrierbar**, falls

$$\sup_Z U(f; Z) = \inf_Z O(f; Z)$$

gilt. Diesen Wert nennen wir das **(RIEMANN-)Integral** von f über $[a, b]$ und schreiben

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_Z U(f; Z) = \inf_Z O(f; Z).$$

Bemerkung 9.5. Unter dem Gesichtspunkt von (iii) in Bemerkung 9.3 setzen wir

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

für jede Funktion f , die in a definiert ist.

Bemerkung 9.6. RIEMANN selbst gab in seinen Arbeiten eine etwas andere Definition. Der Begriff des Supremums etwa war noch nicht etabliert. Die hier gegebene, im Wesentlichen zu der RIEMANN'S äquivalente, Definition geht auf DARBOUX zurück.

Lemma 9.7. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist f genau dann RIEMANN-integrierbar, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z von $[a, b]$ existiert, so dass

$$O(f; Z) - U(f; Z) < \varepsilon.$$

Beweis. Sei zunächst f RIEMANN-integrierbar und $\varepsilon > 0$. Da $\sup_Z U(f; Z)$ die kleinste obere Schranke aller möglichen Untersummen ist, muss eine Zerlegung Z_1 existieren mit $\sup_Z U(f; Z) - \frac{\varepsilon}{2} < U(f; Z_1)$, und ebenso eine Zerlegung Z'' mit $\inf_Z O(f; Z) + \frac{\varepsilon}{2} > O(f; Z'')$. Für eine beliebige gemeinsame Verfeinerung Z von Z_1 und Z'' folgt dann aber

$$O(f; Z) - U(f; Z) \leq O(f; Z'') - U(f; Z_1) < \inf_Z O(f; Z) + \frac{\varepsilon}{2} - (\sup_Z U(f; Z) - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon,$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass $\inf_Z O(f; Z) = \sup_Z U(f; Z)$ gilt, weil f RIEMANN-integrierbar ist.

Nehmen wir nun an, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Zerlegung Z von $[a, b]$ mit $O(f; Z) - U(f; Z) < \varepsilon$. Dann existiert insbesondere für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung Z_n mit $O(f; Z_n) - U(f; Z_n) < \frac{1}{n}$. damit folgt aber

$$0 \leq \inf_Z O(f; Z) - \sup_Z U(f; Z) \leq O(f; Z_n) - U(f; Z_n) < \frac{1}{n}.$$

Damit folgt aber direkt $\inf_Z O(f; Z) - \sup_Z U(f; Z) = 0$, also ist f RIEMANN-integrierbar.

q.e.d.

Beispiel 9.8. Sei $b > 0$ beliebig und betrachten wir die Funktion

$$f : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Zerlegung $Z_n = (\xi_0 = 0, \xi_1 = b/n, \dots, \xi_j = bj/n, \dots, \xi_n = b)$ von $[0, b]$. Dann gilt, weil die Funktion f auf dem Intervall $[0, b]$ streng monoton wachsend ist,

$$\begin{aligned} O(f; Z_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \sup_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f = \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) f(\xi_{j+1}) = \frac{b}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{b(j+1)}{n} \right)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned} U(f; Z_n) &= \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \inf_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f = \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) f(\xi_j) = \frac{b}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{bj}{n}\right)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{b^3}{n^3} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}. \end{aligned}$$

Nach den Grenzwertsätzen 6.8 folgt somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O(f; Z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} U(f; Z_n) = \frac{b^3}{3}.$$

Insbesondere gibt es somit zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z = Z_n$ mit $O(f; Z_n) - U(f; Z_n) < \varepsilon$. Die Funktion f ist also auf $[0, b]$ RIEMANN-integrierbar und es gilt

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Wir können mit Lemma 9.7 einige einfache Eigenschaften des RIEMANN-Integrals herleiten.

Satz 9.9. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ RIEMANN-integrierbar. Dann ist Folgendes richtig.

(i) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ RIEMANN-integrierbar und es gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

(ii) Die Funktion $|f|$ ist RIEMANN-integrierbar und es gilt die **Dreiecksungleichung für Integrale**,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

(iii) Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt auch

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(iv) Für $a < c < b$ gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Beweis.

(i) Für eine beliebige Zerlegung Z von $[a, b]$ gilt offenbar

$$O(\alpha f + \beta g; Z) = \alpha O(f; Z) + \beta O(g; Z),$$

entsprechendes gilt auch für die Untersummen. Damit folgt aber direkt die Behauptung.

(ii) Sei $\varepsilon > 0$ und $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$, so dass $O(f; Z) - U(f; Z) < \varepsilon$ gilt. Wir betrachten dann die Funktionen

$$f_+ : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(x) & f(x) \geq 0 \\ 0 & f(x) < 0 \end{cases}$$

und

$$f_- : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -f(x) & f(x) < 0 \\ 0 & f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Dann gilt nach Konstruktion $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

Auf jedem Teilintervall $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ gilt dann aber

$$\sup_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f_+ - \inf_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f_+ \leq \sup_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f - \inf_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f$$

(warum?), also folgt

$$O(f_+; Z) - U(f_+; Z) \leq O(f; Z) - U(f; Z) < \varepsilon,$$

also ist f_+ nach Lemma 9.7 RIEMANN-integrierbar. Analog zeigt man auch, dass f_- RIEMANN-integrierbar ist. Mit (i) folgt damit auch, dass $|f|$ RIEMANN-integrierbar ist und wir haben

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b f_+(x) dx + \int_a^b f_-(x) dx \geq \left| \int_a^b f_+(x) dx - \int_a^b f_-(x) dx \right| = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

(iii) Klar aus der Definition.

(iv) Sei $\varepsilon > 0$. Ist dann $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ eine Zerlegung von $[a, c]$ mit $O(f; Z) - U(f; Z) < \varepsilon/2$ und $Z' = (\xi'_0, \dots, \xi'_m)$ eine Zerlegung von $[c, b]$ mit $O(f; Z') - U(f; Z') < \varepsilon/2$, dann ist $Z'' = (\xi_0, \dots, \xi_n = \xi'_0 = c, \dots, \xi'_m)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $O(f; Z'') - U(f; Z'') < \varepsilon$. Es gilt dann

$$O(f; Z'') = O(f; Z) + O(f; Z') \quad \text{und} \quad U(f; Z'') = U(f; Z) + U(f; Z').$$

Für $\varepsilon \searrow 0$ konvergieren $O(f; Z)$ und $U(f; Z)$ beide gegen $\int_a^c f(x) dx$ und $O(f; Z')$ und $U(f; Z')$ beide gegen $\int_c^b f(x) dx$. Da auch $O(f; Z'')$ und $U(f; Z'')$ beide gegen $\int_a^b f(x) dx$ konvergieren, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Wir haben in Beispiel 9.8 ein Beispiel für eine integrierbare Funktion gesehen. Wir wollen nun für eine ganze Klasse von Funktionen zeigen, dass sie integrierbar sind. Dazu benötigen wir einen neuen Begriff, den wir bereits in Bemerkung 7.2 angedeutet haben.

Definition 9.10. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **gleichmäßig stetig** auf D , falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D, |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Diese Definition erinnert natürlich sehr an die Definition von stetigen Funktionen in Definition 7.1. Der wesentliche Unterschied beider Konzepte besteht darin, dass δ bei stetigen Funktionen sowohl von ε als auch vom gewählten Punkt x_0 abhängen kann, während für gleichmäßig stetige Funktionen δ nur von ε abhängt.

Offenbar sind alle gleichmäßig stetigen Funktionen insbesondere stetig. Umgekehrt gilt folgender Satz.

Satz 9.11. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f auch gleichmäßig stetig.

Beweis. Nehmen wir an, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ $x, y \in D$ existieren, so dass zwar $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon_0$ gilt. Insbesondere findet man für $n \in \mathbb{N}$ und $\delta = \frac{1}{n}$ solche $x_n, y_n \in D$ mit $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$.

Da die so konstruierte Folge $(x_n)_n$ beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von BOLZANO-WEIERSTRASS 6.27 eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$, deren Grenzwert wir x_0 nennen. Dieser Grenzwert liegt wieder im Intervall $[a, b]$, also folgt wegen der Stetigkeit von f auch $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ folgt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = x_0$, also wie zuvor auch $\lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(x_0)$. Damit muss es aber ein $K \in \mathbb{N}$ geben, so dass

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon_0$$

gilt. Das ist aber ein Widerspruch zu unserer Annahme, dass f nicht gleichmäßig stetig ist.

q.e.d.

Bemerkung 9.12. Es ist in Satz 9.11 notwendig, stetige Funktionen auf einem beschränkten, abgeschlossenen Intervall zu betrachten (für später: das „Zauberwort“ lautet **kompakt**), ansonsten ist der Satz falsch! Etwa die Funktion

$$f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

ist zwar stetig, aber **NICHT** gleichmäßig stetig.

Hiermit können wir nun folgenden Satz beweisen.

Satz 9.13. *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist RIEMANN-integrierbar.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.11 wissen wir, dass f auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig ist, also existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt. Sei dann $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{b-a}{n} < \delta$.

Wir definieren die Zerlegung $Z = (\xi_0, \dots, \xi_n)$ mit $\xi_j = a + (b-a)\frac{j}{n}$, $j = 0, \dots, n$. Dann gilt $\xi_{j+1} - \xi_j = \frac{b-a}{n}$ und da für alle $x, y \in [\xi_j, \xi_{j+1}]$ $|x - y| \leq \frac{b-a}{n} < \delta$ gilt, folgt auch

$$\sup_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f - \inf_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f = \max_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f - \min_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f < \varepsilon,$$

wobei wir für die erste Gleichheit den Satz von WEIERSTRASS 7.15 verwendet haben. Es gilt also

$$O(f; Z) - U(f; Z) = \sum_{j=0}^{n-1} (\xi_{j+1} - \xi_j) \left(\sup_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f - \inf_{[\xi_j, \xi_{j+1}]} f \right) < \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \varepsilon = (b-a)\varepsilon.$$

Nach Lemma 9.7 folgt also, dass f wie behauptet auf $[a, b]$ RIEMANN-integrierbar ist.

q.e.d.

Bemerkung 9.14. (i) Hätten wir im Beweis oben δ so gewählt, dass $|f(y) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ gilt, hätten wir am Ende $O(f; Z) - U(f; Z) < \varepsilon$ herausbekommen.

(ii) Man kann den Beweis ein wenig abändern und so zeigen, dass Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die mit Ausnahme von endlich vielen Stellen auf $[a, b]$ stetig sind, ebenfalls RIEMANN-integrierbar sind. Tatsächlich kann man sogar (etwa abzählbar) unendlich viele Unstetigkeitsstellen zulassen, was aber deutlich schwieriger einzusehen ist (Stichwort LEBESGUE-Kriterium).

9.2 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt kommen wir zum Höhepunkt des zweiten Teils der Vorlesung, dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Dieser erlaubt es, Integrale auf recht elegante Weise zu berechnen und zeigt, dass, wie schon zu Beginn von ?? erwähnt, Integrieren und Differenzieren Umkehrungen voneinander sind, obwohl dies aus der geometrischen oder formalen Definition keineswegs offensichtlich ist.

Bevor wir zu diesem Hauptsatz kommen, benötigen wir noch ein weiteres Resultat, das auch in anderen Kontexten nützlich ist. Geometrisch wird der Satz durch Abbildung 9.2 veranschaulicht: Es gibt ein Rechteck über dem Intervall $[a, b]$, dessen Kante den Funktionsgraphen einer Funktion f schneidet, dessen (orientierter) Flächeninhalt genau den gleichen Wert hat, wie die (orientierte) Fläche unter dem Funktionsgraphen.

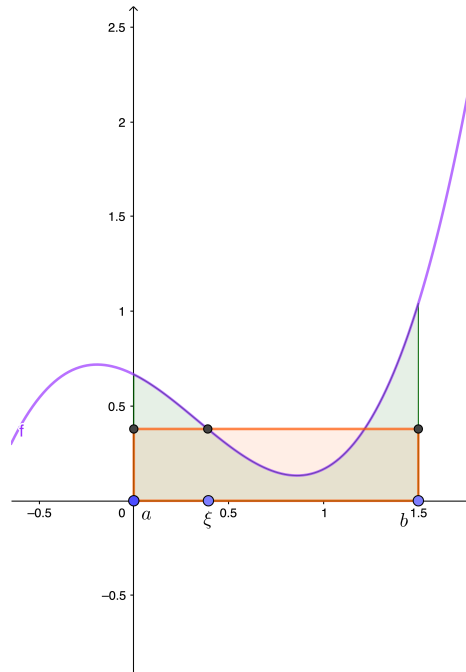


Abbildung 9.2: Der Mittelwertsatz der Integralrechnung: Die grüne Fläche und das rote Rechteck haben den gleichen Flächeninhalt.

Satz 9.15 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ so dass

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi).$$

Beweis. Zunächst wissen wir nach Satz 9.13, dass f RIEMANN-integrierbar ist, dass also das Integral $c := \int_a^b f(x) dx$ existiert.

Da f stetig ist, existieren nach dem Satz von WEIERSTRASS 7.15 $x_{min}, x_{max} \in [a, b]$, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_{min} \leq x_{max}$ annehmen können, in denen f sein Minimum $f(x_{min}) = y_{min}$ bzw. Maximum $f(x_{max}) = y_{max}$ annimmt, d.h. es gilt für alle $x \in [a, b]$

$$y_{min} \leq f(x) \leq y_{max}.$$

Nach Satz 9.9 (iii) folgt daher auch

$$(b-a)y_{\min} = \int_a^b y_{\min} dx \leq \int_a^b f(x) dx = c \leq \int_a^b y_{\max} dx = (b-a)y_{\max},$$

also

$$y_{\min} \leq \frac{c}{b-a} \leq y_{\max}.$$

Nach dem Zwischenwertsatz 7.10 existiert nun ein $\xi \in [x_{\min}, x_{\max}]$ mit $f(\xi) = \frac{c}{b-a}$, also folgt

$$(b-a)f(\xi) = c = \int_a^b f(x) dx$$

und die Behauptung ist bewiesen.

q.e.d.

Wir führen nun einen Begriff ein, der zunächst mit Integralen noch nichts zu tun hat.

Definition 9.16. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Eine differenzierbare Funktion $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Stammfunktion** von f , falls für alle $x \in (a, b)$

$$F'(x) = f(x)$$

gilt.

Beispiel 9.17. Für $\alpha \neq -1$ und $x > 0$ sei $F(x) = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$. Dann gilt $F'(x) = x^\alpha$, also ist F eine Stammfunktion von $f(x) = x^\alpha$. Für $x > 0$ ist $\log x$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{x}$.

Bemerkung 9.18. Stammfunktionen sind bis auf eine Konstante eindeutig, das heißt sind F, \tilde{F} beides Stammfunktionen derselben Funktion f , dann gilt für alle x

$$F'(x) - \tilde{F}'(x) = 0,$$

also existiert nach Korollar 8.20 eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{F}(x) = F(x) + C.$$

Wir können nun den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung formulieren und beweisen. Die ersten Beweise gehen auf NEWTON (1666, veröffentlicht 1686) und LEIBNIZ (1677) bzw. in geometrischer Form GREGORY (1667) zurück. Der hier vorgestellte Beweis über den Mittelwertsatz stammt im Wesentlichen von CAUCHY.

Satz 9.19 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt Folgendes:

(i) Die Funktion

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

ist eine Stammfunktion von f auf dem Intervall (a, b) .

(ii) Sei F eine beliebige Stammfunktion von f . Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b.$$

Beweis.

(i) Zunächst folgt, da f auf jedem Intervall $[a, x]$ (gleichmäßig) stetig ist nach Satz 9.13, dass das Integral $\int_a^x f(t) dt$ existiert, so dass F in der Tat eine wohldefinierte Funktion ist.

Wir wollen zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist. Sei dazu $x_0 \in (a, b)$ beliebig. Für $h > 0$ hinreichend klein betrachten wir dann den Differenzenquotienten

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 9.15 existiert dann ein $\xi \in (x_0, x_0 + h)$, so dass

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = hf(\xi)$$

gilt, also folgt für dieses ξ

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(\xi).$$

Für $h \searrow 0$ folgt aber $\xi \rightarrow x_0$, also folgt wegen der Stetigkeit von f

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Analog zeigt man auch

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Damit ist F in x_0 differenzierbar und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$, so dass F wie behauptet eine Stammfunktion von F ist.

(ii) Nach (i) und Bemerkung 9.18 ist jede Stammfunktion von f von der Form

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Damit folgt aber

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \left(\int_a^a f(t)dt + C \right) = \int_a^b f(t)dt,$$

wie behauptet.

q.e.d.

Beispiel 9.20. 1. Wir wollen die (positive) Fläche zwischen dem Graphen zur Funktion f mit $f(x) = 1 - x^2$ berechnen. Man sieht leicht, dass f genau in ± 1 Nullstellen hat und im Intervall $(-1, 1)$ positiv ist, d.h. wir wollen

$$\int_{-1}^1 f(x)dx$$

berechnen. Wie man leicht nachrechnet, ist $F(x) = x - \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von f , also gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 9.19

$$\int_{-1}^1 1 - x^2 dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3} \right) - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

2. Mit dem Hauptsatz lässt sich auch die Fläche zwischen zwei Kurven bestimmen: Die Graphen der Sinus- und Cosinus-Funktion schneiden sich in $a = \frac{\pi}{4}$ und $b = \frac{5\pi}{4}$, wobei dort $\sin(x) \geq \cos(x)$ gilt (siehe Abbildung 9.3). Diese Fläche ist gegeben durch

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x) dx.$$

Da $F(x) = -\sin(x) - \cos(x)$ eine Stammfunktion von $\sin(x) - \cos(x)$ ist, wie man leicht nachrechnet, erhält man für die gesuchte Fläche den Wert

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x) - \cos(x) dx &= [-\sin(x) - \cos(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= \left(-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

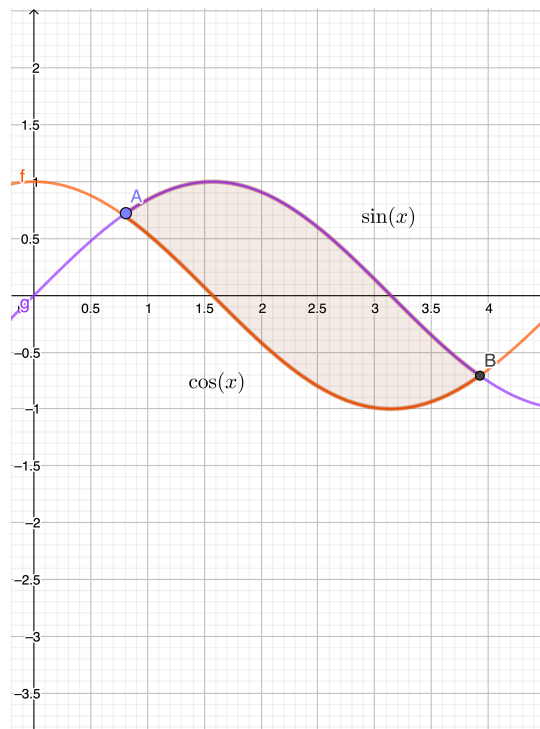


Abbildung 9.3: Fläche zwischen Sinus und Cosinus

Motiviert durch den Hauptsatz führen wir noch folgende Notation ein.

Definition 9.21. Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet das **unbestimmte Integral**

$$\int f(x)dx$$

die Menge aller Stammfunktionen von f .

Bemerkung 9.22. Ist F eine Stammfunktion von f , so gilt gemäß Bemerkung 9.18

$$\int f(x)dx = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Abkürzend schreiben wir dafür auch

$$\int f(x)dx = F(x) + c,$$

wobei c hier für eine unbestimmte Integrationskonstante steht.

9.3 Integrationstechniken

Wir wollen uns in diesem Abschnitt noch mit einigen Techniken befassen, wie man zu einer gegebenen Funktion eine Stammfunktion bestimmen kann. Bisher haben wir diese immer mehr oder minder geraten. Da laut dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Differenzieren und Integrieren Umkehrungen voneinander sind, können wir aus den Ableitungsregeln in Sätze 8.9 und 8.13 gewisse Integrationsregeln ableiten.

Satz 9.23 (Partielle Integration). *Seien $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbare^a Funktionen. Dann gilt*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Ebenso gilt für das unbestimmte Integral

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx (+c).$$

^aStetig differenzierbare Funktionen sind solche differenzierbaren Funktionen, deren Ableitung zumindest stetig ist (das muss i.A. nicht der Fall sein)

Beweis. Nach der Produktregel (Satz 8.9 (ii)) ist $u \cdot v$ eine Stammfunktion von $u' \cdot v + u \cdot v'$. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 9.19 gilt also

$$[u(x) \cdot v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x) + u(x)v'(x)dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

Direktes Umarrangieren liefert die Behauptung.

q.e.d.

Zunächst sieht die Formel für die partielle Integration nicht sehr hilfreich aus, da man lediglich ein Integral durch ein anderes ausdrückt. Dieses kann aber mitunter leichter zu bestimmen sein, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Beispiel 9.24. 1. Wir wollen eine Stammfunktion zu

$$f(x) = x \exp(x)$$

bestimmen. Dazu verwenden wir partielle Integration. Setzen wir $u(x) = x$ und $v'(x) = \exp(x)$, so können wir $v = \exp(x)$ wählen und finden $u'(x) = 1$, also folgt nach Satz 9.23

$$\int x \exp(x)dx = x \exp(x) - \int 1 \cdot \exp(x)dx = (x - 1) \exp(x) + c.$$

2. Mit einem kleinen Trick können wir partielle Integration verwenden, um für $x > 0$ eine Stammfunktion für $\log(x)$ zu finden. Schreiben wir

$$\int \log(x) dx = \int 1 \cdot \log(x) dx,$$

und setzen wir in Satz 9.23 $u(x) = \log(x)$ und $v'(x) = 1$, so können wir $v(x) = x$ wählen und finden

$$\int \log(x) dx = x \log(x) - \int x \cdot \log'(x) dx = x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + c.$$

3. Wir wollen das Integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$

berechnen. Mit $u(x) = \cos(x)$ und $v'(x) = \cos(x)$, sprich $u'(x) = -\sin(x)$ und $v(x) = \sin(x)$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} I &= [\cos(x) \sin(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)(-\sin(x)) dx = 0 + \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 - \cos^2(x) dx = [x]_0^{\pi/2} - I, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Eigenschaften des RIEMANN-Integrals aus Satz 9.9 (i) verwendet haben. Es folgt also $2I = \frac{\pi}{2}$ und somit

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Wir lernen nun zwei weitere Integrationstechniken kennen, die sich beide aus der Kettenregel (Satz 8.13) ableiten lassen. Beide sind unter dem Namen **Substitutionsregel** bekannt.

Satz 9.25 (1. Substitutionsregel). Seien $f : [a, b] \rightarrow J$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b g(f(x)) f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y) dy.$$

Ist G eine Stammfunktion von g , so gilt

$$\int g(f(x)) f'(x) dx = G(f(x)) + c.$$

Beweis. Nach der Kettenregel (Satz 8.13) gilt

$$(G(f(x)))' = G'(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x),$$

also folgt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung 9.19

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)dx = [G(f(x))]_a^b = G(f(b)) - G(f(a)) = \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)dy.$$

q.e.d.

Bemerkung 9.26. Bei der Anwendung der Substitutionsregel kann es vorkommen, dass für die Integrationsgrenzen auf der rechten Seite $f(a) > f(b)$ gilt, was wir in der ursprünglichen Definition des Integrals nicht vorgesehen hatten. Wir vereinbaren hierzu die allgemeine Regel (die mit allem bisher gezeigten, insbesondere dem Hauptsatz) konsistent ist, dass stets

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

gilt.

Einen recht offensichtlichen, aber wichtigen Spezialfall formulieren wir separat als Korollar.

Korollar 9.27 (Logarithmische Integration). Sei $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\log(f(x))]_a^b$$

und

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log(f(x)) + c.$$

Beispiel 9.28. 1. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, beliebig und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist dann F eine Stammfunktion von f , so gilt nach der Substitutionsregel

$$\int f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} \int \alpha f(\alpha x + \beta) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + c.$$

Diese Regel nennt man auch gelegentlich **lineare Substitution**.

2. Betrachten wir das Integral

$$\int_0^2 x \exp(-x^2) dx.$$

Da $x = -\frac{1}{2}(-x^2)'$ gilt, können wir dieses Integral nach der Substitutionsregel (Satz 9.25) schreiben als

$$\int_0^2 x \exp(-x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_{-0^2}^{-2^2} \exp(y) dy = -\frac{1}{2} [\exp(y)]_0^{-4} = \frac{1}{2} (1 - e^{-4}) \approx 0.490842\dots$$

Häufig benötigt man folgende Variante der Substitutionsregel, bei der man gewissermaßen selbst eine geeignete Funktion finden muss, mit der man substituiert.

Satz 9.29 (2. Substitutionsregel). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ stetig differenzierbar und bijektiv mit Umkehrfunktion $g^{-1} : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt.$$

Beweis. Folgt sofort aus der 1. Substitutionsregel.

q.e.d.

Beispiel 9.30. Wir wollen mit Hilfe der Integralrechnung die Fläche eines Kreises mit Radius $r > 0$ bestimmen. Dazu betrachten wir die Funktion

$$f : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Da ein Kreis mit Radius r um den Koordinatenursprung genau die Menge aller Punkte (x, y) ist, die der Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

genügen, beschreibt der Graph der Funktion f genau einen Viertelkreis im ersten Quadranten (siehe Abbildung 9.4) Die Funktion

$$g : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [0, r], \quad t \mapsto r \sin(t)$$

ist nun bijektiv mit Umkehrabbildung $x \mapsto \arcsin(x/r)$ und ist stetig differenzierbar. Nach der 2. Substitutionsregel finden wir also

$$\begin{aligned} \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_{\arcsin(0/r)}^{\arcsin(r/r)} \sqrt{r^2 - (r \sin(t))^2} (r \sin(t))' dt \\ &= r^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2(t)} \cos(t) dt = r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt. \end{aligned}$$

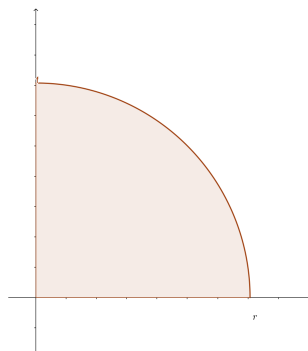


Abbildung 9.4: Graph der Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

Das letzte Integral haben wir bereits in Beispiel 9.24 (iii) bestimmt, womit sich, wie erwartet,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = r^2 \frac{\pi}{4}$$

ergibt.

Speziell für rationale Funktionen wollen wir zum Schluss noch eine Methode vorstellen, die in diesem Sinne zwar keine Integrationstechnik ist, aber u.a. bei der Integration rationaler Funktionen, aber nicht nur dort, Anwendung findet, die **Partialbruchzerlegung**. Wir verzichten darauf, einen allgemeinen Satz hierzu zu formulieren, sondern illustrieren das Verfahren an einem Beispiel.

Beispiel 9.31. Wir betrachten die Funktion

$$f : (4, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \rightarrow \frac{2x + 3}{(x + 1)(x - 4)}.$$

Wir wollen auf dem angegebenen Intervall eine Stammfunktion von f finden. Dazu machen wir den **Ansatz**, dass wir $f(x)$ schreiben können als

$$f(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 4} = \frac{A(x - 4) + B(x + 1)}{(x + 1)(x - 4)}. \quad (*)$$

für reelle Zahlen $A, B \in \mathbb{R}$. Damit diese Gleichung erfüllt ist, muss $A(x - 4) + B(x + 1) = 2x + 3$ gelten, und zwar für alle x . Setzen wir $x = -1$ ein (so dass B auf der linken Seite verschwindet), so ergibt sich

$$-5A = 2 \cdot (-1) + 3 = 1,$$

also $A = -\frac{1}{5}$. Setzen wir $x = 4$ ein (so dass A auf der rechten Seite verschwindet), so ergibt sich

$$5B = 2 \cdot 4 + 3 = 11,$$

also $B = \frac{11}{5}$. Das bedeutet, dass $A = -\frac{1}{5}$ und $B = \frac{11}{5}$ die einzigen möglichen Wahlen für A und B sind, so dass (*) erfüllt ist. Direktes Nachrechnen bestätigt, dass dies auch tatsächlich für alle x der Fall ist¹.

Da für $x > 4$ sowohl $x - 4$ als auch $x + 1$ positiv sind, finden wir mittels linearer Substitution

$$\int \frac{2x + 3}{(x + 1)(x - 4)} dx = \frac{11}{5} \log(x - 4) - \frac{1}{5} \log(x + 1) + c.$$

Bemerkung 9.32. Das in Beispiel 9.31 illustrierte Verfahren funktioniert genau so für alle rationalen Funktionen, deren Nennerpolynom über \mathbb{R} in **verschiedene** Linearfaktoren zerfällt, das sich also in der Form $(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ mit $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$ schreiben lässt.

Es lässt sich auch in einer etwas erweiterten Variante anwenden, wenn es quadratische Faktoren ohne (reelle) Nullstelle gibt. Hierzu muss man dann ein lineares Gleichungssystem lösen, womit wir uns in Kapitel 10 beschäftigen wollen.

Beispiel 9.33. Für die rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{(x-1)(x^2+1)}$ findet man die Partialbruchzerlegung

$$f(x) = \frac{2}{x - 1} - \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x^2 + 1},$$

indem man einen ähnlichen Ansatz wie in Beispiel 9.31 wählt und

$$f(x) = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + 1} = \frac{a(x^2 + 1) + (bx + c)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + 1)} = \frac{(a + b)x^2 + (-b + c)x + (a + c)}{(x - 1)(x^2 + 1)}$$

schreibt. Vergleicht man die Koeffizienten des Zählerpolynoms, erhält man die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ -b + c &= 3 \\ a &= -c \end{aligned}$$

Löst man diese (siehe Kapitel 10), so ergibt sich $a = 2$, $b = -1$ und $c = 2$, und damit die behauptete Partialbruchzerlegung.

Für $x > 1$ finden wir also mithilfe von logarithmischer Integration und der aus Beispiel 8.15 bekannten Tatsache, dass $\arctan(x)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2}$ ist, für $x > 1$ die folgende Stammfunktion von f ,

$$\int \frac{x^2 + 3x}{(x - 1)(x^2 + 1)} dx = 2 \log(x - 1) - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + 2 \arctan(x) + c.$$

¹Man kann mit linearer Algebra (siehe Teil III) zeigen, dass es solche A und B im Allgemeinen immer geben muss. Damit weiß man auch ohne Nachrechnen, dass diese beiden Kandidaten tatsächlich die Lösung sein müssen.

Teil III
Lineare Algebra

Kapitel 10

Lineare Gleichungssysteme

Die Lineare Algebra zählt zu den absoluten Grundlagen der gesamten weiterführenden Mathematik. So gut wie keine weiterführende Mathematik-Veranstaltung kommt ohne sie aus. Auch etwa im Bereich der Informatik benötigt man häufig z.B. Matrizen, um gewisse Vorgänge zu modellieren (Computergraphik, Optimierungsprobleme,...).

Die Motivation für Lineare Algebra, die Eigenschaften von algebraischen Strukturen namens **Vektorräumen** untersucht, ist das Lösen linearer Gleichungssysteme. Mit diesen wollen wir uns zunächst in diesem Kapitel beschäftigen und mit dem GAUSS-Algorithmus ein systematisches Verfahren für ihre Lösung kennenlernen.

10.1 Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Viele Probleme in der Mathematik können auf das Lösen linearer Gleichungssysteme reduziert werden, etwa geometrische Fragen wie die Frage nach dem Schnittpunkt zweier Geraden oder Ebenen im Raum, der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen (vgl. Bemerkung 9.32 and Beispiel 9.33), Lösen von Differentialgleichungen, u.v.a.m.

Definition 10.1. Ein **lineares Gleichungssystem** mit **Unbekannten** x_1, \dots, x_n ist eine Sammlung von Gleichungen der Form

$$\begin{array}{cccccc} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\dots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\dots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\dots & +a_{m,n}x_n & = & b_m, \end{array}$$

wobei für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ $a_{i,j}$ bzw. b_i irgendwelche reellen Zahlen seien. Die Zahlen $a_{i,j}$ heißen dabei die **Koeffizienten** des linearen Gleichungssystems.

Zunächst um Schreibarbeit zu sparen (aber wie sich später zeigen wird, nicht nur dazu), führen wir folgende kompaktere Darstellung eines linearen Gleichungssystems ein.

Definition 10.2. Für ein lineares Gleichungssystem wie in Definition 10.1 nennen wir

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

die zugehörige **Koeffizientenmatrix**,

$$b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

seine **rechte Seite** und

$$(A|b) := \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right)$$

seine **erweiterte Koeffizientenmatrix**^a.

^aDer Strich hat keine mathematische Bedeutung und dient nur der Übersichtlichkeit.

Beispiel 10.3. In Beispiel 9.33 hatten wir bereits (dort mit anderen Namen für die Variablen) das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & = 1 \\ & -x_2 & +x_3 = 3 \\ x_1 & & -x_3 = 0. \end{array}$$

hergeleitet. Als Koeffizientenmatrix erhalten wir daher

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right).$$

Allgemeiner haben wir folgende Definition.

Definition 10.4. Ein rechteckiges Zahlenschema aus m **Zeilen** und n **Spalten**

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

nennen wir eine $m \times n$ -**Matrix**. Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Eine Matrix $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1} =: \mathbb{R}^m$, mit nur einer Spalte, nennen wir auch einen (**Spalten-**)**Vektor**, eine Matrix $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, mit nur einer Zeile, nennen wir einen **Zeilenvektor**.

Wir definieren einige spezielle Arten von Matrizen anhand ihres Formats bzw. ihrer Einträge.

Definition 10.5. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Einträgen $a_{i,j}$.

- (i) Gilt $m = n$, so nennen wir A eine **quadratische** Matrix.
- (ii) Gilt $a_{i,j} = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$, so nennen wir A eine **Nullmatrix**.
- (iii) Ist A quadratisch und gilt $a_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$, so nennen wir A eine **Diagonalmatrix**. Gilt speziell

$$a_{i,j} = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(man nennt $\delta_{i,j}$ auch das **KRONECKER-DELTA**), so nennt man A die $n \times n$ -**Einheitsmatrix** und schreibt $A = I_n$.

- (iv) Eine quadratische Matrix heißt **obere Dreiecksmatrix**, falls $a_{i,j} = 0$ für alle $i > j$ gilt. Gilt stattdessen $a_{i,j} = 0$ für $i < j$, so heißt A eine **untere Dreiecksmatrix**.

Hat die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems nun eine bestimmte Form, ist es sehr leicht, die Lösung abzulesen.

Bemerkung 10.6. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems mit rechter Seite $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Gilt $A = I_n$, so liest man die Lösung sofort ab, nämlich $x_i = b_i$ für $i = 1, \dots, n$. Offenbar gibt es keine weiteren Lösungen.

Ist allgemeiner A eine Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge $a_{i,i}$, $i = 1, \dots, n$ alle $\neq 0$ sind, so erhält man offenbar wieder direkt eine eindeutige Lösung, nämlich $x_i = \frac{b_i}{a_{i,i}}$. Ist jedoch ein Diagonaleintrag $a_{i,i} = 0$ und $b_i \neq 0$, so gibt es keine Lösung, denn die i -te Gleichung liest sich dann als $0x_i = b_i$, was für $b_i \neq 0$ niemals stimmen kann. Ist dann aber $b_i = 0$, so kann x_i jeden beliebigen Wert annehmen und die Gleichung ist erfüllt.

Ist noch allgemeiner A eine obere Dreiecksmatrix, so lassen sich mit etwas mehr Mühe die Lösungen sukzessive bestimmen. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass jeder der Diagonaleinträge $a_{i,i} \neq 0$ erfüllt. Dann erhalten wir aus der n -ten Gleichung $a_{n,n}x_n = b_n$, also muss $x_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$ gelten. Diesen Wert können wir dann in allen anderen Gleichungen für x_n einsetzen und auf die rechte Seite bringen. So erhalten wir ein neues Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix noch immer eine obere Dreiecksmatrix ist, aber mit nur noch $n - 1$ Unbekannten. Wir können also genau so wie zuvor x_{n-1} direkt bestimmen, in alle Gleichungen einsetzen und so fortfahren, bis alle Unbekannten bestimmt sind.

Beispiel 10.7. Betrachten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_3 &= -6. \end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix A ist dann

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix. Wie in Bemerkung 10.6 bestimmen wir nun sukzessive die Lösungen der einzelnen Unbekannten und setzen diese in die übrigen Gleichungen ein.

Aus der 3. Gleichung erhalten wir direkt $x_3 = -6/3 = -2$. Setzen wir dies in die ersten beiden Gleichungen ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - 2 &= 2 \\ x_2 + 6 &= 0 \end{aligned}$$

also in Standardform

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 4 \\ x_2 &= -6 \end{aligned}$$

Wir sehen also direkt, dass $x_2 = -6$ gelten muss. Setzen wir dies wieder in die erste Gleichung ein, so ergibt sich

$$2x_1 + 6 = 4,$$

also $x_1 = -1$. Es bietet sich an, die Lösung auch wieder in Form eines Spaltenvektors anzugeben. Wir erhalten also als Lösung genau den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Später wird uns die folgende Definition erneut in allgemeinerer Form begegnen.

Definition 10.8. Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Einträgen $a_{i,j}$ und einen Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ mit Einträgen x_j definieren wir das **Matrix-Vektor-Produkt** als

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}, \quad \text{mit } v_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j.$$

Bemerkung 10.9. Ist A die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems mit rechter Seite $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ und fasst man in Definition 10.8 x_1, \dots, x_n als Variablen auf, lässt sich das entsprechende Gleichungssystem kompakter als

$$A \cdot x = b$$

schreiben.

Definition 10.10. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems mit rechter Seite b . Unter

$$\text{Lös}(A|b) := \{v \in \mathbb{R}^{n \times 1} : A \cdot v = b\}$$

verstehen wir die **Lösungsmenge** des Gleichungssystems.

10.2 Der GAUSS-Algorithmus

In diesem Abschnitt wollen wir die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems systematisch bestimmen. Wie wir gesehen haben, ist es für bestimmte lineare Gleichungssysteme sehr einfach, die Lösungsmenge abzulesen. Die Idee ist daher, ein beliebiges Gleichungssystem in ein äquivalentes (d.h. eines mit derselben Lösungsmenge) umzuformen, so dass man die Lösungen leicht bestimmen kann. Statt von linearen Gleichungssystemen sprechen wir hier meist von erweiterten Koeffizientenmatrizen.

Dazu haben wir folgende Beobachtung.

Lemma 10.11. *Die folgenden Operationen ändern die Lösungsmenge eines Gleichungssystems $(A|b)$ nicht:*

- (i) Vertauschen von zwei Zeilen i, j (Bezeichnung: $P(i, j)$).
- (ii) Multiplikation der i -ten Zeile mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (Bezeichnung: $M(i, \alpha)$)
- (iii) Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ zur i -ten Zeile das α -fache der j -ten Zeile addieren (Bezeichnung: $A(i, j, \alpha)$).

Beweis. Es kommt sicherlich nicht auf die Reihenfolge der Gleichungen an, also ist klar, dass die Operationen $P(i, j)$ die Lösungsmenge nicht ändern.

Wir schreiben im Folgenden $T*(A|b)$ für die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystem, auf das wir aus der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ erhalten, indem wir die elementare Zeilenoperation T darauf anwenden.

Ist $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \text{Lös}(A|b)$. Dann gilt insbesondere die Gleichung $a_{i,1}v_1 + \dots + a_{i,n}v_n = b_i$.

Diese kann man mit $\alpha \neq 0$ multiplizieren und erhält die äquivalente Gleichung $\alpha a_{i,1}v_1 + \dots + \alpha a_{i,n}v_n = \alpha b_i$. Da alle übrigen Gleichungen unverändert sind, folgt also auch, dass $v \in \text{Lös}(M(i, \alpha) * (A|b))$ gilt. Offenbar ist die Operation $M(i, \alpha)$ umkehrbar mit Umkehrung $M(i, \alpha^{-1})$, also kann man genauso argumentieren, dass $v \in \text{Lös}(M(i, \alpha)(A|b))$ auch in $\text{Lös}(A|b) = \text{Lös}(M(i, \alpha^{-1}) * M(i, \alpha)(A|b))$ enthalten ist, also sind die Lösungsmengen gleich.

Mit im Wesentlichen derselben Idee, aber etwas mehr Notation beweist man auch die dritte Behauptung.

q.e.d.

Da sie im weiteren Verlauf wichtig sind, geben wir diesen Transformationen einen Namen.

Definition 10.12. Die Umformungen in Lemma 10.11 nennen wir **elementare Zeilenoperationen**.

Beispiel 10.13. Betrachten wir die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

die wir in Beispiel 10.3 aus dem linearen Gleichungssystem in Beispiel 9.33 erhalten hatten. Wir führen sukzessive die angedeuteten Operationen aus Lemma 10.11 aus:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{A(3,1,-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{A(3,2,-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array} \right) \\ M(3,-1/2) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{A(2,3,-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{M(2,-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ A(1,2,-1) & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wir haben damit unser ursprüngliches System in ein anderes überführt, bei dem wir die Lösungsmenge sofort ablesen können. Es gilt also

$$\text{Lös}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

wie wir auch schon zuvor behauptet hatten (vgl. Beispiel 9.33).

GAUSS war einer der ersten, der erkannte, dass die drei Operationen in Lemma 10.11 für jede Matrix ausreichen, um systematisch die Lösungsmenge des zugehörigen linearen Gleichungssystems zu bestimmen. Im Allgemeinen ist die Situation allerdings etwas komplizierter als das letzte Beispiel suggerieren könnte. Es ist nicht immer möglich, eine erweiterte Koeffizientenmatrix so zu transformieren, dass die linke Seite zur Einheitsmatrix wird. Wie wir sehen werden lässt sich allerdings immer eine Form erreichen, die die Dreiecksmatrizen verallgemeinert.

Definition 10.14. Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Einträgen $a_{i,j}$. Wir sagen, dass A in **Zeilenstufenform** ist, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Alle Nullzeilen von A (d.h. Zeilen, in denen alle Einträge 0 sind) befinden sich am unteren Rand der Matrix: Ist $k \in \{1, \dots, m\}$ so, dass für alle $j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{k,j} = 0$ gilt, so gilt für alle $i \geq k$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ ebenfalls $a_{i,j} = 0$.
- (ii) In jeder Zeile, die keine Nullzeile ist, befindet sich der erste Eintrag $\neq 0$ rechts von den ersten Einträgen $\neq 0$ in den Zeilen darüber: Ist in Zeile k j minimal, so dass $a_{k,j} \neq 0$ gilt, so hat für alle $i < k$ der erste Eintrag $\neq 0$ einen Spaltenindex $< j$.

Den ersten Eintrag $\neq 0$ in jeder Zeile nennt man dann ein **Pivot-Element** bzw. eine **Stufe**.

Die Matrix A ist in **striker** oder **reduzierter** Zeilenstufenform, falls A in Zeilenstufenform ist und zusätzlich für jedes Pivot-Element $a_{i,j} = 1$, so wie $a_{1,j} = \dots = a_{i-1,j} = 0$ gilt.

Bemerkung 10.15. Repräsentieren wir beliebige Einträge in einer Matrix durch das Symbol $*$ und Einträge, die sicher nicht 0 und sonst beliebig sind, mit \pm , so sieht eine Matrix in Zeilenstufenform schematisch wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc} 0 & \dots & 0 & | \pm & * & \dots & * & * & \dots & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | \pm & * & \dots & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & | \pm & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & & & & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \end{array} \right).$$

Eine schematische Darstellung einer Matrix in strikter Zeilenstufenform wäre entsprechend

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & | \underline{1} & * & \dots & * & 0 & * & \dots & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | \underline{1} & * & \dots & 0 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & | \underline{1} & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & & & & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & & & & 0 & \dots & & & & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ eines linearen Gleichungssystems in strikter Zeilenstufenform, so lassen sich die Lösungen direkt ablesen. Bevor wir dies genauer untersuchen, beschreiben wir noch eine Kurzschreibweise, deren Bedeutung wir im nächsten Kapitel genauer untersuchen wollen.

Definition 10.16. Seien $v, w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ zwei Spaltenvektoren mit Einträgen v_j, w_j , $j = 1, \dots, n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir definieren die **Summe** von v und w als

$$v + w := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

und das **skalare Vielfache** als

$$\lambda v := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}.$$

Hiermit können wir nun die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in strikter Zeilenstufenform bestimmen.

Satz 10.17. Sei $(A|b)$ in strikter Zeilenstufenform die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ gelten möge. Dann gilt:

- (i) Gibt es in der letzten Spalte b eine Stufe, so ist $\text{Lös}(A|b) = \emptyset$.
- (ii) Gibt es in der letzten Spalte keine Stufe, so besitzt das System mindestens eine

Lösung $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ mit $v_j = b_i$, falls der Eintrag $a_{i,j}$ von A eine Stufe ist und $v_j = 0$ sonst.

(iii) Sei v die Lösung aus (ii). Gibt es in der j -ten Spalte von A keine Stufe, so

definieren wir den Vektor $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ durch

$$u_k = \begin{cases} -1 & k = j \\ 0 & k > j, \text{ oder } k < j \text{ und in Spalte } k \text{ ist keine Stufe.} \\ a_{i,j} & i = k - \#\{\ell < k : \text{Spalte } \ell \text{ enthält keine Stufe}\} \end{cases}$$

Dann ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ $v + \lambda u$ eine Lösung des Systems. Konstruiert man für alle Spalten j_1, \dots, j_r ohne Stufe einen solchen Vektor u_{j_ℓ} , so ist jede Lösung des Systems von der Form

$$v + \lambda_{j_1} u_{j_1} + \lambda_{j_2} u_{j_2} + \dots + \lambda_{j_r} u_{j_r}.$$

Beweis.

- (i) Gibt es in der letzten Spalte b eine Stufe, so entspricht dies einer Gleichung $0 = 1$, die offenbar immer falsch ist. Es kann in diesem Fall also keine Lösung geben.
- (ii) Es gilt für den i -ten Eintrag von $c := A \cdot v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ nach Definition der Matrix-Vektor-Multiplikation (Definition 10.8)

$$c_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j.$$

Gibt es in Zeile i von A keine Stufe, so muss nach (i) auch $b_i = 0$ gelten, sonst wäre in der letzten Spalte eine Stufe, was wir ausgeschlossen hatten. In diesem Fall ist aber $v_j = 0$ für alle j und wir finden $c_i = b_i = 0$. Gibt es andererseits eine Stufe in Zeile i , so gibt es genau eine, sagen wir in Spalte k . Dann gilt nach Definition $v_k = b_i$ und $v_j = 0$ für $j \neq k$, sowie $a_{i,k} = 1$, also folgt

$$c_i = \sum_{j \neq k} a_{i,j} v_j + a_{i,k} v_k = 0 + 1 \cdot b_i = b_i.$$

Insgesamt folgt also in der Tat $A \cdot v = b$, so dass v wie behauptet eine Lösung des Gleichungssystems ist.

- (iii) Wir ergänzen zusätzliche Zeilen zu unserem linearen Gleichungssystem, mit denen wir den Variablen x_j , für die in der j -ten Spalte keine Stufe vorliegt, einen freien Parameter λ_j zuordnen. Gibt es in Spalte j keine Stufe, so fügen wir einen Zeilenvektor $z = (z_1, \dots, z_n | z_{n+1}) \in \mathbb{R}^{1 \times (n+1)}$ als j -te Zeile ein, so dass $z_j = -1$, $z_{n+1} = \lambda_j$ und $z_i = 0$ sonst. Wir erhalten so ein neues (äquivalentes) Gleichungssystem, dessen Koeffizientenmatrix eine obere Dreiecksmatrix ist, so dass wir die Lösungsmenge

sukzessive bestimmen können wie in Bemerkung 10.6 beschrieben. Dass die Lösungen dann wie beschrieben aussehen, verifiziert man etwa durch eine Induktion über die Anzahl der Spalten von A .

q.e.d.

Bemerkung 10.18. Der Beweis geht stillschweigend davon aus, dass es mindestens so viele Spalten wie Zeilen in der Koeffizientenmatrix gibt, denn gibt es mehr Zeilen als Spalten, folgt aus der Definition der Zeilenstufenform, dass die letzten Zeilen auf jeden Fall nur 0 als Eintrag enthalten können. Diese Nullzeilen enthalten aber keine Information über die Lösung des Gleichungssystems und können daher ebenso gut ignoriert werden.

Beispiel 10.19. Betrachten wir das System mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right).$$

Dieses ist in strikter Zeilenstufenform. In der letzten Spalte befindet sich keine Stufe, also gibt es eine Lösung, nämlich

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In Spalten 2 und 4 von A gibt es keine Stufe, also konstruieren wir mit Hilfe von Satz 10.17 die Vektoren

$$u_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und erhalten so

$$\text{Lös}(A|b) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} : \lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um den Beweis von Satz 10.17 (iii) zu illustrieren, fügen wir für dieses konkrete System die zusätzlichen Zeilen wie dort beschrieben ein: In der ersten Zeile ist eine Stufe, in der zweiten aber nicht, also fügen wir als zweite Zeile $(0, -1, 0, 0 | \lambda_2)$ ein. Ebenso existiert keine Stufe in der 4. Spalte, also fügen wir als vierte Zeile $(0, 0, 0, -1 | \lambda_4)$ ein und erhalten so die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_4 \end{array} \right).$$

Dieses können wir wieder wie schon in Beispiel 10.13 vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_4 \end{array} \right) \xrightarrow{A(1,2,-2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 - 2\lambda_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_4 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{M(2,-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 - 2\lambda_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_4 \end{array} \right) \xrightarrow{A(3,4,3)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 - 2\lambda_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 + 3\lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_4 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{A(1,4,4)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 + 3\lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \lambda_4 \end{array} \right) \xrightarrow{M(2,-1), M(4,-1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 + 3\lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\lambda_4 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Die letzte Spalte stimmt nun mit dem Ergebnis überein.

Wir können nun das Verfahren vorstellen, mit dem man lineare Gleichungssysteme lösen kann. Grundlage hierfür ist der folgende Satz.

Satz 10.20 (C. F. GAUSS). *Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ lässt sich durch elementare Zeilenoperationen auf strikte Zeilenstufenform bringen.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass wir jede Matrix durch elementare Zeilenoperationen in strikte Zeilenstufenform überführen können. Wir suchen zunächst den kleinsten Index j , so dass die j -te Spalte von A einen Eintrag $\neq 0$ enthält¹. Gibt es diesen Eintrag nicht, so ist A die Nullmatrix und diese ist in strikter Zeilenstufenform. Dieser Eintrag sei $a_{i,j} \neq 0$. Indem wir ggf. die Zeilenoperation $M(i, a_{i,j}^{-1})$ anwenden, können wir dafür sorgen, dass $a_{i,j} = 1$ gilt². Nun tauschen wir ggf. mit der Operation $P(1, i)$ die erste und i -te Zeile und erhalten eine neue Matrix mit $a_{1,j} = 1$. Indem wir sukzessive für alle Zeilen $i = 2, \dots, m$ die Operation $A(i, 1, -a_{i,j})$ anwenden, erreichen wir, dass alle Einträge in Spalte j zu 0 werden.

Nun wiederholen wir den Prozess im Wesentlichen, indem wir in der so transformierten Matrix den kleinsten Index j bestimmen, so dass es in Spalte j *außer in der ersten Zeile* einen Eintrag $\neq 0$ gibt, sagen wir wieder $a_{i,j} \neq 0$ mit $i \geq 2$. Verwenden wir nun wie zuvor die Operation $M(i, a_{i,j}^{-1})$, um zu erreichen, dass $a_{i,j} = 1$ gilt und tauschen wir ggf. mit $P(2, i)$ die i -te und 2. Zeile, so erhalten wir eine Matrix, so dass der Eintrag $a_{2,j} = 1$ ist. Für alle $i \neq 2$ können wir nun mittels der Operation $A(i, 2, -a_{i,j})$ dafür sorgen, dass in Spalte j jeder Eintrag außer $a_{2,j}$ gleich 0 wird.

Wiederholt man dieses Verfahren analog für alle Spalten von A , so erhält man nach Konstruktion eine Matrix in strikter Zeilenstufenform (vgl. Definition 10.14).

¹In der Praxis gilt fast immer $j = 1$, aber das muss im Allgemeinen nicht so sein.

²Auch wenn es genau genommen nicht ganz korrekt ist, bezeichnen wir auch die Einträge der transformierten Matrix mit $a_{i,j}$, um zusätzlichen Notationsaufwand zu vermeiden.

q.e.d.

Bemerkung 10.21. Man kann auch zeigen, dass es zu jeder Matrix A genau eine Zeilenstufenform gibt, zu der sie sich transformieren lässt.

Der Beweis von Satz 10.20 gibt uns neben dem theoretischen, allgemeinen Resultat auch eine Methode, mit der wir die strikte Zeilenstufenform einer beliebigen Matrix, etwa der erweiterten Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems, bestimmen können und so mit Hilfe von Satz 10.17 dessen Lösungsmenge explizit bestimmen können. Wir halten dieses Verfahren, den GAUSS-Algorithmus, noch einmal separat fest.

Verfahren 10.22 (GAUSS-Algorithmus).

INPUT: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

OUTPUT: Die strikte Zeilenstufenform von A .

Algorithmus: Für $k = 1, \dots, m$:

1. Man finde die erste Spalte mit einem Eintrag $a_{i,j} \neq 0$ und $i \geq k$.
Falls dieser nicht existiert: Gib A aus.
2. Führe die Operationen $M(i, a_{i,j}^{-1})$ und $P(i, k)$ aus.
3. Räume die j -te Spalte aus:
Für $\ell = 1, \dots, m$, $\ell \neq k$ wende $A(\ell, k, -a_{\ell,j})$ an.

Gib A aus.

Bemerkung 10.23. Verfahren 10.22 könnte man mehr oder minder direkt so in Programmcode in einer Programmiersprache übersetzen und so implementieren. Es gibt dabei noch Kleinigkeiten, die man verbessern sollte, v.a. wenn man mit Näherungswerten für die Einträge arbeitet, aber die Grundidee bleibt dieselbe.

Als menschliche Rechner bevorzugen wir meist das Rechnen mit ganzen Zahlen, soweit dies möglich ist. Verfahren 10.22 würde in der Regel Brüche einführen. Man kann dies teilweise vermeiden, indem man Kombinationen aus Zeilenadditionen und -vertauschungen wählt um als Pivot-Element eine 1 zu erzeugen. Dadurch vermeidet man das Rechnen mit Brüchen.

Beispiel 10.24. 1. Betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

und bestimmen ihre strikte Zeilenstufenform. Wir folgen dazu zunächst Verfahren 10.22 direkt: Der (1,1)-te Eintrag ist sofort $\neq 0$, also führen wir nach dem Algorithmus zunächst folgende Schritte aus:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{M(1,1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{A(2,1,-1) \\ A(3,1,-4)}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 11/2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt finden wir den Eintrag (2,2), der nicht 0 ist, also führen wir nach dem Algorithmus folgende Schritte aus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 11/2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 11 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{M(2,-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 11 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{A(1,2,-1/2) \\ A(3,2,1)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie wir sehen, ist diese Matrix in strikter Zeilenstufenform, also haben wir die Aufgabe gelöst.

- Wir betrachten dieselbe Matrix erneut und versuchen nun, das Auftreten der Brüche zu vermeiden: Anstatt im allerersten Schritt die erste Zeile mit $1/2$ zu multiplizieren, was für die Brüche sorgt, kann man auch die erste und zweite Zeile tauschen und so ausräumen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{P(1,2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\substack{A(2,1,-2) \\ A(3,1,-4)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Nun trifft es sich im nächsten Schritt, dass an der nächsten Pivot-Position bereits ein Eintrag 1 steht, so dass wir nur noch eine Zeilenoperation auszuführen brauchen, um die strikte Zeilenstufenform von A zu finden,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A(3,2,-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -11 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wollen uns nun noch etwas systematischer mit der Beschreibung der Lösungsmenge auseinandersetzen.

Definition 10.25. Ein lineares Gleichungssystem $(A|b)$, dessen rechte Seite b der Nullvektor ist, heißt **homogen**. Wir nennen die entsprechende Lösungsmenge $\text{Lös}(A|0)$ auch den **Kern** von A und schreiben dafür $\text{Kern}(A)$. Ist die rechte Seite $b \neq 0$, so nennt man das System **inhomogen**.

Die Lösungsmengen von Gleichungssystemen mit derselben Koeffizientenmatrix hängen sehr eng zusammen, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 10.26. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b, c \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- (i) Sind $v, w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ jeweils Lösungen der linearen Gleichungssysteme $(A|b)$ bzw. $(A|c)$, so ist $v + \lambda w$ eine Lösung des Systems $(A|b + \lambda c)$.
- (ii) Insbesondere gilt: Sind v, w beides Lösungen des Systems $(A|b)$, so ist $v - w$ eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $(A|0)$.
- (iii) Ist andererseits v eine Lösung von $(A|b)$ und w eine Lösung des homogenen Systems $(A|0)$, so ist auch $v + w$ eine Lösung von $(A|b)$.

Beweis.

- (i) Nach Voraussetzung gilt $A \cdot v = b$ und $A \cdot w = c$, also haben wir nach Definition des Matrix-Vektor-Produkts für alle $i = 1, \dots, m$

$$\sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j = b_i \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^n a_{i,j} w_j = c_i.$$

Damit haben wir auch

$$b_i + \lambda c_i = \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j \right) + \lambda \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} w_j \right) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} (v_j + \lambda w_j).$$

Wir haben also in der Tat

$$A \cdot (v + \lambda w) = b + \lambda c,$$

also ist wie behauptet $v + \lambda w \in \text{Lös}(A|b + \lambda c)$.

- (ii) Folgt direkt aus (i) mit $c = b$ und $\lambda = -1$.
- (iii) Folgt direkt aus (i) mit $c = 0$.

q.e.d.

Bemerkung 10.27. Was wir mit Proposition 10.26 nebenbei mitbewiesen haben ist die folgende wichtige Eigenschaft des Matrix-Vektor-Produkts (siehe Definition 10.8). Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $v, w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$A \cdot (v + \lambda w) = A \cdot v + \lambda A \cdot w.$$

Als unmittelbare Folgerung erhält man die folgende Beschreibung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Korollar 10.28. *Sei $v \in \text{Lös}(A|b)$ beliebig. Dann gilt*

(i) $\text{Lös}(A|b) = \{v + w : w \in \text{Kern}(A)\}.$

(ii) *Für $v, w \in \text{Kern}(A)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $v + \lambda w \in \text{Kern}(A)$.*

Zum Abschluss des Kapitels noch eine, nicht ganz unwichtige, Bemerkung:

Bemerkung 10.29. Alles in diesem Kapitel wurde wegen der größeren Vertrautheit für reelle Zahlen als Koeffizienten eingeführt. Wir haben allerdings nie Eigenschaften der reellen Zahlen benutzt, außer, dass sie einen Körper bilden (siehe Definitionen 3.1 and 3.5). Alles hier formulierte gilt genau so, wenn man \mathbb{R} durch einen beliebigen Körper, insbesondere \mathbb{C} , ersetzt.

Kapitel 11

Vektorräume

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der algebraischen Struktur beschäftigen, die der linearen Algebra zugrunde liegt. Wir führen diese zunächst abstrakt ein und geben viele Beispiele, und kommen dann auf das wichtige Konzept der Basis und der Dimension eines Vektorraums zu sprechen.

11.1 Vektorräume und Teilräume

Wir beginnen mit der Definition der zentralen Objekte dieses Kapitels.

Definition 11.1. Sei K ein beliebiger Körper und $V \neq \emptyset$ eine Menge mit zwei Verknüpfungen

$$+ : V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$$

und

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v.$$

Wir nennen V einen **Vektorraum** über K oder auch **K -Vektorraum**, falls diese Verknüpfungen die folgenden Eigenschaften erfüllen. Dazu seien $u, v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ beliebig.

A1 $v + w = w + v$

A2 $u + (v + w) = (u + v) + w$

A3 Es gibt ein Element $0 \in V$ mit $v + 0 = v$ für alle $v \in V$, genannt der **Nullvektor** in V .

A4 Zu jedem $v \in V$ existiert ein Element $-v \in V$ mit $v + (-v) = 0$.

M1 $\mu \cdot (\lambda \cdot v) = (\mu \cdot \lambda) \cdot v$

M2 $1 \cdot v = v$ für alle $v \in V$.

$$D1 \quad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$$

$$D2 \quad (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v.$$

Die Elemente von V nennen wir **Vektoren**.

Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 11.2. 1. Der Begriff des Vektors ist uns, weniger abstrakt, bereits in Definition 10.4 begegnet. Tatsächlich sieht man ohne Schwierigkeiten, dass die Vektoraddition und skalare Multiplikation aus Definition 10.16 für Elemente von $K^{n \times 1}$ sämtliche der obigen Axiome erfüllen. Wir nennen $K^n = K^{n \times 1}$ den **Standardraum** über K .

2. Etwas allgemeiner kann man auch eine Addition und skalare Multiplikation auf dem Raum der $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen in einem Körper K definieren: Für $A, B \in K^{m \times n}$ mit Einträgen $a_{i,j}$ bzw. $b_{i,j}$ und $\lambda \in K$ definieren wir die Summe

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

und

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Genau wie bei der Vektoraddition bzw. skalaren Multiplikation sieht man direkt ein, dass die Axiome aus Definition 11.1 gelten, wobei das Nullelement natürlich die $m \times n$ -Nullmatrix ist. Damit wird auch $K^{m \times n}$ zu einem K -Vektorraum.

3. Wir bezeichnen mit $K[X]$ die Menge aller **Polynome** mit Koeffizienten in K , also alle (formalen)¹ Ausdrücke der Form

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = \sum_{j=0}^n a_j X^j, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_0, \dots, a_n \in K.$$

Der **Grad** von f ist dabei definiert als $\deg f := \min\{j \in \{0, \dots, n\} : a_j \neq 0\}$, es sei denn, alle Koeffizienten von f sind 0, dann setzen wir $\deg f := -\infty$. Auch hier

¹Polynome haben zunächst nichts mit Funktionen zu tun. Über unendlichen Körpern wie \mathbb{Q} oder \mathbb{R} spielt das keine so große Rolle, aber über endlichen Körpern ist es wichtig, die Begriffe des Polynoms und der Polynomfunktion zu trennen.

definieren wir Addition und skalare Multiplikation auf die naheliegende Art und Weise: Für $f, g \in K[X]$ mit Koeffizienten a_j bzw. b_j und $\lambda \in K$ setzen wir

$$f + g = (a_n + b_n)X^n + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0),$$

wobei wir für den Fall, dass $\deg f \neq \deg g$ gilt ggf. Nullen als Koeffizienten ergänzen, und

$$\lambda \cdot f = (\lambda a_n)X^n + (\lambda a_{n-1})X^{n-1} + \dots + (\lambda a_1)X + (\lambda a_0).$$

Damit wird $K[X]$ zu einem Vektorraum, wobei der Nullvektor hier das **Nullpolynom** ist.

4. Sei M eine beliebige Menge. Dann bildet die Menge aller Abbildungen $f : M \rightarrow K$ mit werteweiser Addition und Skalarmultiplikation (d.h. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$) einen K -Vektorraum.

Speziell für $K = \mathbb{R}$ und $M = I$ ein Intervall folgt nach Sätzen 7.6 und 8.9, dass die Menge der stetigen bzw. differenzierbaren Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls einen Vektorraum bildet.

Es gelten folgende Rechenregeln in beliebigen Vektorräumen, die sich leicht aus den Axiomen in Definition 11.1 ableiten lassen.

Lemma 11.3. *Sei K ein beliebiger Körper und V ein K -Vektorraum. Dann gilt folgendes.*

- (i) Für $v \in V$ beliebig gilt $0 \cdot v = 0$.
- (ii) Für alle $\lambda \in K$ gilt $\lambda \cdot 0 = 0$.
- (iii) Gilt $\lambda \cdot v = 0$ so ist $\lambda = 0$ oder $v = 0$.
- (iv) Für alle $v \in V$ gilt $(-1) \cdot v = -v$.

Beweis.

1. Setzen wir $0 \cdot v = w \in V$. Dann gilt

$$w = 0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v = w + w,$$

also folgt, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung $-w$ addieren wie behauptet $w = 0$.

4. Für $v \in V$ beliebig gilt

$$v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 + (-1)) \cdot v = 0 \cdot v = 0 = v + (-v)$$

nach (i). Addieren wir nun auf beiden Seiten $-v$, erhalten wir $(-1) \cdot v = -v$, wie wir behauptet hatten.

Den Rest lassen wir als Übung.

q.e.d.

Definition 11.4. Sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$. Wir nennen U einen **Teilraum** oder **Unterraum** von V , falls U mit den Verknüpfungen $+$ und \cdot auf V selbst ein Vektorraum ist. Wir schreiben dann auch $U \leq V$.

Es ist in der Regel recht einfach, mittels der folgenden Proposition Teilmengen eines Vektorraums darauf zu überprüfen, ob sie Teilräume sind oder nicht.

Proposition 11.5. Sei V ein K -Vektorraum und $U \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann ist U genau dann ein Teilraum von V , wenn

- (i) $U \neq \emptyset$ gilt,
- (ii) Für alle $v, w \in U$ und $\lambda \in K$ $v + \lambda w \in U$ gilt.

Beweis. Es ist klar, dass wenn $U \leq V$ gilt, beide Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt sind.

Sei also $U \neq \emptyset$ und es gelte (ii). Dann ist insbesondere für $v, w \in U$ und $\lambda \in K$ $v + w \in U$ (wegen (ii) mit $\lambda = 1$) und $\lambda \cdot w \in U$ (wähle $u = 0$ in (ii)). Die Eigenschaften A1, A2, M1, M2, D1, D2 sind offenbar erfüllt, da dies nach Voraussetzung auf ganz V , also insbesondere auf U gilt. Da $U \neq \emptyset$ gilt, existiert ein $v \in U$ und wir haben insbesondere $0 = 0 \cdot v \in U$ und zu jedem $v \in U$ gilt auch $-v = (-1) \cdot v \in U$. Damit ist U ein Vektorraum, wie wir behauptet hatten.

q.e.d.

Beispiel 11.6. 1. In Korollar 10.28 haben wir bereits gesehen, dass für eine beliebige Matrix $A \in K^{m \times n}$ $\text{Kern}(A)$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^{n \times 1}$ ist, $\text{Kern}(A) \leq \mathbb{R}^{n \times 1}$.

2. Jeder Vektorraum enthält den **Nullraum** $\{0\}$ als Teilraum.

3. Da für zwei Polynome $f, g \in K[X]$ und $\lambda \in K$ offenbar stets $\deg(f + g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\}$ und $\deg(\lambda \cdot f) \leq \deg(f)$ gilt, ist für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge

$$K[X]_{\leq n} := \{f \in K[X] : \deg(f) \leq n\}$$

ein Teilraum von $K[X]$. Man beachte hierbei die Konvention, dass $\deg(0) = -\infty$ gilt und wir $-\infty < n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ vereinbaren.

Proposition 11.7. Sei V ein K -Vektorraum und $T, U \leq V$ seien Teilräume von V . Dann ist auch $T \cap U$ ein Teilraum von V .

Beweis. Da T und U beides Teilräume von V sind, gilt $0 \in T$ und $0 \in U$, also auch $0 \in T \cap U$. Damit ist $T \cap U \neq \emptyset$.

Weiter gilt für $v, w \in T \cap U$ und $\lambda \in K$ insbesondere $v, w \in T$ und damit auch $v + \lambda w \in T$, da T ein Teilraum von V ist. Genauso gilt aber auch $v + \lambda w \in U$, also folgt $v + \lambda w \in T \cap U$. Nach Proposition 11.5 ist damit $T \cap U \leq V$ ein Teilraum von V .

q.e.d.

Bemerkung 11.8. (i) Man kann mit fast demselben Beweis zeigen, dass auch der Schnitt beliebig vieler, auch unendlich vieler, Teilräume desselben Vektorraums ein Teilraum ist.

(ii) Die analoge Behauptung für die Vereinigung von Teilräumen ist so gut wie immer **falsch**, es sei denn, einer der Teilräume enthält den anderen (Übung).

Wir betrachten noch eine wichtige Art, Teilräume zu konstruieren.

Definition 11.9. Sei V ein K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig. Dann bezeichnen wir mit

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \}$$

das **Erzeugnis** von v_1, \dots, v_n . Einen Ausdruck der Form $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ nennen wir auch eine **Linearkombination** von v_1, \dots, v_n .

Wir haben hierzu die folgende Beobachtung.

Proposition 11.10. Sei V ein K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ beliebig. Dann ist das Erzeugnis

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle \leq V$$

ein Teilraum von V .

Beweis. Zunächst ist offenbar $0 = 0v_1 + \dots + 0v_n \in U := \langle v_1, \dots, v_n \rangle$, also ist $U \neq \emptyset$.

Seien also $v, w \in U$. Dann existieren nach Definition $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ und $w = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$. Für $\alpha \in K$ beliebig gilt dann

$$v + \alpha w = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) + \alpha(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 + \alpha \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n + \alpha \mu_n) v_n \in U,$$

also folgt die Behauptung mit Proposition 11.5.

q.e.d.

Bemerkung 11.11. Man überlegt sich leicht, dass $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ der kleinste Teilraum von V ist, der alle der Vektoren v_1, \dots, v_n enthält.

Für einen gegebenen Vektor $v \in V$ und einen Teilraum $U = \langle v_1, \dots, v_n \rangle \leq V$ stellt sich in vielen Kontexten die Frage, ob $v \in U$ gilt. Diese lässt sich speziell für den Raum $K^{m \times 1}$ problemlos mit unserem Wissen aus dem letzten Kapitel beantworten.

Lemma 11.12. Sei $V = K^{m \times 1}$ ein K -Vektorraum, $v \in V$ beliebig und $U = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \leq V$ ein Teilraum von V . Weiter sei $A \in K^{m \times n}$ die Matrix mit Spalten u_1, \dots, u_n . Dann gilt $v \in U$ genau dann, wenn das lineare Gleichungssystem $(A|v)$ eine Lösung besitzt.

Beweis. Es gilt $v \in U$ genau dann, wenn $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ existieren, so dass

$$v = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

gilt. Lesen wir diese Gleichung eintragsweise, wobei wir die Einträge von v mit v_1, \dots, v_m bezeichnen, die des Vektors u_j mit $u_{i,j}$, für jede Komponente der Vektoren, erhalten wir die m Gleichungen

$$\begin{array}{ccccccc} u_{1,1}\lambda_1 & + & \dots & + & u_{1,n}\lambda_n & = & v_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ u_{m,1}\lambda_1 & + & \dots & + & u_{m,n}\lambda_n & = & v_m \end{array}$$

Dies ist aber nichts anderes als ein lineares Gleichungssystem mit erweiterter Koeffizientenmatrix $(A|v)$.

q.e.d.

Beispiel 11.13. Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen mit Hilfe des GAUSS-Algorithmus konzentriert man sich auf die Koeffizientenmatrix. Hat man mehrere Gleichungssysteme $(A|b_1), (A|b_2), \dots, (A|b_\ell)$ zu lösen, bietet es sich an, die Koeffizientenmatrix sofort durch alle rechten Seiten zu erweitern, da man sonst einen großen Teil der Rechenschritte mehrmals durchführen müsste.

Betrachten wir den Teilraum

$$U = \left\langle u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{4 \times 1}.$$

Wir wollen prüfen, ob die Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in U liegen oder nicht. Dazu bestimmen wir die strikte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -4 & -7 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[A(4,1,1)]{A(2,1,-2)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -6 & 5 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[A(4,2,-3)]{A(3,2,1)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \end{array} \right) \xrightarrow[A(1,3,-2)]{M(3,-1/4)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir sehen also, da wir in der zweiten ergänzten Spalte eine Stufe haben, dass wir keine Lösung für w als rechte Seite finden, so dass $w \notin U$ gilt. Für v als rechte Seite erhalten wir eine Lösung, nämlich

$$v = 1 \cdot u_1 + (-2) \cdot u_2,$$

so dass $v \in U$ gilt. Es gibt weitere Lösungen, aber es reicht hier, eine anzugeben.

11.2 Dimension und Basis

Mit Blick auf Definition 11.9 führen wir folgenden neuen Begriff ein.

Definition 11.14. Sei V ein K -Vektorraum. Dann heißt V **endlich erzeugt**, falls $v_1, \dots, v_m \in V$ existieren, so dass

$$V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$$

gilt.

Wir nennen dann das Tupel $(v_1, \dots, v_m) \in V^m$ ein **Erzeugendensystem** für V .

Beispiel 11.15. 1. Jeder Spaltenvektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$$

lässt sich offenbar schreiben als

$$v = v_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + v_n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schreiben wir abkürzend

$$e_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{n \times 1},$$

wobei nur an der j -ten Position eine 1 steht und alle anderen Einträge 0 sind, so sehen wir also, dass

$$K^{n \times 1} = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$$

gilt. Damit ist $K^{n \times 1}$ endlich erzeugt.

2. Der Vektorraum $K[X]$ ist **nicht** endlich erzeugt: Angenommen, es existieren Polynome $f_1, \dots, f_m \in K[X]$ mit $K[X] = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$, dann sei $n := \max\{\deg(f_i) : i \in \{1, \dots, m\}\}$. Dann gilt für jedes Polynom $g \in \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ $\deg(g) \leq n$. Damit ist etwa das Polynom X^{n+1} zwar in $K[X]$, aber nicht in $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ enthalten. Es kann also kein endliches Erzeugendensystem für $K[X]$ geben.

Der Raum $K[X]_{\leq n}$ der Polynome von Grad $\leq n$ andererseits ist endlich erzeugt, denn es gilt offenbar

$$K[X]_{\leq n} = \langle 1, X, \dots, X^{n-1}, X^n \rangle.$$

Wir werden uns im Laufe der Vorlesung fast ausschließlich mit endlich erzeugten Vektorräumen auseinandersetzen.

Wir führen nun noch einige absolut zentrale Begriffe ein.

Definition 11.16. Sei V ein K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Das Tupel (v_1, \dots, v_n) heißt **linear abhängig**, falls es $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt, wobei $\lambda_i \neq 0$ für mindestens ein i gilt, so dass

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

gilt. Anderenfalls heißt das Tupel (v_1, \dots, v_n) **linear unabhängig**.

Bemerkung 11.17. (i) Ein Tupel, das den Nullvektor enthält, ist **immer** linear abhängig.

- (ii) Ein Paar (v_1, v_2) ist genau dann linear abhängig, wenn v_2 ein skalares Vielfaches von v_1 ist, wenn also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$v_2 = \lambda v_1.$$

(iii) Für $V = K^{m \times 1}$ lässt sich die Frage, ob ein Tupel (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig ist, leicht mithilfe des GAUSS-Algorithmus 10.22 beantworten: Sei $A \in K^{m \times n}$ die Matrix, deren Spalten genau die Vektoren v_1, \dots, v_n sind. Aus der Definition des Matrix-Vektor-Produkts (Definition 10.8) sieht man direkt, dass für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = A \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

gilt, so dass (v_1, \dots, v_n) genau dann linear abhängig ist, wenn der Kern der Matrix A nicht trivial ist, wenn dieser also einen Vektor $\neq 0$ enthält.

Beispiel 11.18. Betrachten wir die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}.$$

Wie in Bemerkung 11.17 beschrieben bestimmen wir den Kern der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu bestimmen wir mittels des GAUSS-Algorithmus die strikte Zeilenstufenform von A und können den Kern ablesen:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 2 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{P(1,4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{A(2,1,-2), A(3,1,1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{M(2,-1/4), M(4,1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A(1,2,-1), A(3,2,-1), A(4,2,-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also können wir ablesen, dass

$$\text{Kern}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gilt, also ist das Tupel (v_1, v_2, v_3) linear abhängig und es gilt

$$3v_1 - 2v_2 - v_3 = 0.$$

Definition 11.19. Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V . Ist \mathcal{B} zusätzlich linear unabhängig, so nennen wir \mathcal{B} eine **Basis** von V . Die Zahl n nennen wir die **Länge** der Basis \mathcal{B} .

Wegen der folgenden Eigenschaft ist eine Basis eines Vektorraumes ein sehr wünschenswertes Erzeugendensystem.

Lemma 11.20. Sei V ein K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Das Tupel (v_1, \dots, v_n) ist linear unabhängig.
- (ii) Für jedes $v \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ ist die Darstellung

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Implikation (i) \Rightarrow (ii). Angenommen, wir haben $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Dann gilt

$$0 = v - v = (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) - (\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n)v_n.$$

Da nach Voraussetzung das Tupel (v_1, \dots, v_n) linear unabhängig ist, folgt hieraus aber direkt $\lambda_1 - \mu_1 = \dots = \lambda_n - \mu_n = 0$ und somit die Eindeutigkeit in (ii).

Die Implikation (ii) \Rightarrow (i) ist leicht einzusehen, denn insbesondere muss die Darstellung für $v = 0 \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ eindeutig sein. Da eine solche Darstellung durch $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gegeben ist, folgt hieraus sofort die lineare Unabhängigkeit.

q.e.d.

Eine Basis von V erlaubt es also, jeden Vektor in V eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren zu schreiben. Es stellt sich nun zunächst die Frage, ob jeder (endlich erzeugte) Vektorraum eine Basis besitzt. Wie wir sehen werden, ist dies in der Tat der Fall. Wenn es verschiedene Basen gibt, stellt sich die Frage, ob diese Basen etwas gemeinsam haben. Es wird sich herausstellen, dass alle Basen eines Vektorraumes immer dieselbe Länge haben, was einleuchtend erscheinen mag, aber verhältnismäßig aufwendig zu beweisen ist.

Wir wollen zunächst im folgenden Satz Basen charakterisieren.

Satz 11.21. Sei $V \neq \{0\}$ ein K -Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ ist eine Basis von V .

(ii) \mathcal{B} ist ein **minimales** Erzeugendensystem von V , d.h. \mathcal{B} ist ein Erzeugendensystem und für jedes $j = 1, \dots, n$ ist

$$(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$$

kein Erzeugendensystem von V .

(iii) Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutig bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

gilt.

(iv) \mathcal{B} ist linear unabhängig und für jedes $v \in V$ ist (v_1, \dots, v_n, v) linear abhängig.

Beweis. Wir verwenden ein **Ringschluss-Argument**.

(i) \Rightarrow (ii): Sei \mathcal{B} eine Basis von V , also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V . Angenommen, es gibt ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so dass $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V ist. Durch Umordnen der Vektoren können wir ohne Einschränkung $j = n$ annehmen. Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \in K$, so dass

$$v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1}$$

gilt, also folgt

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0.$$

Damit haben wir jedoch eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors gefunden, was ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von \mathcal{B} ist. Damit folgt (ii).

(ii) \Rightarrow (iii): Sei \mathcal{B} ein minimales Erzeugendensystem von V und sei $v \in V$ beliebig. Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit der λ_j . Angenommen, wir haben

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n v_n$$

und es gibt ein j mit $\lambda_j \neq \tilde{\lambda}_j$. Dann folgt

$$0 = (\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)v_1 + \dots + (\lambda_j - \tilde{\lambda}_j)v_j + \dots + (\lambda_n - \tilde{\lambda}_n)v_n,$$

also

$$v_j = \frac{1}{\tilde{\lambda}_j - \lambda_j} \left((\lambda_1 - \tilde{\lambda}_1)v_1 + \dots + (\lambda_{j-1} - \tilde{\lambda}_{j-1})v_{j-1} \right. \\ \left. + (\lambda_{j+1} - \tilde{\lambda}_{j+1})v_{j+1} + \dots + (\lambda_n - \tilde{\lambda}_n)v_n \right) \in \langle v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n \rangle.$$

Damit wäre aber $(v_1, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n)$ ein Erzeugendensystem von V , im Widerspruch zu (ii).

(iii) \Rightarrow (iv) Nehmen wir (iii) an. Die lineare Unabhängigkeit von \mathcal{B} folgt dann direkt aus Lemma 11.20, da für jedes $v \in V$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ existieren mit

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n.$$

Damit ist

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n - v = 0$$

eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors, also ist (v_1, \dots, v_n, v) linear abhängig.

(iv) \Rightarrow (i) Nach Voraussetzung ist \mathcal{B} linear unabhängig. Es bleibt also zu zeigen, dass B ein Erzeugendensystem von V ist. Sei dazu $v \in V$ beliebig. Nach Voraussetzung ist (v_1, \dots, v_n, v) linear abhängig, also existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda \in K$, nicht alle 0, mit

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \lambda v = 0.$$

Dann gilt zwingend $\lambda \neq 0$, ansonsten folgt nämlich auch

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0,$$

was wegen der linearen Unabhängigkeit von \mathcal{B} nur sein kann, wenn $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gilt. Dann ist aber

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n \in \langle v_1, \dots, v_n \rangle,$$

also ist \mathcal{B} ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V und somit eine Basis.

q.e.d.

Bemerkung 11.22. Will man die Äquivalenz mehrerer Aussagen beweisen, so verkürzt das Prinzip des Ringschlusses oft den Beweis. Im obigen Satz haben wir bewiesen, dass 4 Aussagen alle äquivalent sind. Indem wir die Implikationen

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$$

gezeigt haben, können wir nun ausgehend von jeder der vier Aussagen eine Folgerungskette zu jeder anderen der Aussagen herleiten. So gilt etwa die Implikation (iii) \Rightarrow (ii), da wir wissen, dass

$$(iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i) \Rightarrow (ii),$$

und damit insgesamt auch (iii) \Rightarrow (ii) gilt.

Dasselbe Prinzip funktioniert natürlich für beliebig viele Aussagen.

Wir können nun folgendes beweisen.

Satz 11.23 (Basisauswahlsatz). *Sei $V \neq \{0\}$ ein endlich erzeugter K -Vektorraum. Dann lässt sich aus einem beliebigen (endlichen) Erzeugendensystem von V eine Basis auswählen. Insbesondere besitzt V eine Basis.*

Beweis. Sei (v_1, \dots, v_n) ein Erzeugendensystem von V und nehmen wir $v_j \neq 0$ für alle j an. Wir setzen zunächst $\mathcal{B} = (v_1)$. Ist \mathcal{B} ein Erzeugendensystem von V , so haben wir eine Basis gefunden. Falls nicht, muss es ein $i \geq 1$ geben, das wir dann auch minimal wählen können, so dass (v_1, v_i) linear unabhängig ist. Wir setzen dann $\mathcal{B} = (v_1, v_i)$. Ist \mathcal{B} noch kein Erzeugendensystem von V , so muss es ein $j \geq i$ geben mit $v_j \notin \langle v_1, v_i \rangle$, d.h. (v_1, v_i, v_j) ist linear unabhängig und wir setzen $\mathcal{B} = (v_1, v_i, v_j)$.

Diesen Prozess können wir fortsetzen, bis \mathcal{B} ein Erzeugendensystem von V ist. Dann ist \mathcal{B} nach Definition eine Basis von V .

q.e.d.

Was wir mit demselben Beweis ebenfalls gezeigt haben, ist der folgende Satz.

Satz 11.24 (Basisergänzungssatz). *Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig. Ist \mathcal{B} kein Erzeugendensystem von V , so existieren $w_1, \dots, w_\ell \in V$, so dass $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_\ell)$ eine Basis von V ist.*

Bemerkung 11.25. Man vereinbart üblicherweise, dass der Nullraum $V = \{0\}$ ebenfalls eine Basis, nämlich die leere Menge \emptyset , besitzt. Man beachte hierbei, dass wir nicht etwa (0) als Basis wählen können, da (0) immer linear abhängig und damit keine Basis irgendeines Vektorraumes ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie man, v.a. im Fall des Standard-Raumes, praktisch aus einem gegebenen Erzeugendensystem eine Basis auswählt. Man kann im Prinzip der Methode im Beweis folgen, effizienter ist aber folgende Methode.

Verfahren 11.26.

INPUT: Ein Erzeugendensystem (v_1, \dots, v_n) eines Teilraumes $U \leq K^{m \times 1}$.

OUTPUT: Eine Basis von U .

ALGORITHMUS:

1. Definiere die Matrix $A \in K^{m \times n}$ deren Spalten genau die Vektoren (v_1, \dots, v_n) sind.
2. Bestimme die (strikte) Zeilenstufenform E von A mithilfe des GAUSS-Algorithmus 10.22.
3. Definiere $\mathcal{B} = (v_j : j \in \{1, \dots, n\}, \text{ so dass in Spalte } j \text{ von } E \text{ eine Stufe ist})$.
4. Gib \mathcal{B} aus.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass das Tupel \mathcal{B} aus dem Algorithmus tatsächlich eine Basis von U ist. Zunächst ist wegen der Struktur klar, dass die Stufenspalten in der Zeilenstufenform E eine Basis des **Spaltenraums** von E bilden, also des Teilraumes von $K^{m \times 1}$, der von den Spalten von E erzeugt wird. Bezeichnen wir die Spalten von E mit e_1, \dots, e_n und die Indizes der Stufenspalten seien j_1, \dots, j_r . Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt es also eindeutig bestimmte $\lambda_1^{(j)}, \dots, \lambda_r^{(j)} \in K$, so dass

$$e_j = \lambda_1^{(j)} e_{j_1} + \dots + \lambda_r^{(j)} e_{j_r}$$

gilt. Wenden wir nun eine beliebige elementare Zeilenoperation auf E an, so erhalten wir eine neue Matrix $F \in K^{m \times n}$, deren Spalten wir mit f_1, \dots, f_n bezeichnen. Man überlegt sich nun ohne große Schwierigkeiten, dass dann auch für jedes j die Gleichung

$$f_j = \lambda_1^{(j)} f_{j_1} + \dots + \lambda_r^{(j)} f_{j_r}$$

gilt (mit denselben $\lambda_i^{(j)}$ wie vorher!) und dass diese Darstellung wiederum eindeutig ist. Nach Satz 11.21 (iii) bilden damit die Vektoren $(f_{j_1}, \dots, f_{j_r})$ eine Basis des Spaltenraumes von F .

Da man durch endlich viele elementare Zeilenoperationen die Matrix E in A überführen kann (indem man die Schritte, um A auf die strikte Zeilenstufenform E zu bringen einfach in umgekehrter Reihenfolge invertiert) und sich in jedem Schritt nichts daran ändert, welche der Spalten eine Basis des Spaltenraumes bilden, folgt die Behauptung.

q.e.d.

Beispiel 11.27. Betrachten wir den Raum

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle \leq \mathbb{R}^{3 \times 1}.$$

Wie in Verfahren 11.26 beschrieben bestimmen wir nun die strikte Zeilenstufenform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[A(3,1,-3)]{A(2,1,-2)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow[A(3,2,6)]{M(2,-1/3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die ersten beiden Spalten enthalten eine Stufe, also bilden die ersten zwei Spalten von A eine Basis des Spaltenraumes von A , also von U .

Bemerkung 11.28. Elementare Zeilenoperationen ändern natürlich im allgemeinen den Spaltenraum selbst insgesamt, sie verändern nur nicht, welche der Spalten eine Basis für ihn bilden.

Wir kehren nun zum eigentlichen Hauptanliegen dieses Abschnittes zurück. Wir haben gezeigt, dass jeder (endlich erzeugte) Vektorraum eine Basis besitzt. Tatsächlich besitzt auch jeder nicht endlich erzeugte Vektorraum eine Basis, jedoch ist dies nur mithilfe des sogenannten **Auswahlaxioms** bzw. des (dazu äquivalenten) **Lemma von ZORN** zu beweisen.

Wir wollen nun noch beweisen, dass jede Basis eines endlich erzeugten Vektorraumes dieselbe Länge besitzt. Dazu benötigen wir zunächst das folgende Lemma.

Lemma 11.29 (Austauschlemma). Sei V ein K -Vektorraum, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und

$$w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$$

beliebig. Für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $\lambda_k \neq 0$ ist dann auch

$$\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n)$$

eine Basis von V .

Beweis. Wir dürfen annehmen, dass $w \neq 0$ und damit $\lambda_k \neq 0$ für mindestens ein k gilt, sonst ist nichts zu zeigen.

Dann ist \mathcal{B}' sicher ein Erzeugendensystem von V , denn wir haben

$$v_k = \frac{1}{\lambda_k} \left(w - \sum_{j \neq k} \lambda_j v_j \right).$$

Seien dann $\mu, \mu_1, \dots, \mu_{k-1}, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n \in K$ mit

$$\mu w + \sum_{j \neq k} \mu_j v_j = 0.$$

Nach Definition von W ergibt sich somit

$$\mu \lambda_k v_k + \sum_{j \neq k} (\mu_j + \mu \lambda_j) v_j = 0,$$

und da \mathcal{B} eine Basis und damit linear unabhängig ist, folgt $\mu\lambda_k = 0$ und damit wegen $\lambda_k \neq 0$ auch $\mu = 0$. Dann haben wir aber auch

$$\sum_{j \neq k} \mu_j v_j = 0,$$

also, wieder wegen der linearen Unabhängigkeit von \mathcal{B} , $\mu_j = 0$ für alle $j \neq k$. Somit ist auch \mathcal{B}' linear unabhängig und damit eine Basis von V .

q.e.d.

Hiermit können wir nun einen der wichtigsten Struktursätze der Linearen Algebra beweisen, den STEINITZschen Austauschatz.

Satz 11.30 (STEINITZscher Austauschatz). *Sei V ein K -Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V . Weiter seien $w_1, \dots, w_m \in V$ linear unabhängig. Dann gilt $m \leq n$ und es existieren Indizes i_1, \dots, i_m , so dass man durch Austauschen der Vektoren $v_{i_1} \leftrightarrow w_1, \dots, v_{i_m} \leftrightarrow w_m$ ebenfalls eine Basis von V erhält. Gegebenenfalls durch Umnummerierung erhält man also eine Basis $\mathcal{B}' = (w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$.*

Beweis. Da (w_1, \dots, w_m) linear unabhängig ist, gilt insbesondere $w_j \neq 0$ für alle j . Schreiben wir $w_j = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, so existiert damit ein $\lambda_{i_j} \neq 0$. Nach Lemma 11.29 können wir damit den Vektor v_{i_j} durch w_j austauschen und erhalten wieder eine Basis. Dies lässt sich natürlich sukzessive für alle w_j durchführen. Hierbei wählt man natürlich in jedem Schritt i_j so, dass der Vektor in der neuen Basis einer der ursprünglichen v_i ist. Dies ist immer möglich, da ansonsten die w_j linear abhängig wären.

Angenommen wir haben $m > n$. Dann erhalten wir, nachdem wir den Austauschprozess oben durchgeführt haben, ggf. durch Umsortieren, dass (w_1, \dots, w_n) eine Basis von V ist. Damit ist aber nach Satz 11.21 (iv) (w_1, \dots, w_m) linear abhängig, was ein Widerspruch ist, also muss wie behauptet $m \leq n$ gelten.

q.e.d.

Als direktes Korollar erhalten wir das folgende bereits angekündigte Resultat.

Korollar 11.31. *Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum. Dann haben alle möglichen Basen von V die gleiche Länge.*

Dies rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 11.32. Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum und \mathcal{B} eine beliebige Basis von V . Die Länge von \mathcal{B} nennen wir die **Dimension** von V , in Zeichen

$$\dim V := \#\mathcal{B}.$$

Beispiel 11.33. 1. Das Erzeugendensystem $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ des Standardraumes $K^{n \times 1}$ (vgl. Beispiel 11.15) ist offensichtlich linear unabhängig und damit eine Basis. Wir haben somit $\dim K^{n \times 1} = n$, wie man auch erwarten würde.

2. Eine Basis für den Raum $K[X]_{\leq n}$ der Polynome von Grad $\leq n$ ist offenbar gegeben durch

$$\mathcal{B} = (X^0 (= 1), X^1, \dots, X^n).$$

Damit gilt

$$\dim K[X]_{\leq n} = \#\mathcal{B} = n + 1.$$

3. Man sieht ebenfalls ohne Schwierigkeiten, dass eine Basis des Raumes $K^{m \times n}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{B} = (E^{(i,j)} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n),$$

wobei $E^{(i,j)} \in K^{m \times n}$ so definiert ist, dass der Eintrag an der Position (i, j) 1 ist und alle anderen Einträge 0 sind. Damit haben wir

$$\dim K^{m \times n} = \#\mathcal{B} = m \cdot n.$$

Ab sofort gehen wir davon aus, dass alle Vektorräume, mit denen wir es zu tun haben, endlich erzeugt sind, so lange nicht explizit etwas anderes angenommen wird.

11.3 Summen von Vektorräumen

In Proposition 11.7 and Bemerkung 11.8 haben wir gesehen, dass Schritte von Teilräumen eines Vektorraumes V wieder einen Teilraum dieses Vektorraumes bilden. Die analoge Aussage über Vereinigungen von Teilräumen ist (sehr drastisch) falsch. Die Rolle der Vereinigung übernimmt gewissermaßen die Summe von Teilräumen, die wir nun einführen wollen.

Definition 11.34. Sei V ein K -Vektorraum und $T, U \leq V$ Teilräume von V . Dann definieren wir die **Summe** von T und U als

$$T + U := \{t + u : t \in T, u \in U\}.$$

Analog definiert man auch die Summe endlich vieler Teilräume $U_1, \dots, U_m \leq V$,

$$U_1 + \dots + U_m := \{u_1 + \dots + u_m : u_j \in U_j\}.$$

Bemerkung 11.35. Man rechnet ohne Schwierigkeiten nach, dass die Summe von Teilräumen von V wieder ein Teilraum von V ist, der jeden seiner Summanden enthält. Insbesondere gilt

$$\dim(U_1 + \dots + U_m) \leq \dim V.$$

Man ist möglicherweise versucht zu meinen, dass die Dimensionen von Teilräumen sich addieren, wenn man ihre Summe betrachtet. Im Allgemeinen ist dies allerdings nicht der Fall, aber unter gewissen Zusatzannahmen schon, wie wir sehen werden.

Satz 11.36. Für einen K -Vektorraum V und Teilräume $T, U \leq V$ gilt

$$\dim(T + U) = \dim T + \dim U - \dim(T \cap U).$$

Beweis. Sei $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_\ell)$ eine Basis von $T \cap U$. Da $T \cap U$ sowohl ein Teilraum von T als auch von U ist, gibt es nach dem Basisergänzungssatz 11.24 $t_1, \dots, t_m \in T$ und $u_1, \dots, u_n \in U$, so dass

$$\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_\ell, t_1, \dots, t_m)$$

eine Basis von T und

$$\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_\ell, u_1, \dots, u_n)$$

eine Basis von U ist. Es gilt also $\dim T \cap U = \ell$, $\dim T = \ell + m$ und $\dim U = \ell + n$.

Dann ist

$$\mathcal{B}_3 = (v_1, \dots, v_\ell, t_1, \dots, t_m, u_1, \dots, u_n)$$

eine Basis von $T + U$, wie wir nun zeigen: Zunächst ist \mathcal{B}_3 klarerweise ein Erzeugendensystem von $T + U$. Seien dann $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, \mu_1, \dots, \mu_m, \nu_1, \dots, \nu_n \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^m \mu_j t_j + \sum_{k=1}^n \nu_k u_k = 0.$$

Für $u := \sum_{k=1}^n \nu_k u_k \in U$ gilt dann

$$u = -\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i v_i - \sum_{j=1}^m \mu_j t_j \in T,$$

also folgt $u \in T \cap U$. Da $\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_\ell, t_1, \dots, t_m)$ eine Basis von T ist, ist die Darstellung von T als Linearkombination eindeutig, woraus $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$ folgt. Genauso ist aber auch die Darstellung von u in der Basis \mathcal{B}_2 eindeutig, also folgt auch $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell = 0$, also $u = 0$. Da (u_1, \dots, u_n) linear unabhängig ist, folgt somit auch $\nu_1 = \dots = \nu_n = 0$ und \mathcal{B}_3 ist wie behauptet linear unabhängig und somit eine Basis von $T + U$.

Es folgt also

$$\dim(T + U) = \#\mathcal{B}_3 = \ell + m + n = (\ell + m) + (\ell + n) - \ell = \dim T + \dim U - \dim(T \cap U).$$

q.e.d.

Wir sehen also, dass wir genau dann $\dim(T + U) = \dim T + \dim U$ haben, wenn $T \cap U = \{0\}$ gilt. Für diesen wichtigen Sonderfall verwenden wir eine eigene Notation:

Definition 11.37. Sei V ein K -Vektorraum und $T, U \leq V$ mit $T \cap U = \{0\}$. Dann nennen wir den Raum

$$T \oplus U := T + U \leq V$$

die **direkte Summe** von T und U .

Eine nützliche Eigenschaft der direkten Summe halten wir fest.

Lemma 11.38. Sei V ein K -Vektorraum und $T, U \leq V$. Dann existieren genau dann für jedes $w \in W := T + U$ eindeutig bestimmte $t \in T$ und $u \in U$ mit $w = t + u$, wenn gilt $W = T \oplus U$, also $T \cap U = \{0\}$

Beweis. Sei $w \in W$ beliebig. Dann existieren $t \in T$ und $u \in U$ mit $w = t + u$.

Nehmen wir zunächst $T \cap U = \{0\}$ an. Gibt es zusätzlich $t' \in T$ und $u' \in U$ mit $w = t' + u'$, so folgt

$$t - t' = u' - u,$$

also $t - t' = u' - u \in T \cap U = \{0\}$, womit $t = t'$ und $u = u'$ und somit die Eindeutigkeit der Darstellung folgt.

Existiert andererseits ein $v \in (T \cap U) \setminus \{0\}$, so gilt $t + v \in T$ und $u - v \in U$, also haben wir

$$w = t + u = (t + v) + (u - v)$$

zwei verschiedene Darstellungen von W .

q.e.d.

Aus der Dimensionsformel in Satz 11.36 sehen wir zudem direkt folgendes.

Lemma 11.39. *Sei V ein K -Vektorraum und $T, U \leq V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $V = T \oplus U$

(ii) $V = T + U$ und $\dim V = \dim T + \dim U$.

Beweis. Gilt $V = T \oplus U$, so gilt $V = T + U$ und $T \cap U = \{0\}$, also folgt nach Satz 11.36 $\dim V = \dim T + \dim U - \dim(T \cap U) = \dim T + \dim U$.

Gilt andererseits $V = T + U$ und $\dim V = \dim T + \dim U$, so folgt nach derselben Formel $\dim(T \cap U) = 0$, also $T \cap U = \{0\}$.

q.e.d.

Kapitel 12

Lineare Abbildungen

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Abbildungen zwischen Vektorräumen, die die Struktur desselben respektieren, so genannte lineare Abbildungen.

12.1 Definition und Eigenschaften

Wir definieren zunächst die Klasse von Abbildungen, um die es in diesem Kapitel gehen soll.

Definition 12.1. Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine Abbildung. Dann heißt f eine **lineare Abbildung** oder ein **Homomorphismus** von K -Vektorräumen, wenn für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in K$ die Eigenschaften

$$(i) \quad f(v + w) = f(v) + f(w)$$

$$(ii) \quad f(\lambda v) = \lambda f(v)$$

erfüllt sind.

Die Menge aller linearen Abbildungen $f : V \rightarrow W$ bezeichnen wir mit

$$\text{Hom}(V, W) := \{f : V \rightarrow W : f \text{ linear}\}.$$

Bemerkung 12.2. Man kann Eigenschaften (i) und (ii) in Definition 12.1 zusammenfassen: Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ ist genau dann linear, wenn sie für alle $u, v \in V$ und $\lambda \in K$

$$f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

gilt.

Zunächst fassen wir einige wichtige Eigenschaften linearer Abbildungen in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 12.3. *Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ linear. Dann gelten folgende Aussagen.*

(i) *Es gilt $f(0) = 0$.*

(ii) *Für $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ und $v_1, \dots, v_m \in V$ gilt*

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_m f(v_m)$$

(iii) *Sind $v_1, \dots, v_m \in V$ linear abhängig, so sind auch $f(v_1), \dots, f(v_m) \in W$ linear abhängig.*

Beweis.

(i) Es gilt

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0).$$

Addieren wir auf beiden Seiten $-f(0)$, so ergibt sich wie behauptet $f(0) = 0$.

(ii) Folgt direkt aus der Definition mit Induktion.

(iii) Sind $v_1, \dots, v_m \in V$ linear abhängig, so existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, nicht alle 0, so dass $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ gilt. Dann folgt mit (i) und (ii) auch

$$0 = f(0) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_m f(v_m).$$

Damit haben wir auch eine nicht-triviale Linearkombination der $f(v_1), \dots, f(v_m)$ gefunden, die 0 ergibt, also folgt die Behauptung.

q.e.d.

Betrachten wir zunächst einige Beispiele.

Beispiel 12.4. 1. Betrachten wir \mathbb{R} als \mathbb{R} -Vektorraum und sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung. Sei $\alpha := f(1)$. Dann gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x \cdot 1) = x \cdot f(1) = \alpha x.$$

Alle linearen Abbildungen von \mathbb{R} nach \mathbb{R} haben also diese Form¹

2. In Bemerkung 10.27 haben wir bereits gesehen, dass für eine beliebige Matrix $A \in K^{m \times n}$, Spaltenvektoren $u, v \in K^{n \times 1}$ und $\lambda \in K$ stets

$$A \cdot (u + \lambda v) = A \cdot u + \lambda A \cdot v$$

¹Oft nennt man Abbildungen mit einer Vorschrift der Form $f(x) = \alpha x + \beta$ linear. Dies ist jedoch für $\beta \neq 0$ genau genommen nicht ganz korrekt, jedenfalls nicht nach Definition 12.1. Es handelt sich hierbei um eine **affine Abbildung**.

gilt. Damit ist die Abbildung

$$f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, v \mapsto A \cdot v$$

linear.

Aus gegebenen linearen Abbildungen lassen sich neue lineare Abbildungen konstruieren.

Lemma 12.5. (i) Seien V, W K -Vektorräume und $f, g \in \text{Hom}(V, W)$, sowie $\lambda \in K$. Dann gilt $f + g \in \text{Hom}(V, W)$ und $\lambda f \in \text{Hom}(V, W)$, $\text{Hom}(V, W)$ bildet also einen Vektorraum.

(ii) Seien U, V, W K -Vektorräume und $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verkettung

$$g \circ f : U \rightarrow W, u \mapsto g(f(u))$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Übung.

q.e.d.

Später benötigen wir folgende wichtige Beobachtung.

Satz 12.6. Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V .

(i) Die Abbildung f ist durch die Bilder $f(b_1), \dots, f(b_n)$ eindeutig bestimmt.

(ii) Sind umgekehrt $w_1, \dots, w_n \in W$ beliebig, so ist die Abbildung

$$g : V \rightarrow W, v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n \mapsto \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n$$

wohldefiniert und linear.

Beweis.

(i) Da \mathcal{B} eine Basis von V ist, lässt sich jedes $v \in V$ eindeutig als Linearkombination der b_j schreiben, $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$. Damit gilt wegen der Linearität von f

$$f(v) = f(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 f(b_1) + \dots + \lambda_n f(b_n).$$

Damit folgt aber direkt die Behauptung.

- (ii) Da die Darstellung $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ eindeutig ist, ist die Abbildung g wie behauptet wohldefiniert. Dass g zudem linear ist, rechnet man ohne Schwierigkeiten direkt nach.

q.e.d.

Wir erinnern uns an die Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv, die wir in Abschnitt 1.4 für allgemeine Abbildungen eingeführt haben (siehe Definition 1.36). Für lineare Abbildungen sind folgende Begriffe dann gebräuchlich.

Definition 12.7. Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- (i) Ist f injektiv, so nennen wir f auch einen **Monomorphismus**.
- (ii) Ist f surjektiv, so nennen wir f auch einen **Epimorphismus**.
- (iii) Ist f bijektiv, so nennen wir f auch einen **Isomorphismus**.

In diesem Zusammenhang sind folgende Begriffe ebenfalls nützlich.

Definition 12.8. Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung.

- (i) Wir nennen

$$\text{Bild}(f) := f(V) = \{f(v) : v \in V\}$$
 das **Bild** von f .
- (ii) Für $w \in W$ nennen wir $f^{-1}(\{w\}) \subseteq V$ das **Urbild** oder die **Faser** von w unter f (vgl. Definition 1.30).
- (iii) Wir nennen

$$\text{Kern}(f) := f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}$$
 den **Kern** von f .

Bemerkung 12.9. Haben wir

$$f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, v \mapsto A \cdot v$$

für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$, so gilt natürlich $\text{Kern}(f) = \text{Kern}(A)$. Weiterhin gilt $\text{Bild}(f) = \langle Ae_1, \dots, Ae_n \rangle$, $\text{Bild}(f)$ ist also genau der Spaltenraum der Matrix A (vgl. Satz 12.6).

Lemma 12.10. *Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ linear. Dann ist $\text{Bild}(f) \leq W$ ein Teilraum von W und $\text{Kern}(f) \leq V$ ein Teilraum von V .*

Beweis. Übung.

q.e.d.

Mittels dieser Begriffe können wir injektive bzw. surjektive Abbildungen klassifizieren.

Proposition 12.11. *Seien V, W K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:*

- (i) *f ist genau dann surjektiv, wenn $\text{Bild}(f) = W$ gilt.*
- (ii) *f ist genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt.*

Beweis.

(i) Dies ist genau die Definition von Surjektivität.

(ii) Sei zunächst f injektiv. Dann enthält nach Lemma 1.37 $\text{Kern}(f) = f^{-1}(\{0\})$ höchstens ein Element. Da nach Lemma 12.3 $f(0) = 0$ gilt, folgt also $\text{Kern}(f) = \{0\}$.

Sei umgekehrt $\text{Kern}(f) = \{0\}$ und seien $v, v' \in V$ mit $f(v) = f(v')$. Dann gilt

$$0 = f(v) - f(v') = f(v - v'),$$

also $v - v' \in \text{Kern}(f) = \{0\}$. Also folgt $v = v'$, so dass in der Tat f injektiv ist.

q.e.d.

Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Sätze in der linearen Algebra, dem Homomorphiesatz. Um diesen in voller Allgemeinheit zu formulieren, bräuchten wir eigentlich das Konzept des **Quotientenraums**, das wir hier jedoch nicht einführen wollen.

Satz 12.12 (Homomorphiesatz). Seien V, W K -Vektorräume, wobei V endlich erzeugt sei, und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Weiter sei (u_1, \dots, u_k) eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und (w_1, \dots, w_r) eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Wählen wir $v_1, \dots, v_r \in V$ beliebig, so dass $f(v_j) = w_j$, $j = 1, \dots, r$, gilt, so ist

$$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r)$$

eine Basis von V . Insbesondere gilt die Dimensionsformel

$$\dim V = \dim \text{Kern}(f) + \dim \text{Bild}(f).$$

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass \mathcal{B} linear unabhängig ist: Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_r \in K$ mit

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r = 0.$$

Setzen wir $u := \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k \in \text{Kern}(f)$. Dann folgt auch

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r) \\ &= f(u) + \mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_r f(v_r) = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_r w_r. \end{aligned}$$

Da (w_1, \dots, w_r) eine Basis von $\text{Bild}(f)$ und damit linear unabhängig ist, muss daher $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$ gelten. Das bedeutet aber, dass

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_k u_k = 0$$

gelten muss, also muss, da (u_1, \dots, u_k) eine Basis von $\text{Kern}(f)$ und damit linear unabhängig ist, auch $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ gelten. Damit ist auch B wie behauptet linear unabhängig.

Sei nun $v \in V$ beliebig. Dann gilt $f(v) \in \text{Bild}(f)$, also können wir

$$f(v) = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_r w_r = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_r f(v_r) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r)$$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in W$, schreiben. Setzen wir $v' = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$. Es gilt dann

$$0 = f(v) - f(v') = f(v - v'),$$

also haben wir $v - v' \in \text{Kern}(f)$, also $v - v' \in \langle u_1, \dots, u_k \rangle$. Nach Definition von v' folgt dann $v \in \langle u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_r \rangle$, so dass \mathcal{B} ein Erzeugendensystem von V ist. Damit folgt die Behauptung.

q.e.d.

Zusammen mit der Beobachtung, dass lineare Abbildungen durch die Bilder einer Basis eindeutig festgelegt sind (Satz 12.6) erhalten wir daraus folgendes Korollar.

Korollar 12.13. Seien V, W endlich erzeugte K -Vektorräume mit $\dim V = \dim W$ und sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) f ist injektiv.
- (ii) f ist surjektiv.
- (iii) f ist bijektiv.

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz 12.12 gilt $\dim V = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$. Nun ist f genau dann injektiv, wenn $\text{Kern}(f) = \{0\}$ gilt, also dann und nur dann, wenn $\dim(\text{Kern}(f)) = 0$ gilt. Das ist wiederum äquivalent dazu, dass $\dim(\text{Bild}(f)) = \dim(V) = \dim(W)$. Das ist aber genau dann der Fall, wenn f surjektiv ist.

q.e.d.

Wir führen zum Abschluss dieses Abschnittes noch einen wichtigen neuen Begriff ein.

Definition 12.14. Seien V, W endlich erzeugte K -Vektorräume und $f : V \rightarrow W$ linear. Dann heißt $\text{Rang}(f) := \dim(\text{Bild}(f))$ der **Rang** der Abbildung f .

Bemerkung 12.15. Ist $f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$, $v \mapsto A \cdot v$ für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$, dann ist $\text{Rang}(f)$ genau die Dimension des Spaltenraumes von A . Man spricht daher auch vom **Spaltenrang** der Matrix A . Analog definiert man auch den **Zeilenrang** von A . In der Tat gilt immer, dass der Spaltenrang und der Zeilenrang von A gleich sind, was die Bezeichnung $\text{Rang}(A)$ rechtfertigt. Dass Zeilenrang und Spaltenrang gleich sind, ist einerseits vielleicht nicht überraschend, aber andererseits nicht so offensichtlich zu beweisen wie man zunächst meinen könnte. Wir verzichten hier allerdings darauf.

12.2 Abbildungsmatrizen

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, dass einerseits jeder K -Vektorraum der Dimension n sich im Wesentlichen genauso verhält wie der Standardraum $K^{n \times 1}$, und andererseits wollen wir zeigen, dass wir so alle linearen Abbildungen durch Matrizen darstellen können.

Definition 12.16. Seien V, W K -Vektorräume. Dann heißen V, W **isomorph**, falls ein Isomorphismus $f : V \rightarrow W$ existiert. Wir schreiben dann $V \cong W$.

Satz 12.17. Sei V ein endlich erzeugter K -Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Dann existiert genau ein Isomorphismus

$$\Phi_{\mathcal{B}} : K^{n \times 1} \rightarrow V, \quad x \mapsto \Phi_{\mathcal{B}}(x)$$

mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e_1) = v_1, \dots, \Phi_{\mathcal{B}}(e_n) = v_n$, wobei e_1, \dots, e_n die Vektoren der Standardbasis von $K^{n \times 1}$ bezeichnen (siehe Beispiel 11.15).

Beweis. In Satz 12.6 haben wir bereits gesehen, dass es genau eine lineare Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}} : K^{n \times 1} \rightarrow V$ gibt mit $\Phi_{\mathcal{B}}(e_j) = v_j$. Es bleibt also lediglich zu zeigen, dass es sich hierbei um einen Isomorphismus handelt, dass $\Phi_{\mathcal{B}}$ also bijektiv ist. Dazu definieren wir die lineare Abbildung

$$\Psi : V \rightarrow K^{n \times 1},$$

indem wir $\Psi(v_j) = e_j$ festlegen und wir behaupten, dass Ψ die Umkehrabbildung zu $\Phi_{\mathcal{B}}$ ist.

Dazu sei zunächst $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} (\Psi \circ \Phi_{\mathcal{B}})(x) &= \Psi(\Phi_{\mathcal{B}}(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)) = \Psi(x_1 \Phi_{\mathcal{B}}(e_1) + \dots + x_n \Phi_{\mathcal{B}}(e_n)) \\ &= \Psi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = x_1 \Psi(v_1) + \dots + x_n \Psi(v_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = x. \end{aligned}$$

Genauso rechnet man für $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ nach, dass

$$(\Phi_{\mathcal{B}} \circ \Psi)(v) = v$$

gilt, also ist $\Psi = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}$ die Umkehrabbildung von $\Phi_{\mathcal{B}}$ und $\Phi_{\mathcal{B}}$ somit bijektiv.

q.e.d.

Als weitere wichtige Folgerung aus Satz 12.6 erhalten wir folgende Beobachtung.

Proposition 12.18. Sei $f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}$ eine lineare Abbildung. Dann existiert genau eine Matrix $A \in K^{m \times n}$, so dass für alle $x \in K^{n \times 1}$

$$f(x) = A \cdot x$$

gilt.

Beweis. Wir definieren die Matrix A , indem wir ihre Spalten als $f(e_1), \dots, f(e_n)$ festsetzen. Dann gilt für die Abbildung

$$f_A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, \quad x \mapsto A \cdot x$$

nach Konstruktion von A $f_A(e_j) = f(e_j)$. Da lineare Abbildungen durch Bilder einer Basis eindeutig festgelegt sind (Satz 12.6), sind die Abbildungen f und f_A gleich.

Auch die Eindeutigkeit von A folgt damit sofort, da jede Matrix B mit der gewünschten Eigenschaft, wieder wegen Satz 12.6 $B \cdot e_j = f(e_j)$ erfüllen muss.

q.e.d.

Hiermit erhalten wir folgendes Resultat.

Satz 12.19. *Seien V, W K -Vektorräume und sei $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V bzw. $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W . Dann existiert zu jeder linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ genau eine Matrix ${}_C f_{\mathcal{B}} \in K^{m \times n}$ mit Einträgen $a_{i,j} \in K$, so dass für alle $j = 1, \dots, n$ gilt:*

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i.$$

Beweis. Sei $j \in \{1, \dots, n\}$. Da \mathcal{C} eine Basis von W ist, existieren eindeutig bestimmte $a_{1,j}, \dots, a_{m,j} \in K$ mit

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i.$$

Dies definiert genau eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit Einträgen $a_{i,j}$, so dass die Behauptung folgt.

q.e.d.

Definition 12.20. Seien die Bezeichnungen wie in Satz 12.19. Dann nennen wir die Matrix ${}_C f_{\mathcal{B}} \in K^{m \times n}$ die **Abbildungsmatrix** von f bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} .

Satz 12.19 erlaubt es also, dass, sobald Basen der Vektorräume V und W festgelegt sind, man für jede lineare Abbildung eine eindeutige Matrix assoziieren kann. Wir formulieren dies noch einmal etwas anders.

Korollar 12.21. *Seien V, W K -Vektorräume mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Dann sind die Vektorräume $\text{Hom}(V, W)$ und $K^{m \times n}$ isomorph,*

$$\text{Hom}(V, W) \cong K^{m \times n}.$$

Beweis. Sei \mathcal{B} eine Basis von V und \mathcal{C} eine Basis von W . Dann ist die Abbildung

$$\varphi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow K^{m \times n}, f \mapsto {}_C f_{\mathcal{B}}$$

aus Satz 12.19 zunächst bijektiv, denn man sieht mit Satz 12.6 leicht ein, dass

$$\psi : K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}(V, W), \quad A = (a_{i,j}) \mapsto (f : V \rightarrow W, v_j \mapsto \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i)$$

die Umkehrabbildung von φ ist.

Wir zeigen noch, dass φ linear ist: Seien $f, g \in \text{Hom}(V, W)$ und $\lambda \in K$. Weiter seien $a_{i,j}, b_{i,j}$ die Einträge der Matrizen ${}_C f_{\mathcal{B}}$ bzw. ${}_C g_{\mathcal{B}}$. Dann gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$(f + \lambda g)(v_j) = f(v_j) + \lambda g(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} w_i + \lambda \sum_{i=1}^m b_{i,j} w_i = \sum_{i=1}^m (a_{i,j} + \lambda b_{i,j}) w_i,$$

das heißt, es gilt in der Tat

$$\varphi(f + \lambda g) = c(f + \lambda g)_{\mathcal{B}} = c f_{\mathcal{B}} + \lambda c g_{\mathcal{B}} = \varphi(f) + \lambda \varphi(g).$$

q.e.d.

Beispiel 12.22. 1. Sei $V = W = \mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ und wählen wir Basen $\mathcal{B} = \mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$.

Die Abbildung

$$f : V \rightarrow W, p \mapsto 2p + p' - Xp''$$

ist, wie man leicht nachrechnet, linear. Es gilt

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \cdot 1 + 0 - X \cdot 0 = 2 \cdot 1, & f(X) &= 2X + X' - X \cdot X'' = 1 + 2X, \\ f(X^2) &= 2X^2 + (X^2)' - X \cdot (X^2)'' = 2X^2, \\ f(X^3) &= 2X^3 + (X^3)' - X(X^3)'' = -3X^2 + 2X^3. \end{aligned}$$

Damit finden wir

$${}_B f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$$

2. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung

$$f : K^{3 \times 1} \rightarrow K^{2 \times 1}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 + 2v_2 - v_3 \\ v_2 + 2v_3 \end{pmatrix}$$

linear ist. Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $K^{3 \times 1}$ und $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2)$ die Standardbasis von $K^{2 \times 1}$. Dann gilt

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e'_1, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e'_1 + e'_2, \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -e'_1 + 2e'_2.$$

Damit können wir die Abbildungsmatrix bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} ablesen als

$${}_C f_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 3}.$$

Wählt man allerdings andere Basen, erhält man (in der Regel) auch eine andere Abbildungsmatrix. Wählen wir etwa die Basen

$$\mathcal{B}' = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C}' = \left(c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

so finden wir

$$f(b_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1, \quad f(b_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2c_1 + c_2, \quad f(b_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -c_1 + 3c_2,$$

also haben wir

$${}_{\mathcal{C}'} f_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

12.3 Matrixmultiplikation

Wie wir in Lemma 12.5 gesehen haben, sind Verkettungen von linearen Abbildungen wieder lineare Abbildungen. Mit Blick auf den letzten Abschnitt stellt sich die Frage, wie sich diese Verkettung auf Abbildungsmatrizen überträgt.

Satz 12.23. *Seien U, V, W K -Vektorräume und sei $\mathcal{A} = (u_1, \dots, u_p)$ eine Basis von U , $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ eine Basis von W . Weiter seien $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow W$ lineare Abbildungen mit Abbildungsmatrizen $B := {}_{\mathcal{B}} f_{\mathcal{A}} \in K^{n \times p}$ und $A := {}_{\mathcal{C}} g_{\mathcal{B}} \in K^{m \times n}$. Die Einträge der Matrizen A und B bezeichnen wir mit $a_{i,j}$ bzw. $b_{i,j}$.*

Dann gilt

$${}_C (g \circ f)_{\mathcal{A}} = C \in K^{m \times p}$$

mit Einträgen

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Beweis. Sei $j \in \{1, \dots, p\}$. Nach Definition ist dann die j -te Spalte von C gegeben durch

$$\begin{pmatrix} c_{1,j} \\ \vdots \\ c_{m,j} \end{pmatrix},$$

so dass $(g \circ f)(u_j) = \sum_{i=1}^m c_{i,j} w_i$ gilt. Nach Definition der Abbildungsmatrix gilt nun

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u_j) &= g(f(u_j)) = g\left(\sum_{k=1}^n b_{k,j} v_k\right) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} g(v_k) = \sum_{k=1}^n b_{k,j} \sum_{i=1}^m a_{i,k} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}\right) w_i. \end{aligned}$$

Da die Darstellung eines gegebenen Vektors bezüglich einer Basis eindeutig ist, folgt somit wie behauptet

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}.$$

q.e.d.

Satz 12.23 motiviert nun folgende Definition.

Definition 12.24. Seien $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times p}$ Matrizen mit Einträgen $a_{i,j}$ bzw. $b_{i,j}$. Dann definieren wir ihr **Produkt** als

$$A \cdot B := C$$

mit Einträgen

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Bemerkung 12.25. Speziell für $p = 1$ ist das Matrix-Produkt aus Definition 12.24 genau das Matrix-Vektor-Produkt, das wir bereits in Definition 10.8 eingeführt haben.

Beispiel 12.26. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}.$$

Das Produkt zweier Matrizen ist genau dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten der ersten Matrix genau die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix ist. Das heißt, es sind genau die folgenden Produkte von jeweils zweien der obigen Matrizen definiert:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 2 \\ 5 & -4 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad B \cdot C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -5 \\ -2 & 5 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 2},$$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Bemerkung 12.27. Schon aus der Definition des Matrixproduktes ist ersichtlich, dass es im Allgemeinen nicht kommutativ ist, dann wenn $A \cdot B$ definiert ist, ist es nicht unbedingt der Fall, dass $B \cdot A$ auch definiert ist (vgl. Beispiel 12.26). Gilt $A, B \in K^{n \times n}$, so sind stets $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert, aber auch dann gilt in der Regel $A \cdot B \neq B \cdot A$, denn etwa für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -10 \end{pmatrix}.$$

Durch den Zusammenhang mit linearen Abbildungen lassen sich die folgenden Aussagen über das Matrixprodukt leicht beweisen.

Lemma 12.28. Seien $A \in K^{m \times n}$, $B, B' \in K^{n \times p}$, $C \in K^{p \times q}$ Matrizen und $\lambda \in K$. Dann gilt

- (i) $A \cdot (B + \lambda B') = A \cdot B + \lambda A \cdot B'$
- (ii) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- (iii) Für die Einheitsmatrix I_m bzw. I_n (vgl. Definition 10.5) gilt $I_m \cdot A = A \cdot I_n = A$.

Beweis. Seien U, V, W, X endlich-dimensionale Vektorräume mit fest gewählten Basen und $f : W \rightarrow X$, $g, g' : V \rightarrow W$, $h : U \rightarrow V$ lineare Abbildungen. Dann gilt für alle $v \in V$

$$(f \circ (g + \lambda g'))(v) = f(g(v) + \lambda g'(v)) = f(g(v)) + \lambda f(g'(v)) = (f \circ g)(v) + \lambda (f \circ g')(v),$$

also haben wir die Gleichheit der Abbildungen

$$f \circ (g + \lambda g') = (f \circ g) + \lambda (f \circ g').$$

Genauso gilt für $u \in U$, dass

$$(f \circ (g \circ h))(u) = f((g \circ h)(u)) = f(g(h(u))) = (f \circ g)(h(u)) = ((f \circ g) \circ h)(u),$$

also

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h.$$

Der Übergang zu Abbildungsmatrizen liefert nach Satz 12.19 und Korollar 12.21 bzw. Satz 12.23 dann die Behauptungen für Matrizen. Für Teil (iii) ist zu beachten, dass die Einheitsmatrix (bezüglich jeder Basis) zur Identitätsabbildung

$$\text{id}_V : V \rightarrow V, \quad v \mapsto v$$

korrespondiert, das heißt für jede Basis \mathcal{B} von V gilt

$${}_{\mathcal{B}}(\text{id}_V)_{\mathcal{B}} = I_n.$$

q.e.d.

Bemerkung 12.29. Es wäre auch möglich, Lemma 12.28 direkt aus der Definition des Matrixproduktes zu zeigen, zumindest für das Assoziativgesetz (*ii*) erfordert es einige Anstrengung, den Überblick über die Indizes zu behalten.

Eine wichtige Operation für Matrizen, die eine etwas involviertere Entsprechung auf der Seite der linearen Abbildungen hat, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, ist die folgende:

Definition 12.30. Sei

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

eine $m \times n$ -Matrix. Dann heißt

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in K^{n \times m}$$

die zu A **transponierte** Matrix.

Beispiel 12.31. Man erhält die transponierte Matrix, indem man Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht: Für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

haben wir

$$A^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

Will man das Produkt zweier Matrizen transponieren, ist folgende Beobachtung wichtig.

Proposition 12.32. *Seien $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times p}$ Matrizen. Dann gilt*

$$(A \cdot B)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}.$$

Beweis. Wir setzen $C := A \cdot B \in K^{m \times p}$ und bezeichnen die Einträge der Matrizen wie üblich mit $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$. Den (i, j) -ten Eintrag von C^{tr} erhält man dann aus der Definition des Matrixproduktes als

$$c_{j,i} = \sum_{k=1}^n a_{j,k} \cdot b_{k,i}.$$

Der (i, j) -te Eintrag von $B^{tr} \cdot A^{tr}$ ist nach Definition gegeben durch

$$\sum_{k=1}^n b_{k,i} a_{j,k},$$

also folgt die Behauptung.

q.e.d.

Wir befassen uns nun noch etwas genauer mit quadratischen Matrizen, die also die gleiche Anzahl Zeilen und Spalten haben.

Satz 12.33. *Der Vektorraum $K^{n \times n}$ bildet mit der üblichen (eintragweisen) Matrix-Addition und Matrix-Multiplikation (vgl. Definition 12.24) einen **nicht-kommutativen Ring**, d.h. es gelten alle Eigenschaften aus Definition 3.1, außer dem Kommutativgesetz der Multiplikation (M1).*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 12.28 (Assoziativ- und Distributivgesetz, sowie Existenz der 1) und Beispiel 11.2 (Eigenschaften der Addition).

q.e.d.

Beispiel 12.34. Der Ring $K^{n \times n}$ enthält so genannte **Nullteiler**, d.h. es kann vorkommen, dass $A \cdot B = 0$ gilt, aber $A \neq 0$ und $B \neq 0$ ist, z.B. gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In einem Ring besitzt bekanntlich nicht unbedingt jedes Element ein multiplikativ Inverses. Diejenigen, die ein Inverses besitzen, nennt man **Einheiten**. Speziell im (nicht-kommutativen) Ring $K^{n \times n}$ haben die Einheiten einen eigenen Namen:

Definition 12.35. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt **invertierbar**, falls eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ existiert mit

$$A \cdot B = I_n.$$

Wir schreiben dann $B = A^{-1}$ und nennen B die zu A **inverse Matrix**.

Die Menge

$$\text{GL}_n(K) := \{A \in K^{n \times n} : A \text{ ist invertierbar}\}$$

der invertierbaren Matrizen nennt man auch die **generelle lineare Gruppe** vom Grad n über K .

Bemerkung 12.36. Man überlegt sich leicht, dass die inverse Matrix einer Matrix A , sofern diese existiert, eindeutig bestimmt ist, und dass auch $A^{-1} \cdot A = I_n$ gilt.

Invertierbare Matrizen können wir wie folgt charakterisieren.

Satz 12.37. Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.

- (i) A ist invertierbar.
- (ii) Die lineare Abbildung $f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}$, $v \mapsto A \cdot v$ ist bijektiv.
- (iii) Die Spalten von A bilden eine Basis von $K^{n \times 1}$.
- (iv) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
- (v) Die Spalten von A erzeugen den Raum $K^{n \times 1}$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Sei A^{-1} die inverse Matrix zu A . Betrachten wir dann die lineare Abbildung

$$g : K^{n \times 1} \rightarrow K^{n \times 1}, v \mapsto A^{-1} \cdot v.$$

Dann gilt für alle $v \in K^{n \times 1}$

$$(f \circ g)(v) = f(g(v)) = f(A^{-1} \cdot v) = A \cdot (A^{-1} \cdot v) = (A \cdot A^{-1}) \cdot v = I_n \cdot v = v$$

und

$$(g \circ f)(v) = g(f(v)) = g(A \cdot v) = A^{-1} \cdot (A \cdot v) = (A^{-1} \cdot A) \cdot v = I_n \cdot v = v,$$

also ist g die inverse Abbildung zu f und somit ist f bijektiv.

(ii) \Rightarrow (iii): Eine lineare Abbildung von $K^{n \times 1}$ in sich selbst ist genau dann bijektiv, wenn sie eine Basis auf eine Basis abbildet. Die Abbildung f bildet nach Definition die Standardbasis (e_1, \dots, e_n) von $K^{n \times 1}$ auf die Spalten von A ab, also folgt die Behauptung.

(iii) \Rightarrow (iv): Eine Basis ist nach Definition insbesondere linear unabhängig.

$(iv) \Rightarrow (v)$: Nach Voraussetzung sind die n Spalten von A linear unabhängig. Nach dem Basisergänzungssatz 11.24 kann man diese also zu einer Basis von $K^{n \times 1}$ ergänzen. Jede solche Basis hat aber genau n Einträge, also müssen die Spalten von A bereits eine Basis und damit ein Erzeugendensystem von $K^{n \times 1}$ bilden.

$(v) \Rightarrow (i)$: Nach Voraussetzung bilden die Spalten v_1, \dots, v_n von A ein Erzeugendensystem von $K^{n \times 1}$, d.h. für jeden Standardbasisvektor e_j , $j = 1, \dots, n$, existieren $b_{1,j}, \dots, b_{n,j} \in K$ mit

$$b_{1,j}v_1 + \dots + b_{n,j}v_n = e_j.$$

So definiert man eine Matrix $B \in K^{n \times n}$, so dass

$$A \cdot B = I_n$$

gilt, da e_1, \dots, e_n genau die Spalten der Einheitsmatrix sind. Damit ist A invertierbar.

q.e.d.

Mit Satz 12.37 erhält man auch direkt ein effizientes Verfahren, um inverse Matrizen zu bestimmen (bzw. zu erkennen, ob diese existieren oder nicht).

Verfahren 12.38 (GAUSS-JORDAN-Algorithmus).

INPUT: $A \in K^{n \times n}$

OUTPUT: A^{-1} , sofern existent.

Algorithmus:

1. Initiiere die erweiterte Matrix $(A|I_n)$.
2. Bestimme die strikte Zeilenstufenform E von $(A|I_n)$.
3. Ist E von der Form $(I_n|B)$ so gilt $B = A^{-1}$, gibt es eine Stufenspalte mit Index $> n$, so ist A nicht invertierbar.

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Beweis der Implikation $(v) \Rightarrow (i)$ in Satz 12.37.

q.e.d.

Beispiel 12.39. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

Wir wollen A^{-1} (sofern existent) mit Hilfe des GAUSS-JORDAN-Algorithmus bestimmen. Wir haben

$$\begin{aligned}
 (A|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[M(1,-1)]{P(1,3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[A(3,1,-4)]{A(2,1,-3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[P(2,3)]{M(2,-1/3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[A(1,2,1)]{A(2,3,2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -2/3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Wir lesen also ab, dass A invertierbar ist, und dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -2/3 & -1 \\ 1/2 & -2/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & -1 \end{pmatrix}$$

gilt.

Bemerkung 12.40. Speziell für 2×2 -Matrizen gibt es eine recht einfache Formel für die inverse Matrix, die man durch direktes Nachrechnen überprüft:

Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K^{2 \times 2}$ ist genau dann invertierbar, wenn die **Determinante** $\det(A) := ad - bc \neq 0$ ist. Dann haben wir

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Eine prinzipiell ähnliche, aber deutlich kompliziertere Formel gibt es auch für allgemeine $n \times n$ -Matrizen, diese nennt man dann CRAMER'sche Regel, die wir im zweiten Teil der Vorlesung genauer kennenlernen werden und die übrigens ursprünglich von LEIBNIZ gefunden wurde.

Zum Abschluss kehren wir noch einmal ganz an den Anfang dieses Teils der Vorlesung zurück und erinnern uns an die elementaren Zeilenumformungen (siehe Lemma 10.11). Diese lassen sich alle durch eine Matrixmultiplikation beschreiben.

Lemma 12.41. *Sei $A \in K^{m \times n}$ beliebig. Wendet man eine elementare Zeilenoperation auf A an, so ist das Ergebnis genau $T \cdot A$, wobei man $T \in K^{m \times m}$ aus der Einheitsmatrix I_m erhält, indem man die Zeilenoperation auf diese anwendet.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung anhand der Zeilenoperation $A(i, j, \alpha)$. Die behauptete Matrix T ist dann gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \alpha & \vdots \\ 0 & & & \dots & 1 \end{pmatrix} \in K^{m \times m},$$

wobei α genau an der Position (i, j) in T steht. Für $k \neq i$ ist die k -te Zeile der transformierten Matrix einfach die k -te Zeile von A , genau wie bei $T \cdot A$. Für $k = i$ ergibt sich für den ℓ -ten Eintrag der transformierten Matrix genau $a_{i,\ell} + \alpha a_{j,\ell}$, für den entsprechenden Eintrag in $T \cdot A$ haben wir

$$\sum_{r=1}^m t_{i,r} a_{r,\ell} = \alpha a_{j,\ell} + a_{i,\ell}.$$

Für die übrigen Zeilenoperationen zeigt man dies genauso.

q.e.d.

Definition 12.42. Die Matrizen T aus Lemma 12.41 nennt man **Elementarmatrizen**.

Für invertierbare Matrizen erhalten wir folgenden wichtigen Satz, der in gewisser Weise nichts anderes ist als eine Umformulierung des GAUSS-JORDAN-Algorithmus 12.38.

Satz 12.43. *Jede invertierbare Matrix $A \in \text{GL}_n(K)$ lässt sich als Produkt von endlich vielen Elementarmatrizen schreiben. Insbesondere sind alle Elementarmatrizen invertierbar.*

Beweis. Da jede elementare Zeilenoperation invertierbar ist und jedes Inverse wieder eine elementare Zeilenoperation ist, ist sofort klar, dass alle Elementarmatrizen invertierbar sind und ihr Inverses wieder eine Elementarmatrix ist.

Nach dem GAUSS-JORDAN-Algorithmus 12.38 und Lemma 12.41 existiert ein endliches Produkt B von Elementarmatrizen, sagen wir

$$B = T_N \cdot \dots \cdot T_1,$$

so dass

$$B \cdot (A|I_n) = (I_n|A^{-1})$$

gilt. Nach Definition des Matrixproduktes sieht man zudem ohne Schwierigkeiten ein, dass

$$B \cdot (A|I_n) = (B \cdot A|B \cdot I_n) = (B \cdot A|B).$$

Daraus ergibt sich direkt, dass $B = T_N \cdot \dots \cdot T_1 = A^{-1}$ gilt, also lässt sich A^{-1} als Produkt von Elementarmatrizen schreiben.

Betrachten wir nun die Matrix

$$C = T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_N^{-1}.$$

Diese ist offenbar ein Produkt von Elementarmatrizen und es gilt

$$\begin{aligned} C \cdot A^{-1} &= (T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_N^{-1}) \cdot (T_N \cdot \dots \cdot T_1) = (T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_{N-1}^{-1}) \cdot \underbrace{(T_N^{-1} \cdot T_N)}_{=I_n} \cdot (T_{N-1} \cdot \dots \cdot T_1) \\ &= (T_1^{-1} \cdot \dots \cdot T_{N-2}^{-1}) \cdot \underbrace{(T_{N-1}^{-1} \cdot T_{N-1})}_{=I_n} \cdot (T_{N-2} \cdot \dots \cdot T_1) = \dots = I_n. \end{aligned}$$

Damit folgt $C = (A^{-1})^{-1} = A$, also was wir behauptet hatten.

q.e.d.

Korollar 12.44. *Seien $A, B \in \text{GL}_n(K)$ invertierbare Matrizen. Dann ist auch $A \cdot B$ invertierbar und es gilt*

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Beweis. Wie wir im Beweis zu Satz 12.43 gesehen haben, ist jedes Produkt von Elementarmatrizen invertierbar. Nach Satz 12.43 lassen sich A und B beide als Produkte von Elementarmatrizen schreiben, damit wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation (vgl. Lemma 12.28) auch $A \cdot B$, so dass $A \cdot B$ in der Tat invertierbar ist.

Weiterhin gilt

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot \underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{=I_n} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n,$$

womit das Korollar bewiesen ist.

q.e.d.

Anhang A

Das Griechische Alphabet

Buchstabe	Name
A, α	Alpha
B, β	Beta
Γ, γ	Gamma
Δ, δ	Delta
E, ε	Epsilon
Z, ζ	Zeta
H, η	Eta
$\Theta, \theta/\vartheta$	Theta
I, ι	Iota
K, κ	Kappa
Λ, λ	Lambda
M, μ	My
N, ν	Ny
Ξ, ξ	Xi
O, o	Omikron
Π, π	Pi
$P, \rho/\varrho$	Rho
$\Sigma, \sigma/\varsigma$	Sigma
T, τ	Tau
Υ, υ	Ypsilon
$\Phi, \phi/\varphi$	Phi
X, χ	Chi
Ψ, ψ	Psi
Ω, ω	Omega

Anhang B

Ableitungen einiger wichtiger Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
$x^a, a \in \mathbb{R}$	ax^{a-1}
$\exp(x) = e^x$	$\exp(x) = e^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$
$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh(x)$
$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh(x)$
$\log(x)$	$\frac{1}{x}$
$\arcsin(x), -1 < x < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x), -1 < x < 1$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Stichwortverzeichnis

- äquivalent, 13
- CRAMER'sche Regel, 230
- DEDEKIND'scher Schnitt, 61
- EULER'sche Zahl, 102
- HILBERT-Hotel, 71
- KRONECKER-Delta, 179
- NEWTON-Verfahren, 129
- PASCAL'sches Dreieck, 42
- PEANO-Axiome, 35
- RUSSELSches Paradoxon, 21
- VENN-Diagramm, 19
- ZERMELO-FRAENKEL-Mengenlehre, 21

- Abbildung, 25
 - bijektiv, 28
 - Bild, 27
 - Definitionsbereich, 25
 - injektiv, 28
 - surjektiv, 28
 - Urbild, 27
 - Wertebereich, 25
- Abbildungsmatrix, 221
- Ableitung, 135
- Ableitungsregel
 - LEIBNIZ-Regel, 138
 - Kettenregel, 140
 - Produktregel, 138
 - Quotientenregel, 138
- Absolutbetrag, 63
- Additionstheoreme, 82
- Algorithmus
 - GAUSS-JORDAN-, 229
 - GAUSS-Algorithmus, 188
- Anordnungsaxiome, 55
- Argument, 80

- Aussage, 11
 - DE MORGAN'sche Regeln, 14
 - Kontraposition, 14
 - Verknüpfung, 12
 - Verneinung, 12
 - Wahrheitswert, 11
- Auswahlaxiom, 207

- Basis, 202
- Basisergänzungssatz, 205
- Binomialkoeffizient, 41
- Bisektion, 129

- Determinante, 230
- dicht, 63
- Differentialquotient, 135
- Dimension, 209
- Dimensionsformel, 210, 218

- Einheitswurzel, 84
 - primitive, 84
- Elementarmatrix, 231
- Epimorphismus, 216
- Erzeugendensystem, 199
- Erzeugnis, 197
- Exponentialdarstellung, 82

- Fakultät, 41
- Folge, 91
 - CAUCHY-Folge, 94
 - beschränkte, 92
 - divergente, 91
 - konvergente, 91
 - monoton wachsend/fallend, 100
 - Nullfolge, 91
 - streng monoton wachsend/fallend, 100
 - Teilfolge, 97

- Folgerung, 13
- Funktion
- DIRICHLET-Funktion, 122
 - HEAVISIDE-Funktion, 122
 - WEIERSTRASS-Funktion, 137
 - Cosinus-Funktion, 154
 - Cotangens-Funktion, 154
 - differenzierbare, 135
 - Exponentialfunktion, 118
 - Logarithmus-Funktion, 153
 - Sinus-Funktion, 154
 - Tangens-Funktion, 154
- Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, 151
- generelle lineare Gruppe, 228
- goldener Schnitt, 96
- Grenzwert (Funktionen), 135
- Häufungspunkt (Folge), 96
- Häufungspunkt (Menge), 134
- Homomorphismus, 213
- imaginäre Einheit, 75
- Imaginärteil, 75
- Induktionsprinzip, 36
- Infimum, 59
- Integrationstechnik
- 1. Substitutionsregel, 170
 - 2. Substitutionsregel, 172
 - logarithmische Integration, 171
 - partielle Integration, 169
- Intervall, 66
- abgeschlossenes, 66
 - halboffenes, 66
 - offenes, 66
 - unbeschränktes, 66
- Inverse, 30
- isomorph, 219
- Isomorphismus, 216
- Körper, 50
- angeordneter, 55
 - archimedisch angeordnet, 55
 - vollständiger, 60
- Kardinalität=Mächtigkeit, 69
- kartesisches Produkt, 22
- Kern, 190
- Koeffizientenmatrix, 178
- erweiterte, 178
- konjugiert komplexe Zahl, 77
- Konvergenz
- absolute, 113
 - bedingte, 113
 - Folgen-, 91
 - Reihen-, 106
- Konvergenzkriterium
- CAUCHY-Kriterium, 94
 - CAUCHYKriterium für Reihen, 109
 - LEIBNIZ-Kriterium, 111
 - Majorantenkriterium, 114
 - Monotonie-Kriterium, 100
 - Monotoniekriterium für Reihen, 110
 - Quotientenkriterium, 114
 - Sandwich-Lemma, 103
 - Teilfolgen-Kriterium, 98
 - Wurzelkriterium, 116
- Kriterium
- ε - δ -Kriterium, 121
 - Folgenkriterium, 123
- Lemma
- Austauschlemma, 207
 - von ZORN, 207
- linear abhängig, 200
- linear unabhängig, 200
- lineare Abbildung, 213
- Bild, 216
 - Faser, 216
 - Kern, 216
 - Rang, 219
- lineares Gleichungssystem, 177
- homogenes, 190
 - inhomogenes, 190
- Linearkombination, 197
- Linksinverse, 30
- lokales Extremum, 143
- lokales Maximum, 143
- lokales Minimum, 143

- Mächtigkeit=Kardinalität, 69
- Matrix, 179
- Diagonalmatrix, 179
 - Dreiecksmatrix, 179
 - Einheitsmatrix, 179
 - inverse, 228
 - invertierbar, 228
 - Nullmatrix, 179
 - Produkt, 224
 - quadratische, 179
 - Rang, 219
 - Spaltenrang, 219
 - Spaltenraum, 206
 - transponierte, 226
 - Zeilenrang, 219
- Matrix-Vektor-Produkt, 181
- Maximum, 59
- Menge, 16
- Antinomie, 21
 - Differenz, 18
 - disjunkt, 18
 - Durchschnitt, 18
 - Element, 16
 - endlich, 69
 - leere Menge, 17
 - Teilmenge, 17
 - Vereinigung, 17
- Minimum, 59
- Monomorphismus, 216
- Nenner, 49
- Nullstelle, 83
- Nullteiler, 49
- obere Schranke, 59
- Ordnung, 24
- Totalordnung, 24
- Paar
- geordnetes, 22
- Partialbruchzerlegung, 173
- Partiellsumme, 106
- Pivot-Element, 183
- Polardarstellung, 80
- Polynom, 83, 194
- Grad, 194
- Potenz
- allgemeine, 153
- Potenzmenge, 20
- Quantor
- All-Quantor, 15
 - Existenz- und Eindeutigkeits-Quantor, 15
 - Existenz-Quantor, 15
- Realteil, 75
- Rechtsinverse, 30
- Reihe, 106
- LEIBNIZ-, 112
 - allgemeine harmonische, 111
 - alternierende, 111
 - geometrische, 107
 - harmonische, 108
- Relation, 22
- Äquivalenzklasse, 23
 - Äquivalenzrelation, 23
 - antisymmetrisch, 24
 - reflexiv, 23
 - symmetrisch, 23
 - transitiv, 23
 - Vertretersystem, 23
- Restklasse, 22
- Ring, 48
- Ringschluss, 204
- Satz
- RIEMANNscher Umordnungssatz, 117
 - STEINITZscher Austauschatz, 208
 - CANTOR-BERNSTEIN-Theorem, 72
 - Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, 155
 - Basisauswahlsatz, 205
 - Binomischer Lehrsatz, 42
 - Erweiterter Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 148
 - Fundamentalsatz der Algebra, 83
 - Grenzwertsätze, 93

- Homomorphiesatz, 218
- Mittelwertsatz der Differentialrechnung, 145
- Mittelwertsatz der Integralrechnung, 165
- Monotoniekriterium (Funktionen), 146
- Nullstellensatz von BOLZANO, 128
- Regel von DE L'HOSPITAL, 149
- von BOLZANO-WEIERSTRASS, 104
- von EULER-DE MOIVRE, 82
- von ROLLE, 143
- von WEIERSTRAS, 130
- Zwischenwertsatz, 127
- Sekante, 133
- Stetigkeit, 121
- Stufe, 183
- Summe
 - geometrische, 40
- Supremum, 59
- Tangente, 133
- Transversale, 22
- Umkehrabbildung, 30
- Unbekannte (=Variable), 177
- unendlich
 - überabzählbar, 69
 - abzählbar, 69
- Ungleichung
 - BERNOULLI-, 57
 - Dreiecks-, 65
 - umgekehrte Dreiecks-, 65
- untere Schranke, 59
- Variable (=Unbekannte), 177
- Vektor, 179, 194
 - Spaltenvektor, 179
 - Zeilenvektor, 179
- Vektorraum, 194
 - direkte Summe, 211
 - endlich erzeugt, 199
 - Nullraum, 196
 - Standardraum, 194
 - Summe, 210
- Teilraum, 196
- Wahrheitstafel, 12
- Zähler, 49
- Zahlen
 - ganze, 47
 - irrationale, 53
 - natürliche, 35
 - rationale, 49
- Zeilenoperation
 - elementare, 182
- Zeilenstufenform, 183
 - reduzierte (=strikte), 183
 - strikte (=reduzierte), 183

Symbolverzeichnis

(a, b)	offenes Intervall von a bis b , S. 66
$(a, b], [a, b)$	halboffenes Intervall von a bis b , S. 66
$(a_n)_n$	Folge mit Folgengliedern a_n für $n \in \mathbb{N}$, S. 93
$[a, b]$	abgeschlossenes Intervall von a bis b , S. 66
\arg	Argument einer komplexen Zahl, S. 82
$\binom{n}{k}$	Binomialkoeffizient, S. 41
\cap, \bigcap	Durchschnitt von Mengen, S. 17
$\complement_M N$	Komplement der Menge N in M , S. 17
\cong	Isomorphie, S. 225
$\cos(x)$	Cosinus von x , S. 157
$\cot(x)$	Cotangens von x , S. 157
\cup, \bigcup	Vereinigung von Mengen, S. 17
$\deg f$	Grad eines Polynoms f , S. 200
$\delta_{i,j}$	KRONECKER-Delta, S. 185
$\dim V$	Dimension des Vektorraums V , S. 215
e	EULERSche Zahl, $e = 2,71828\dots$, S. 104
\emptyset	leere Menge, S. 17
\exists	Existenz-Quantor, es existiert ein ..., S. 15
$\exists!$	Existenz- und Eindeutigkeits-Quantor, es existiert genau ein ..., S. 15
$\exp(x), e^x$	Exponentialfunktion in x , S. 120
\forall	All-Quantor, für alle ..., S. 15

$GL_n(K)$	generelle lineare Gruppe vom Grad n über K , S. 234
$\text{Hom}(V, W)$	Menge der linearen Abbildungen $f : V \rightarrow W$, S. 219
Im	Imaginärteil einer komplexen Zahl, S. 75
\in	Element-Symbol, der Mengenlehre S. 16
\inf	Infimum, S. 58
$\text{Kern}(A)$	Kern der Matrix A , S. 196
\Leftarrow	Folgerungspfeil, „wenn, dann“, S. 13
\Leftrightarrow	Äquivalenz von Aussagen, „genau dann, wenn“, S. 13
$[\cdot]$	untere GAUSS-Klammer, S. 93
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Grenzwert der Folge $(a_n)_n$, S. 93
$\lim_{x \nearrow x_0}$	unterer Funktionengrenzwert, S. 137
$\lim_{x \searrow x_0}$	oberer Funktionengrenzwert, S. 137
$\lim_{x \rightarrow x_0}$	Funktionengrenzwert, S. 137
$\log x$	(natürlicher) Logarithmus von $x > 0$, S. 156
\max	Maximum, S. 58
\min	Minimum, S. 58
\mathbb{N}	natürliche Zahlen, S. 17
\mathbb{N}_0	natürliche Zahlen mit 0, S. 17
\neg	logische Verneinung, S. 12
\bar{z}	komplex konjugierte Zahl zu z , S. 77
$\mathfrak{P}ot$	Potenzmenge, S. 21
$\prod_{k=m}^n a_k$	Produktschreibweise, $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_{n-1} \cdot a_n$, S. 38
\mathbb{Q}	rationale Zahlen, S. 17
\mathbb{R}	reelle Zahlen, S. 17
$\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{\geq 0}$	Menge der positiven bzw. nicht-negativen reellen Zahlen, S. 32
Re	Realteil einer komplexe Zahl, S. 75

\setminus	Mengendifferenz, „ohne“, S. 17
$\sin(x)$	Sinus von x , S. 157
\subseteq	Teilmengensymbol der Mengenleere, S. 17
$\sum_{k=m}^n a_k$	Summenschreibweise, $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{n-1} + a_n$, S. 38
\sup	Supremum, S. 58
$\tan(x)$	Tangens von x , S. 157
\vee	logische „oder“-Verknüpfung, S. 12
\wedge	logische „und“-Verknüpfung, S. 12
\mathbb{Z}	ganze Zahlen, S. 17
$A(i, j, \alpha)$	elementare Zeilenoperation: Addiere zur i -ten Zeile das α -fache der j -ten Zeile, S. 187.
A^{tr}	Transponierte der Matrix A , S. 232
e_j	Standardbasis-Vektor in $K^{n \times 1}$, S. 205
f'	Ableitung einer Funktion f , S. 138
$f \circ g$	Verkettung der Abbildungen f und g , S. 28
I_n	$n \times n$ -Einheitsmatrix, S. 185
$K[X]$	Polynome in X über dem Körper K , S. 200
$K[X]_{\leq n}$	Polynome in X über K vom Grad $\leq n$, S. 202
$K^{m \times n}$	Raum der $m \times n$ -Matrizen (m Zeilen, n Spalten) mit Einträgen in K , S. 185
$M(i, \alpha)$	elementare Zeilenoperation: Multipliziere Zeile i mit $\alpha \neq 0$, S. 187.
$n!$	Fakultät, $1 \cdot \dots \cdot n$, S. 41
N^M	Menge aller Abbildungen von M nach N , S. 26
$P(i, j)$	elementare Zeilenoperation: Vertausche Zeilen i und j , S. 187.
${}_C f_B$	Abbildungsmatrix der linearen Abbildung f bzgl. der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} , S. 227

Namensverzeichnis

- ABEL, NIELS HENRIK
1802 – 1829, 84
- ARCHIMEDES VON SYRAKUS
um 287 v. Chr. – 212 v. Chr., 55,
157
- BERNOULLI, DANIEL
1700 – 1782, 90
- BERNOULLI, JAKOB I.
1655 – 1705, 57
- BINET, JACQUES PHILIPPE MARIE
1786 – 1856, 90
- BOLZANO, BERNARDUS PLACIDUS JOHANN NEPOMUK
1781 – 1848, 104, 127
- CANTOR, GEORG FERDINAND LUDWIG PHILIPP
1845 – 1918, 16, 71
- CARDANO, GEROLAMO
1501 – 1576, 84
- CAUCHY, AUGUSTIN-LOUIS
1789 – 1857, 89, 144, 166
- CONWAY, JOHN HORTON
1937 – 2020, 54
- CRAMER, GABRIEL
1704 – 1752, 230
- DARBOUX, JEAN GASTON,
1842 – 1917, 159
- DEDEKIND, JULIUS WILHELM RICHARD
1831 – 1916, 60
- DESCARTES, RENÉ
1596 – 1650, 22
- DIRICHLET, PETER GUSTAV LEJEUNE
1805 – 1859, 122
- EULER, LEONHARD
1707–1783, 82, 110
- FERRARI, LODOVICO
1522 – 1565, 84
- FRAENKEL, ADOLF ABRAHAM HALEVI
1891 – 1965, 21
- GAUSS, CARL FRIEDRICH
1777 – 1855, 40, 83, 91, 183
- GREGORY, JAMES
1638 – 1675, 166
- HEAVISIDE, OLIVER
1850 – 1925, 122
- HILBERT, DAVID
1862 – 1943, 71
- HIPPASOS von Metapont
spätes 6. – frühes 5. Jhd. v. Chr.,
53
- JORDAN, WILHELM
1842 – 1899, 229
- KURATOWSKI, KAZIMIERZ
1896–1980, 22
- L'HOSPITAL, GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE, Marquis de
1661 – 1704, 148
- LAGRANGE, JOSEPH-LOUIS DE
1736 – 1813, 144
- LEBESGUE, HENRI LÉON
1875 – 1941, 164
- LEIBNIZ, GOTTFRIED WILHELM
1646 – 1716, 89, 111, 138, 157,
166, 230
- MENGOLI, PIETRO
1626–1686, 110
- NEWTON, Sir ISAAC
1643 – 1727, 89, 129, 157, 166
- PASCAL, BLAISE
1623 – 1662, 42

- PEANO, GIUSEPPE
1858 – 1932, 35
- PYTHAGORAS von Samos
um 570 v. Chr. – nach 510 v. Chr.,
53, 78
- RIEMANN, GEORG FRIEDRICH BERNHARD
1826 – 1866, 117, 157
- ROLLE, MICHEL
1652 – 1719, 143
- RUFFINI, PAOLO
1765 – 1822, 84
- RUSSEL, BERTRAND ARTHUR WILLIAM,
3rd Earl Russel
1872–1970, 21
- STEINITZ, ERNST
1871 – 1928, 208
- TARTAGLIA, NICCOLÒ
1499 oder 1500 – 1557, 84
- TENNENBAUM, STANLEY
1927 – 2005, 54
- VENN, JOHN
1834–1923, 19
- WEIERSTRASS, KARL THEODOR WIL-
HELM
1815 – 1897, 89, 104, 129, 137
- ZERMELO, ERNST FRIEDRICH FERDINAND
1871 – 1953, 21
- ZORN, MAX AUGUST
1906 – 1993, 207
- D’ALEMBERT, JEAN-BAPTISTE LE ROND
1717 – 1783, 83
- DA PISA, LEONARDO, gen. FIBONACCI
um 1170 – nach 1240, 47, 90
- DE MOIVRE, ABRAHAM
1667 – 1754, 82, 90
- DE MORGAN, AUGUSTUS
1806 – 1871, 14
- DEL FERRO, SCIPIONE
1465 – 1526, 84
- VON NEUMANN, JOHN
1903 – 1957, 36
- VON ORESME, NIKOLAUS
vor 1330 – 1382, 109