Dichteste Kugelpackungen

Michael H. Mertens

Max-Planck-Institut für Mathematik Bonn

Habilitationsvortrag an der Universität zu Köln

16. Januar 2020

1 Einführung

2 Die Kepler-Vermutung

3 Kugelpackungen in 8 und 24 Dimensionen

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung
2. Die Kepler-Vermutung
3. Kugelpackungen in 8 und 24 Dimensionen

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Frage: Wieviele Bonbons sind in dem Glas?

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Frage: Wieviele Bonbons sind in dem Glas?
Mögliche Lösungen:

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Frage: Wieviele Bonbons sind in dem Glas?
Mögliche Lösungen:

- Zählen

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Frage: Wieviele Bonbons sind in dem Glas?
Mögliche Lösungen:

- Zählen dauert zu lange, nicht erlaubt

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Frage: Wieviele Bonbons sind in dem Glas?
Mögliche Lösungen:

- Zählen dauert zu lange, nicht erlaubt
- Dividiere Volumen des Glases durch Volumen eines Bonbons

Ein Jahrmarktsgewinnspiel

Frage: Wieviele Bonbons sind in dem Glas?
Mögliche Lösungen:

- Zählen dauert zu lange, nicht erlaubt
- Dividiere Volumen des Glases durch Volumen eines Bonbons
  Es ist auch Luft im Glas, aber wieviel (mindestens)?

Etwas abstrakter

Modell:

- Bonbons $\rightsquigarrow$ Kugeln mit gleichem, konstanten Radius
- Glas $\rightsquigarrow$ Kugel, deren Radius immer größer wird.

Etwas abstrakter

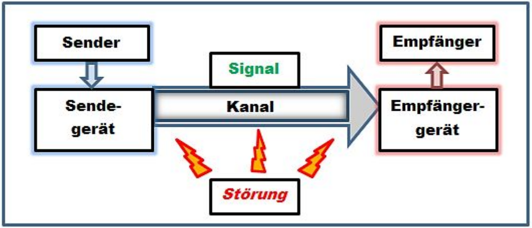
Modell:

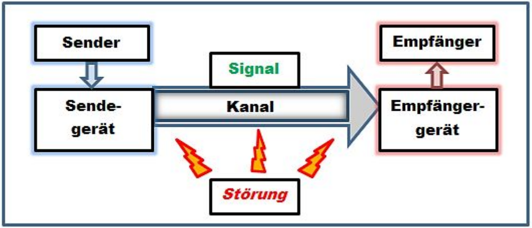
- Bonbons $\rightsquigarrow$ Kugeln mit gleichem, konstanten Radius
- Glas $\rightsquigarrow$ Kugel, deren Radius immer größer wird.

Kugelpackungsproblem

Wie müssen die kleinen Kugeln angeordnet werden (ohne zu überlappen), so dass die große Kugel möglichst wenig leeren Raum enthält? Wie groß ist die Dichte?

Kodierungstheorie

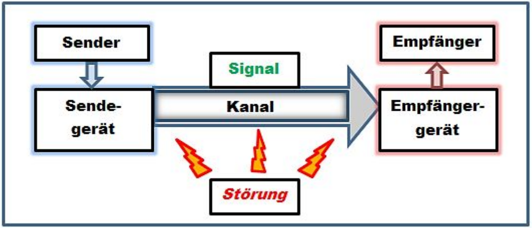




Kommunikationsmodell

- Einfaches Kommunikationsmodell: Ein Sender schickt ein Signal über einen Kanal an einen Empfänger

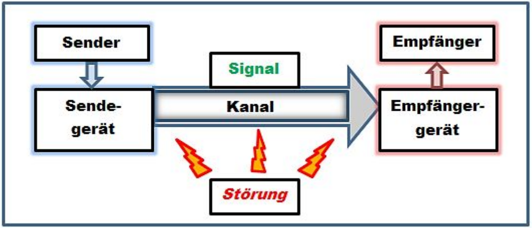
Kodierungstheorie



Kommunikationsmodell

- Einfaches Kommunikationsmodell: Ein Sender schickt ein Signal über einen Kanal an einen Empfänger
- Signal muss kodiert werden (z.B. als elektrisches Signal) und nach Übermittlung dekodiert werden

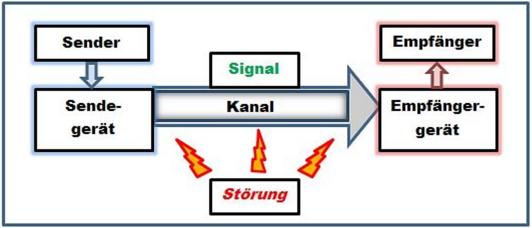
Kodierungstheorie



Kommunikationsmodell

- Einfaches Kommunikationsmodell: Ein Sender schickt ein Signal über einen Kanal an einen Empfänger
- Signal muss kodiert werden (z.B. als elektrisches Signal) und nach Übermittlung dekodiert werden
- Kanal hat möglicherweise Störungen

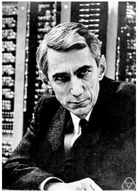
Kodierungstheorie

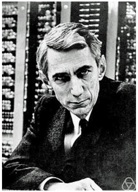


Kommunikationsmodell

- Einfaches Kommunikationsmodell: Ein Sender schickt ein Signal über einen Kanal an einen Empfänger
- Signal muss kodiert werden (z.B. als elektrisches Signal) und nach Übermittlung dekodiert werden
- Kanal hat möglicherweise Störungen
- Gestörte Nachricht rekonstruieren $\rightsquigarrow$ fehlerkorrigierende Codes

Codes und Kugelpackungen

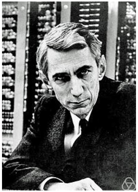




Satz (C. Shannon, 1948)

Ein Signal mit einer Bandbreite von W Hz, dessen Energie hauptsächlich in einem Zeitintervall von T s konzentriert ist, kann akkurat durch $2WT$ Sample-Punkte repräsentiert werden.

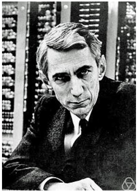
Codes und Kugelpackungen



Satz (C. Shannon, 1948)

Ein Signal mit einer Bandbreite von W Hz, dessen Energie hauptsächlich in einem Zeitintervall von T s konzentriert ist, kann akkurat durch $2WT$ Sample-Punkte repräsentiert werden (Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2WT$).

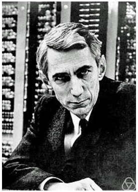
Codes und Kugelpackungen



Satz (C. Shannon, 1948)

Ein Signal mit einer Bandbreite von W Hz, dessen Energie hauptsächlich in einem Zeitintervall von T s konzentriert ist, kann akkurat durch $2WT$ Sample-Punkte repräsentiert werden (Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2WT$).

- Signale (bzw. die zugehörigen Vektoren) brauchen bestimmten Mindestabstand, um nach Störung rekonstruierbar zu sein

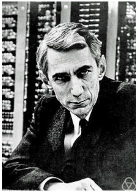


Satz (C. Shannon, 1948)

Ein Signal mit einer Bandbreite von W Hz, dessen Energie hauptsächlich in einem Zeitintervall von T s konzentriert ist, kann akkurat durch $2WT$ Sample-Punkte repräsentiert werden (Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2WT$).

- Signale (bzw. die zugehörigen Vektoren) brauchen bestimmten Mindestabstand, um nach Störung rekonstruierbar zu sein
  $\rightsquigarrow$ Dichteste Kugelpackungen

Codes und Kugelpackungen



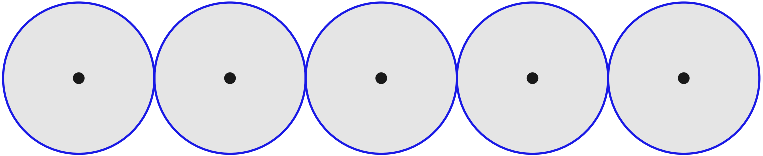
Satz (C. Shannon, 1948)

Ein Signal mit einer Bandbreite von W Hz, dessen Energie hauptsächlich in einem Zeitintervall von T s konzentriert ist, kann akkurat durch $2WT$ Sample-Punkte repräsentiert werden (Vektor in $\mathbb{R}^n$ mit $n = 2WT$).

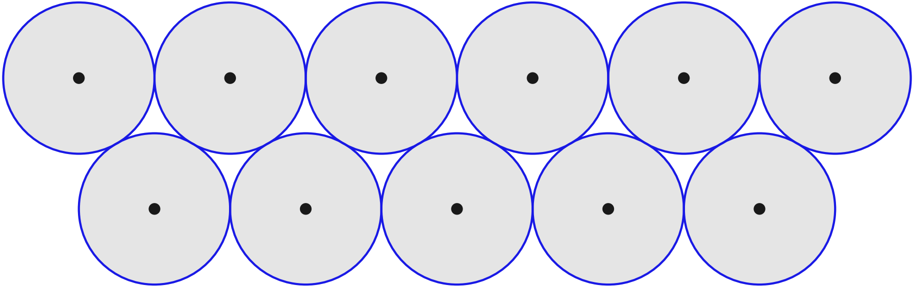
- Signale (bzw. die zugehörigen Vektoren) brauchen bestimmten Mindestabstand, um nach Störung rekonstruierbar zu sein
  $\rightsquigarrow$ Dichteste Kugelpackungen
- Gute fehlerkorrigierende Block-Codes liefern dichte Kugelpackungen (N. J. A. Sloane und andere)

Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung I

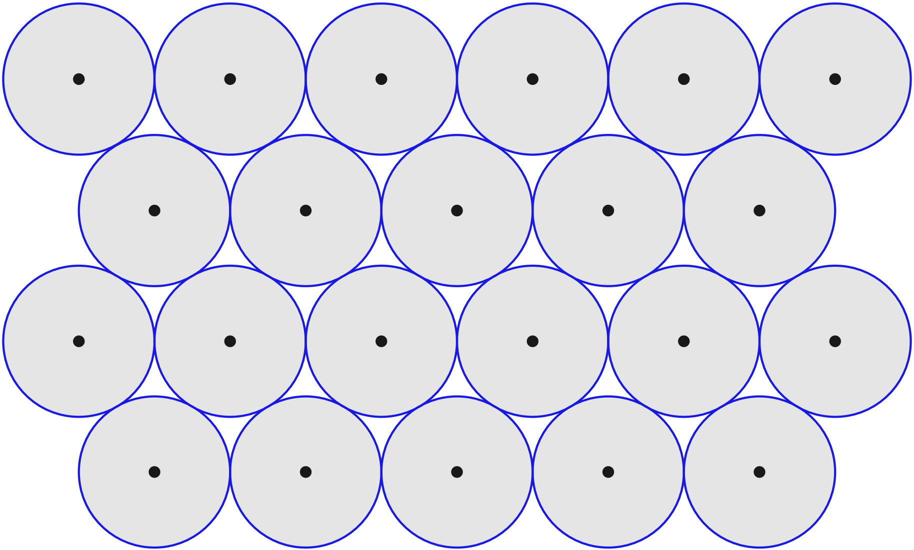
Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung I



Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung I



Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung I



Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung II

Einige Eigenschaften

- Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.90689.$

Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung II

Einige Eigenschaften

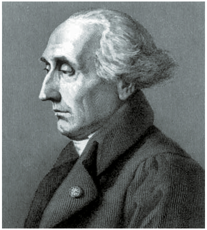
- Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.90689$.
- Mittelpunkte der Kugeln bilden das sogenannte Sechseck-Gitter, auch bekannt als A_2 (bis auf Reskalierung).

Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung II

Einige Eigenschaften

- Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.90689$.
- Mittelpunkte der Kugeln bilden das sogenannte Sechseck-Gitter, auch bekannt als A_2 (bis auf Reskalierung).
- eindeutige Lösung

Dichteste 2-dimensionale Kugelpackung II

Einige Eigenschaften

- Dichte $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.90689$.
- Mittelpunkte der Kugeln bilden das sogenannte Sechseck-Gitter, auch bekannt als A_2 (bis auf Reskalierung).
- eindeutige Lösung
- lange bekannt (A. Thue (1892), möglicherweise schon bei J.-L. Lagrange (1773), rigoroser Beweis von L. Fejes Tóth (1943))

Verschiedene Arten von Kugelpackungen I

Gitterpackungen

- Mittelpunkte bilden ein Gitter (algebraische Struktur)

Verschiedene Arten von Kugelpackungen I

Gitterpackungen

- Mittelpunkte bilden ein Gitter (algebraische Struktur)
- Dichteste Gitterpackungen zu finden ist im Prinzip algorithmisch lösbar (A. N. Korkin und J. I. Solotarjow (1873), G. F. Voronoj (1908)), aber nur in kleinen Dimensionen (≤ 8) praktisch durchführbar.

Verschiedene Arten von Kugelpackungen I



Gitterpackungen

- Mittelpunkte bilden ein Gitter (algebraische Struktur)
- Dichteste Gitterpackungen zu finden ist im Prinzip algorithmisch lösbar (A. N. Korkin und J. I. Solotarjow (1873), G. F. Voronoj (1908)), aber nur in kleinen Dimensionen (≤ 8) praktisch durchführbar.
- In vielen Fällen ist die dichteste bekannte Kugelpackung eine Gitterpackung (z.B. Dimensionen 1–9, 14–17, 31–43, ≥ 48)

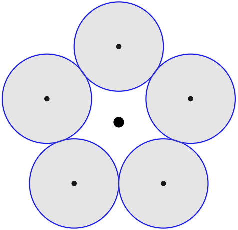
Verschiedene Arten von Kugelpackungen II

Periodische Kugelpackungen

- Ein Muster wiederholt sich immer wieder

Periodische Kugelpackungen

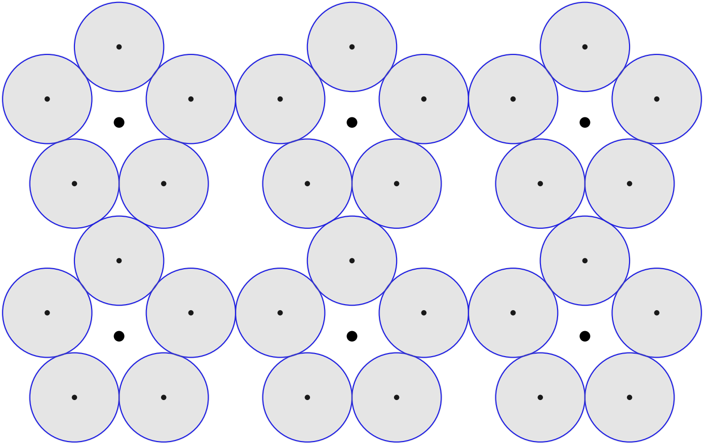
- Ein Muster wiederholt sich immer wieder



Verschiedene Arten von Kugelpackungen II

Periodische Kugelpackungen

- Ein Muster wiederholt sich immer wieder



Verschiedene Arten von Kugelpackungen II

Periodische Kugelpackungen

- Ein Muster wiederholt sich immer wieder
- Mittelpunkte bilden endlich viele verschobene Gitter

Verschiedene Arten von Kugelpackungen II

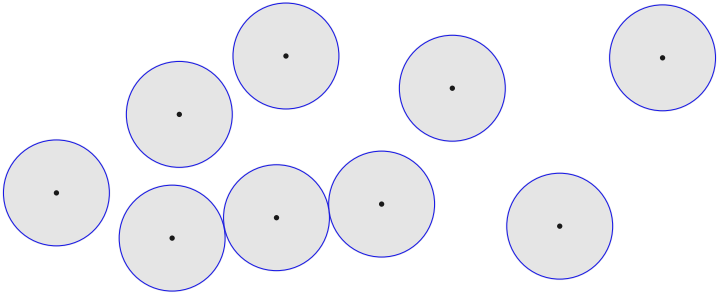
Periodische Kugelpackungen

- Ein Muster wiederholt sich immer wieder
- Mittelpunkte bilden endlich viele verschobene Gitter
- Nähern dichteste Kugelpackung beliebig gut an

Verschiedene Arten von Kugelpackungen III

Aperiodische Kugelpackungen

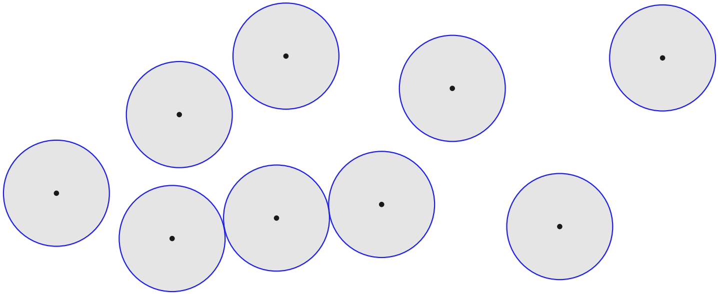
- Mittelpunkte können beliebig verteilt sein, müssen keine Struktur bilden.



Verschiedene Arten von Kugelpackungen III

Aperiodische Kugelpackungen

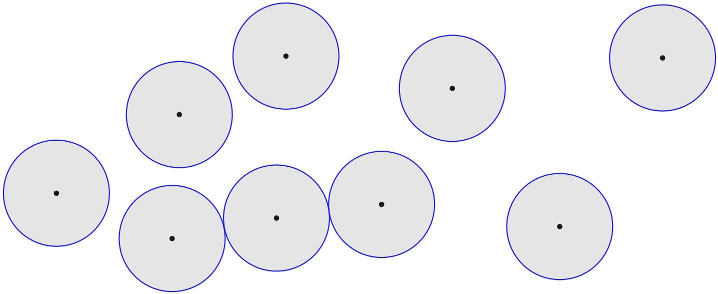
- Mittelpunkte können beliebig verteilt sein, müssen keine Struktur bilden.
- Schwer zu kontrollieren



Verschiedene Arten von Kugelpackungen III

Aperiodische Kugelpackungen

- Mittelpunkte können beliebig verteilt sein, müssen keine Struktur bilden.
- Schwer zu kontrollieren
- Definition der Dichte nicht ohne Weiteres klar.



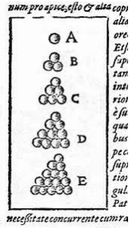
Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

2 Die Kepler-Vermutung

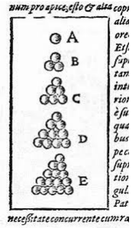
3 Kugelpackungen in 8 und 24 Dimensionen

Dichteste Kugelpackung in 3 Dimensionen



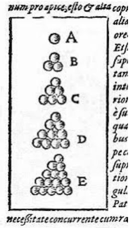
- flächenzentriert-kubische (fcc) Packung

Dichteste Kugelpackung in 3 Dimensionen



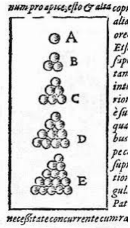
- flächenzentriert-kubische (fcc) Packung
- Gitterpackung zum Gitter D_3

Dichteste Kugelpackung in 3 Dimensionen



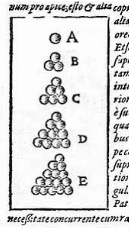
- flächenzentriert-kubische (fcc) Packung
- Gitterpackung zum Gitter D_3
- Dichte: $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048$

Dichteste Kugelpackung in 3 Dimensionen



- flächenzentriert-kubische (fcc) Packung
- Gitterpackung zum Gitter D_3
- Dichte: $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048$
- Alternative: hexagonal dichteste (hcp) Packung (selbe Dichte, keine Gitter-Packung)

Dichteste Kugelpackung in 3 Dimensionen



- flächenzentriert-kubische (fcc) Packung
- Gitterpackung zum Gitter D_3
- Dichte: $\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0.74048$
- Alternative: hexagonal dichteste (hcp) Packung (selbe Dichte, keine Gitter-Packung)
- überabzählbar viele Packungen mit gleicher Dichte (Barlow-Packungen)

Geschichte

- J. Kepler (1611): Vermutung, wie man optimal Kanonenkugeln stapelt (ursprüngliche Frage von Sir W. Raleigh (1591))

Geschichte

- J. Kepler (1611): Vermutung, wie man optimal Kanonenkugeln stapelt (ursprüngliche Frage von Sir W. Raleigh (1591))
- C. F. Gauß (1831): D_3 (fcc-Packung) liefert die dichteste Gitterpackung

Geschichte

- J. Kepler (1611): Vermutung, wie man optimal Kanonenkugeln stapelt (ursprüngliche Frage von Sir W. Raleigh (1591))
- C. F. Gauß (1831): D_3 (fcc-Packung) liefert die dichteste Gitterpackung
- D. Hilbert (1900): 18. der berühmten 23 Hilbert'schen Probleme

Geschichte





- J. Kepler (1611): Vermutung, wie man optimal Kanonenkugeln stapelt (ursprüngliche Frage von Sir W. Raleigh (1591))
- C. F. Gauß (1831): D_3 (fcc-Packung) liefert die dichteste Gitterpackung
- D. Hilbert (1900): 18. der berühmten 23 Hilbert'schen Probleme
- C. A. Rogers (1958): „Viele Mathematiker glauben und alle Physiker wissen, dass die Dichte [...] höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$ beträgt."

Computergestützte Beweise

- L. Fejes Tóth (1953): Reduktion des Problems auf eine endliche, aber extrem komplizierte und umfangreiche Fallunterscheidung

Computergestützte Beweise

- L. Fejes Tóth (1953): Reduktion des Problems auf eine endliche, aber extrem komplizierte und umfangreiche Fallunterscheidung
- T. Hales (1992–1998): Reduktion auf konretes lineares Optimierungsproblem, 3 GB an Daten und Code.

Computergestützte Beweise

- L. Fejes Tóth (1953): Reduktion des Problems auf eine endliche, aber extrem komplizierte und umfangreiche Fallunterscheidung
- T. Hales (1992–1998): Reduktion auf konretes lineares Optimierungsproblem, 3 GB an Daten und Code.
- „Kontroverse“ über Computerbeweis

Computergestützte Beweise

- L. Fejes Tóth (1953): Reduktion des Problems auf eine endliche, aber extrem komplizierte und umfangreiche Fallunterscheidung
- T. Hales (1992–1998): Reduktion auf konretes lineares Optimierungsproblem, 3 GB an Daten und Code.
- „Kontroverse“ über Computerbeweis
- T. Hales und 21 Koautoren (2003–2015): Formaler Beweis, der durch Beweischecker automatisch geprüft werden kann (und wurde).

Inhaltsverzeichnis

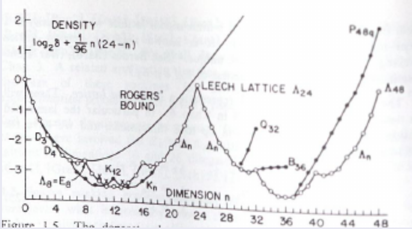
1. Einführung
2. Die Kepler-Vermutung
3. Kugelpackungen in 8 und 24 Dimensionen

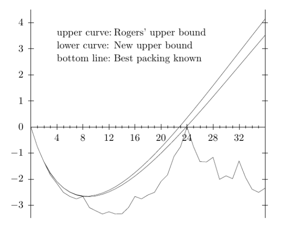
Warum gerade 8 und 24?

„Satz“ (C. A. Rogers (1958) und H. Cohn und N. Elkies (2003))

Für die Dichte der dichtesten Kugelpackung in einer gegebenen Dimension gelten folgende obere Schranken.





Das E_8-Gitter

Eigenschaften

- Einziges gerades, unimodulares Gitter in Dimension 8 (bis auf Isometrie).

Das E_8-Gitter

Eigenschaften

- Einziges gerades, unimodulares Gitter in Dimension 8 (bis auf Isometrie).
- Dichte der Gitterpackung: $\frac{\pi^4}{348} \approx 0.25367$

Das E_8-Gitter



Eigenschaften

- Einziges gerades, unimodulares Gitter in Dimension 8 (bis auf Isometrie).
- Dichte der Gitterpackung: $\frac{\pi^4}{348} \approx 0.25367$
- Erste Konstruktion: A. N. Korkin und J. I. Solotarjow (1872–1876), H. Minkowski (1884)

Das E_8-Gitter

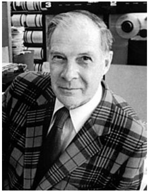
  

Eigenschaften

- Einziges gerades, unimodulares Gitter in Dimension 8 (bis auf Isometrie).
- Dichte der Gitterpackung: $\frac{\pi^4}{348} \approx 0.25367$
- Erste Konstruktion: A. N. Korkin und J. I. Solotarjow (1872–1876), H. Minkowski (1884)
- kommt vor bei z.B. Oktonionen, exzeptonelle Lie-Gruppe,...

Das E_8-Gitter





Eigenschaften

- Einziges gerades, unimodulares Gitter in Dimension 8 (bis auf Isometrie).
- Dichte der Gitterpackung: $\frac{\pi^4}{348} \approx 0.25367$
- Erste Konstruktion: A. N. Korkin und J. I. Solotarjow (1872–1876), H. Minkowski (1884)
- kommt vor bei z.B. Oktonionen, exzeptonelle Lie-Gruppe,...
- Hamming-Code

Das Leech-Gitter Λ_{24}

Eigenschaften

- einziges gerades, unimodulares Gitter mit Minimum 4 in Dimension 24 (bis auf Isometrie)

Das Leech-Gitter Λ_{24}

Eigenschaften

- einziges gerades, unimodulares Gitter mit Minimum 4 in Dimension 24 (bis auf Isometrie)
- Dichte: $\frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.00193$

Das Leech-Gitter Λ_{24}

Eigenschaften

- einziges gerades, unimodulares Gitter mit Minimum 4 in Dimension 24 (bis auf Isometrie)
- Dichte: $\frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.00193$
- zuerst konstruiert von J. Leech ($\sim$ 1965)

Das Leech-Gitter Λ_{24}

Eigenschaften

- einziges gerades, unimodulares Gitter mit Minimum 4 in Dimension 24 (bis auf Isometrie)
- Dichte: $\frac{\pi^{12}}{12!} \approx 0.00193$
- zuerst konstruiert von J. Leech ($\sim$ 1965)
- Golay-Code

Der Schlüsselsatz

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt zulässig, falls eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass $|f|$ und seine Fourier-Transformierte $|\widehat{f}|$ beide bis auf einen konstanten Faktor durch $(1 + |x|)^{-n-\delta}$ beschränkt sind.

Der Schlüsselsatz

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt zulässig, falls eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass $|f|$ und seine Fourier-Transformierte $|\widehat{f}|$ beide bis auf einen konstanten Faktor durch $(1 + |x|)^{-n-\delta}$ beschränkt sind.

Satz (Cohn - Elkies, 2003)

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion, nicht identisch 0, so dass gilt

Der Schlüsselsatz

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt zulässig, falls eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass $|f|$ und seine Fourier-Transformierte $|\widehat{f}|$ beide bis auf einen konstanten Faktor durch $(1 + |x|)^{-n-\delta}$ beschränkt sind.

Satz (Cohn - Elkies, 2003)

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion, nicht identisch 0, so dass gilt

1. $f(x) \leq 0$ für $|x| \geq 1$,

Der Schlüsselsatz

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt zulässig, falls eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass $|f|$ und seine Fourier-Transformierte $|\widehat{f}|$ beide bis auf einen konstanten Faktor durch $(1 + |x|)^{-n-\delta}$ beschränkt sind.

Satz (Cohn - Elkies, 2003)

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion, nicht identisch 0, so dass gilt

1. $f(x) \leq 0$ für $|x| \geq 1$,
2. $\widehat{f}(t) \geq 0$ für alle t,

Der Schlüsselsatz

Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt zulässig, falls eine Konstante $\delta > 0$ existiert, so dass $|f|$ und seine Fourier-Transformierte $|\widehat{f}|$ beide bis auf einen konstanten Faktor durch $(1 + |x|)^{-n-\delta}$ beschränkt sind.

Satz (Cohn - Elkies, 2003)

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine zulässige Funktion, nicht identisch 0, so dass gilt

1. $f(x) \leq 0$ für $|x| \geq 1$,
2. $\widehat{f}(t) \geq 0$ für alle t,

dann beträgt die maximale Kugelpackungsdichte in n Dimensionen höchstens

$$\frac{f(0)}{2^n \widehat{f}(0)} \cdot \text{„Volumen Einheitskugel“}.$$

Skizze in einer Dimension

- Betrachte $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$.

Skizze in einer Dimension

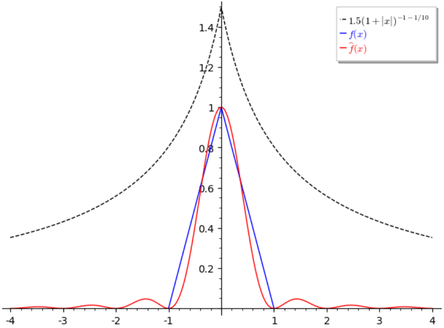
- Betrachte $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$.
- Dann gilt
$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x t} dx.$$

Skizze in einer Dimension

- Betrachte $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$.
- Dann gilt
$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x t} dx = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2 .$$

Skizze in einer Dimension

- Betrachte $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$.
- Dann gilt
$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x t} dx = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2 .$$



Skizze in einer Dimension

- Betrachte $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$.
- Dann gilt
$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x t} dx = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t} \right)^2 .$$
- Satz liefert obere Schranke 1 für die Dichte.

Skizze in einer Dimension

- Betrachte $f(x) = (1 - |x|) \cdot \chi_{[-1,1]}(x)$.
- Dann gilt
$$\widehat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi i x t} dx = \left(\frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\right)^2.$$
- Satz liefert obere Schranke 1 für die Dichte.
- Es gibt eine Kugelpackung mit Dichte 1, also muss es die dichteste sein.

Die Lösung

Satz (Viazovska (2016))

1. Das E_8-Gitter liefert die dichteste Kugelpackung in Dimension 8.

Die Lösung

Satz (Viazovska und Cohn-Kumar-Miller-Radchenko-Viazovska (2016))

1. Das E_8-Gitter liefert die dichteste Kugelpackung in Dimension 8.
2. Das Leech-Gitter liefert die dichteste Kugelpackung in Dimension 24.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.